Phys. g. 178^s 4° (4

Weber

Phys. g. 178 d 4

WILHELM WEBER'S WERKE

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

VIERTER BAND

GALVANISMUS UND ELEKTRODYNAMIK

ZWEITER THEIL

BESORGT DURCH HEINRICH WEBER

MIT IV TAFELN UND IN DEN TEXT GEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1894

Wilhelm Weber hat dem ihm wiederholt ausgesprochenen Verlangen nach einer Gesammtausgabe seiner Werke bei aller Bescheidenheit seiner Meinung über den Werth der eigenen Schriften schon im Jahre 1890 nachgegeben. Er hat dann seinerseits den lebhaften Wunsch ausgesprochen, dass die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, welche die Herausgabe der Werke seines grossen Freundes Gauss besorgt hat, auch seine Werke herausgebe. Die Erfüllung dieses Wunsches, welchem sich seine Verwandten gern anschlossen, hat sich die Königl. Gesellschaft durch die unterzeichnete Kommission beeifert in Angriff zu nehmen und ist zu dem Zwecke mit Herrn Professor Heinrich Weber in Braunschweig und Herrn Professor Wilhelm Braune in Leipzig als den Vertretern der Familie Wilhelm Weber's in Verbindung getreten.

Zunächst hat dieselbe an Herrn Julius Springer in Berlin einen Verleger gefunden, welcher diesem wissenschaftlichen Unternehmen das volle Verständniss entgegenbringt, für eine würdige Ausstattung sorgen und einen, dem Wunsche nach ausgedehnter Verbreitung dieser so sehr lehrreichen Werke förderlichen, möglichst geringen Preis stellen wird.

Von den Erben von Ernst Heinrich Weber und von Eduard Weber sind die Autorrechte der von diesen zusammen mit ihrem Bruder Wilhelm Weber verfassten Werke an die *Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* übertragen worden. Die Verlagshandlungen der grösseren dieser Schriften, Herr Fr. Riehm in Basel für die 1825 erschienene *Wellenlehre*, und die Dieterich'sche Buchhandlung in Göttingen für die 1836 erschienene *Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge*, haben ihre Genehmigung zum Abdruck der Schriften in den gesammelten Werken ertheilt.

Die Königlich Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig hat bereitwillig den Abdruck der in ihren Abhandlungen erschienenen

Fortzetzung auf der dritten Umschlagseite

WILHELM WEBER'S WERKE

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

VIERTER BAND

GALVANISMUS UND ELEKTRODYNAMIK

ZWEITER THEIL

BESORGT DURCH HEINRICH WEBER

MIT IV TAFELN UND IN DEN TEXT GEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1894

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

Vorwort zum vierten Bande.

Der vierte Band schliesst sich dem Inhalt nach unmittelbar dem dritten Bande an. Er enthält alle Abhandlungen und Aufsätze aus dem Gebiete des Galvanismus und der Elektrodynamik, welche Wilhelm Weber in dem Zeitraume 1858—1880 veröffentlicht hat, sowie eine Anzahl von Abhandlungen und Aufsätzen, welche sich in seinem Nachlasse vorgefunden haben. Ihnen ist sodann noch ein Aufsatz mit Bemerkungen über das Münchner magnetische Observatorium als Anhang beigefügt, welcher erst nach der Herausgabe der drei ersten Bände aufgefunden wurde und der daher in dem zweiten Bande, dem er seinem Inhalt nach angehört, nicht mehr Aufnahme finden konnte.

Die Abhandlungen sind mit Ausnahme derjenigen, welche den Nachlass und den Anhang bilden, in chronologischer Reihenfolge angeordnet worden, wozu dieselben Gründe, welche die gleiche Anordnung im dritte Bande veranlasst haben, maassgebend gewesen sind. Die drei letzten der unter dem gemeinschaftlichen Titel „Elektrodynamische Maassbestimmungen“ erschienenen sieben Abhandlungen, von denen die vier ersten im dritten Bande abgedruckt worden sind, finden sich unter No. V, VIII und XII und eine achte ihnen zugehörige, bisher noch nicht veröffentlichte, als erste Abhandlung im Nachlass aufgenommen.

Während die vier ersten Abhandlungen der Elektrodynamischen Maassbestimmungen die Erforschung der wechselseitigen Kräfte, welche elektrische Theilchen untereinander oder andere Körper auf diese ausüben, zum Hauptinhalt haben, beschäftigen sich die folgenden, in diesem Bande aufgenommenen, vornehmlich mit den durch jene Kräfte hervorgerufenen Bewegungen der elektrischen Theilchen. Ein merkwürdiges Zusammentreffen war es, dass, als Wilhelm Weber zu der ersten Veröffentlichung über diesen Gegenstand schreiten wollte, bereits Kirchhoff, welcher sich gleichzeitig mit den Gesetzen der galvanischen Strömung beschäftigt hatte, kurze Zeit zuvor dem Herausgeber der Annalen für Physik und Chemie eine Abhandlung gleichen Inhaltes überreicht hatte. Hierauf bezieht sich die unter No. VI aufgenommene Bemerkung J. C. Poggendorff's, auf welche Wilhelm Weber selbst (Wilhelm Weber's Werke,

Bd. IV, pag. 130) hinweist. Erst sechs Jahre später veröffentlichte Wilhelm Weber seine Abhandlung über elektrische Schwingungen (No. V), in welcher er dann den Inhalt der früher zurückgezogenen Abhandlung mit einer umfassenden experimentellen Untersuchung verknüpfte, an welcher Rudolph Kohlrausch bis zu seinem im Jahre 1858 erfolgten Tode Antheil genommen hat. In dieser Abhandlung führt Wilhelm Weber zum erstenmale die Masse der elektrischen Flüssigkeiten ein und entwickelt sodann nach den allgemeinen Gesetzen der Mechanik die Gleichungen für die Bewegung der Elektricität in Drähten, speciell in solchen von Kreisform, ohne dabei wie Kirchhoff die Gültigkeit des Ohm'schen Gesetzes auch in den Fällen voraus zu setzen, wo die Stromintensität in den einzelnen Stromelementen verschieden und einem schnellen Wechsel unterworfen ist.

In den folgenden Abhandlungen VIII und XII der Elektrodynamischen Maassbestimmungen, zu denen die in Poggendorff's Annalen veröffentlichen Abhandlungen VII, IX und vor Allem die Abhandlung X „Ueber die Bewegung der Elektricität in Körpern von molekularer Konstitution" als Bindeglieder zu zählen sind, tritt W. Weber in Untersuchungen ein, für welche das Energieprincip die Grundlage bildet. Insbesondere wird in No. VIII die Stellung, welche das Grundgesetz der elektrischen Wirkung dem Energieprincipe gegenüber einnimmt, genauer untersucht, und der Nachweis geführt, dass ein Widerspruch zwischen dem Grundgesetze und letzterem Principe, wie von anderen Seiten behauptet worden ist, nicht bestehe, soweit nicht Annahmen über Anfangszustände gemacht werden, deren Verträglichkeit mit der vorhandenen Natur eines besonderen Nachweises bedürfen. Im Eingange der Abhandlungen X und XII geht Wilhelm Weber sodann zu ausführlichen Betrachtungen über das Energieprincip über, indem er zeigt, dass das in gewöhnlicher Weise formulirte Energieprincip, worauf Carl Neumann aufmerksam gemacht hatte, Erweiterungen fähig ist, welche je nach ihrer Beschaffenheit andere Resultate zu ihrer Folge haben. Die Erweiterung, welche Wilhelm Weber diesem Principe giebt, besteht in der Annahme, dass Wechselwirkungsenergie und die relative lebendige Kraft zweier Theilchen homogene Grössen sind, deren Summe stets einer Konstanten gleich ist. Besitzt diese Erweiterung Gültigkeit, so dürfen die anfänglichen Verhältnisse nicht mehr ganz willkührlich angenommen werden, vielmehr sind alle Annahmen, welche an sich schon mit dem zu Grunde gelegten Principe in Widerspruch stehen, von vornherein ausgeschlossen. Auch leitet Wilhelm Weber aus dem von ihm formulirten Principe der Erhaltung der Energie das gewöhnliche Energieprincip ab und zeigt, wie sich aus seinem Principe und dem elektrostatischen Potentialgesetze das elektrodynamische Potentialgesetz ergiebt.

Im Anschlusse an die bereits in der Abhandlung VIII entwickelten Bewegungsgesetze zweier blos ihrer Wechselwirkung unterworfenen Theilchen werden dann weiter in No. XII besondere Fälle eingehend erörtert. Von besonderer Wichtigkeit sind ferner die in der Abhandlung X, über die Bewegung der Elektricität in Körpern von molekularer Konstitution, angestellten Untersuchungen, in denen die galvanischen, magnetischen und Wärme-Wirkungen, welche gleichzeitig in ponderabelen Körpern auftreten können, in das Bereich der Betrachtung gezogen werden. Wilhelm Weber verlässt dabei die früher von ihm dargelegte Ansicht über den galvanischen Strom als Doppelstrom und giebt, indem er an frühere Betrachtungen (Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, pag. 403) anknüpft, eine klare Vorstellung von der Erzeugung der Wärmeenergie durch den galvanischen Strom und von der Ursache des Widerstandes in metallischen Leitern.

Den oben genannten Abhandlungen reiht sich nun die erste im Nachlass aufgenommene, bisher noch nicht veröffentlichte Abhandlung organisch an, welche nach der ihr von W. Weber selbst gegebenen Ueberschrift den sieben unter dem Titel „Elektrodynamische Maassbestimmungen“ veröffentlichten Abhandlungen als achte zuzuzählen ist. Wohl mag Wilhelm Weber geahnt haben, dass es ihm nicht beschieden sein würde, in die Einzelheiten des ungeheueren Gebietes der Erscheinungen, auf welche sich die Betrachtungen in dieser Abhandlung erstrecken, genauer einzugehen und so erscheinen einzelne Abschnitte gleichsam als Fingerzeige auf die Wege, welche zu einem weiteren Ausbau des Forschungsfeldes führen.

Auf Grund der Annahme, dass alle ponderabelen Moleküle blosse Verbindungen gleicher Mengen positiver und negativer Elektricität seien, und dass die Anziehungskraft gleicher Mengen ungleichartiger Elektricität grösser sei als die Abstossungskraft derselben Mengen gleichartiger Elektricität, geht Wilhelm Weber aus dem Gebiete der reinen Elektricitätslehre zu demjenigen der ponderabelen Körper über. Er zeigt, wie die verschiedenartigen ponderabelen Moleküle, insbesondere die der Elemente, aus elektrischen Molekülen zusammengesetzt gedacht werden können, ferner wodurch sich metallische Leiter von glasartigen und krystallinischen Körpern unterscheiden, und wie auf Grund dieses Unterschiedes die Fortpflanzung der Elektricität und Wärme in ersteren auf andere Weise, nämlich durch Wurfbewegung, als die von Licht und Wärme in letzteren, nämlich durch Wellenbewegung stattfinde. Der Lichtäther ist nach Wilhelm Weber's hier dargelegten Anschauung ein statisches, aus positiv elektischen Molekülen gebildetes Medium.

Das Manuskript zu dieser Abhandlung enthält in seiner ursprünglichen Anlage ausser den mitgetheilten Artikeln noch vier andere, deren

Titel in einer am Schlusse der Abhandlung angefügten Anmerkung angegeben sind. Da Wilhelm Weber diese Artikel später selbst aus der Abhandlung ausgeschlossen hat, so musste von ihrer Veröffentlichung abgesehen werden. Es möge jedoch bemerkt werden, dass der gesammte Nachlass der Königlichen Bibliothek zu Göttingen zur Aufbewahrung übergeben worden ist, wodurch die Möglichkeit, Einsicht in den Inhalt dieser Artikel zu gewinnen, gewahrt bleibt.

Ausser diesen auf die Natur der Elektricität und der der ponderabelen Körper Bezug nehmenden Abhandlungen, enthält der vorliegende Band noch zwei von besonderer Wichtigkeit, nämlich die Abhandlung No. III „Zur Galvanometrie" und die in Gemeinschaft mit Zöllner herausgegebene Abhandlung No. XIV, von denen diese Wilhelm Weber's letzte experimentelle Arbeit bildet. In ersterer werden die Methoden der absoluten Widerstandsmessungen besprochen und eine vollständige Theorie sowie die vortheilhafteste Konstruktion der Galvanometer gegeben und die Kopirungsmethoden einer genauen Untersuchung unterzogen, während die letzere die Einrichtung eines Normalleiters zum Gegenstand hat, dessen Widerstand jederzeit nach absolutem Maasse bestimmbar ist, wodurch die allgemeine Anwendung absoluter Maasse in der Elektrodynamik erleichtert werden sollte. Die ursprünglich geplante Vergleichung des Widerstandes dieses Normalleiters mit der heute allgemein angenommenen praktischen Widerstandseinheit, dem Ohm, war Wilhelm Weber nicht mehr vergönnt zur Ausführung zu bringen.

Der Nachlass enthält ausser der schon oben erwähnten, den elektrodynamischen Maassbestimmungen zugehörigen Abhandlung noch Aufsätze und Abhandlungen, welche zum Theil einem sehr verschiedenen Lebensalter Wilhelm Weber's entstammen. Von ihnen sind einige unzweifelhaft für den Druck, wenn auch vielleicht in anderer Form, bestimmt gewesen, aber aus unbekannten Gründen nicht zur Veröffentlichung gelangt, andere dagegen sind Niederschriften, durchflochten mit mancherlei Bemerkungen, welche Wilhelm Weber zur Unterstützung des Gedächtnisses rasch hingeworfen hat, deren Zusammenstellung oftmals nur unter Ueberwindung grosser Schwierigkeiten ausgeführt werden konnte. Von ihnen möge hier noch besonders die grössere Abhandlung „über Maassbestimmungen" hervorgehoben werden, welche selbst heute nach allgemeiner Annahme des absoluten Maasssystems ihre Wichtigkeit nicht verloren hat. Wenngleich diese Abhandlung erst nach dem Jahre 1864 niedergeschrieben ist, so ergeben doch nachgelassene Notizen Wilhelm Weber's aus dem Jahre 1834, dass derselbe bereits zu jener Zeit die wichtigsten physikalischen Grössen auf absolutes Maass mit den Grundmaassen für Länge, Zeit und Masse zurückgeführt hat. Der

Aufsatz „über die Einrichtung des Bifilargalvanometers“ ist jedenfalls viel früheren Ursprunges als der ihm im Jahre 1864 zugefügte Zusatz, welcher die gleichzeitige Messung des Erdmagnetismus und der Stromintensität nach absolutem Maasse behandelt. Auf ein anderes Gebiet führen schliesslich die beiden Aufsätze „Bemerkungen zu der Abhandlung: Untersuchungen über den galvanischen Lichtbogen, von Edlund“ und über „elektroskopische und elektrodynamische Wirkungen der freien Elektricität geschlossener Ketten“, weil in beiden auf die Ladung der Oberfläche von Leitern, in denen sich die Elektricität in Bewegung befindet, Bezug genommen wird.

Von der Veröffentlichung einiger Aufsätze, welche sich gleichfalls im Nachlass vorgefunden haben, ist Abstand genommen worden, theils, weil sie aus sehr früher Lebensperiode Wilhelm Weber's herrühren und heute Neues nicht mehr darbieten, theils, weil ihr Inhalt in späteren Abhandlungen Aufnahme gefunden hat. Zur Bestätigung mögen die Schriftstücke aufgezählt und ihr wesentlicher Inhalt angedeutet werden.

Der erste hierher gehörende Aufsatz, welcher die Ueberschrift „Der Dämpfer“ führt, hatte die Bestimmung, in die Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, 1837 aufgenommen zu werden. Nach Darlegung des Zweckes eines Dämpfers wird die Wirkung eines geschlossenen Metallringes als Multiplikator, sodann als Induktor und schliesslich bei Kombination beider Wirkungen als Dämpfer näher betrachtet. Die Berechnung der Schwingungsabnahme der Nadel und ein Vergleich der dämpfenden Wirkung mit der Wirkung eines Beruhigungsstabes bildet den Schluss der Schrift. Ein zweiter Aufsatz „über die Einrichtung der Multiplikatoren“ bildet den Vorläufer der später ausführlich in der Abhandlung „Zur Galvanometrie“ gegebenen Betrachtungen. Der dritte Aufsatz „über ein neues Galvanometer“ behandelt die Einrichtung, Aufstellung und Prüfung des Bifilargalvanometers und seine Verwendung zu absoluten Intensitätsmessungen und zur Bestimmung des elektrochemischen Aequivalentes von Sauerstoff und Wasserstoff, eine Anwendung, welche Wilhelm Weber in dem Aufsatze über das elektrochemische Aequivalent des Wassers (Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, pag. 13) ausführlich bespricht. Der vierte, nur wenige Seiten umfassende Aufsatz hat „die absolute Messung der in einer Leidener Flasche vorhandenen freien Elektricität“ zum Gegenstand. Die Messung gründet sich auf Schwingungs- und Ablenkungsversuche einer beweglich aufgehangenen, geladenen Franklin'schen Platte, auf welche eine andere geladene Franklin'sche Platte aus der Ferne einwirkt. Diese Aufgabe ist in vollkommenerer Weise in der Abhandlung, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensität auf mechanisches Maass (Wilhelm Weber's Werke, Bd. III,

pag. 618) gelöst worden. Den Beschluss bildet endlich ein 11 Quartseiten umfassendes Schriftstück ohne Ueberschrift, in welchem der Vorschlag enthalten ist, zur Erleichterung galvanischer Messungen, namentlich bei technischen Anwendungen, eine willkürliche Maasseinheit für den galvanischen Widerstand herzustellen und dieselbe in grosser Anzahl von Kopien zu verbreiten. Diese praktische Maasseinheit aber nach absolutem Maasse genau zu messen. Hieran schliesst sich sodann die Ableitung der Schwingungsgleichung einer Magnetnadel innerhalb eines Multiplikators, wenn auf Selbstinduktion Rücksicht genommen wird.

Die in diesem Bande unter dem Titel „Nachlass“ zusammengestellten Schriften können nur mit allem Vorbehalt der Oeffentlichkeit übergeben werden, da bei vielen von ihnen es zweifelhaft erscheinen muss, ob Wilhelm Weber dieselben für den Druck bestimmt hatte, zumal in der Form, in welcher sie sich im Nachlass vorgefunden haben. Ungeachtet es nahe lag, in der Ausdrucksweise und der Darstellung an verschiedenen Stellen Aenderungen eintreten zu lassen, wie solche Wilhelm Weber bei einer Veröffentlichung zweifellos selbst vorgenommen hätte, wurde doch hiervon überall Abstand genommen, was schon durch die Ueberschrift „handschriftlicher“ Nachlass hinreichend angedeutet erscheint. Alle Citate und Zusätze, welche nicht von Wilhelm Weber selbst her rühren, sind, wie in den vorhergehenden Bänden so auch in diesem Bande, durch eckige Klammern kenntlich gemacht werden.

Braunschweig, im Januar 1894.

Heinrich Weber.

Inhaltsverzeichniss des vierten Bandes.

Seite

I. Bericht über einige im physikalischen Institute in Göttingen gemachte Versuche. (1858) . 3

II. Ueber die beabsichtigte Einführung eines galvanischen Widerstands-Etalons oder Standards. (1861) 10

III. Zur Galvanometrie. (1862) . 17

i. Die Methode der absoluten Widerstandsmessung 24
ii. Konstruktion des Galvanometers 37
iii. Galvanometrische Beobachtungen 52
iv. Kopirungs-Methoden . 66
v. Ueber die allgemeinen Principien der Widerstandmessung. Hierzu Tafel I . 77

IV. Wilhelm Weber, Ueber die Abhandlung „Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen". (1863) 97

V. Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. (1864) . 105

Einleitung . 107

i. Bewegungsgesetze.

Art. 1. Kirchhoff, über die Bewegung der Elektricität in Leitern 109
„ 2. Entwickelung des Ausdrucks der elektromotorischen Kraft, welche von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen in einem kleinen, als Cylinder betrachteten Stücke des Leitungsdrahts auf irgend einen Punkt des mittleren Querschnitts dieses Stückes ausgeübt wird . . . 115
„ 3. Vereinfachung der allgemeinen Gleichungen 121
„ 4. Prüfung der im vorigen Artikel gemachten Voraussetzungen 125
„ 5. Von der Voraussetzung des Ohm'schen Gesetzes unabhängige Herleitung der Bewegungsgleichung 126
„ 6. Vergleichung der Resultate 130
„ 7. Entwickelung des Ausdrucks der elektromotorischen Kraft, welche auf einen Punkt eines geschlossenen linearen Leiters von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen im ganzen Leiter, mit Ausnahme desjenigen Elements, in welchem der betrachtete Punkt liegt, ausgeübt wird . 132
„ 8. Bewegungsgleichung der Elektricität in einem geschlossenen Leiter . 135
„ 9. Gleichung für die Mittelwerthe der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten in geschlossenen Leitern von beliebiger Gestalt 138

Seite

Art. 10. Bewegungsgesetze der Elektricität in einem kreisförmigen Leitungsdrahte 141
„ 11. Gleichgewicht der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter . 144
„ 12. Beharrliche Strömungen der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter 145
„ 13. Bewegungsgesetze der nach beliebiger Störung des Gleichgewichts sich selbst überlassenen Elektricität in einem kreisförmigen Leiter 147
„ 14. Vergleichung mit dem OHM'schen Gesetze 150
„ 15. Elektrische Wellenbewegungen in einem kreisförmigen Leiter . 152
„ 16. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenzüge in einem kreisförmigen Leiter 155
„ 17. Absorption elektrischer Bewegungen in einem kreisförmigen Leiter 160
„ 18. Beziehung zur Wärmeleitung 166
„ 19. Schwingungen der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter . 168
„ 20. Schwingungen durch Induktion eines rotirenden Magnets 169
„ 21. Gleichheit der Phasen und Amplituden elektrischer Schwingungen in kreisförmigen Leitern 174
„ 22. Vertheilung der freien Elektricität während der elektrischen Schwingung in einem kreisförmigen Leiter . . 177
„ 23. Leitfaden für die Beobachtungen 179

II. Schwingungsbeobachtungen.

Art. 24. Methode der Beobachtung 183
„ 25. Die Kommutatoren 191
„ 26. Die langen Leitungsdrähte 199
„ 27. Beobachtungen zur Vergleichung der Amplitude der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen einer langen geschlossenen Kette 203
„ 28. Beobachtungen zur Bestimmung des Unterschieds der Phase der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen einer langen geschlossenen Kette 212
„ 29. Resultat der Prüfung 218
„ 30. Beobachtungen über die Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets 220
„ 31. Prüfung des Dynamometers 222
„ 32. Erste Reihe . 226
„ 33. Berechnung der Beobachtungen 228
„ 34. Zweite Reihe . 232
„ 35. Verhältniss der elektrostatischen Kraft zweier gleichen Elektricitätsmengen zu ihrer Masse 235
„ 36. Schluss . 240

VI. Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn Prof. KIRCHHOFF (VON POGGENDORFF) . 242

VII. Ueber einen einfachen Ausspruch des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung. (1869) 243

VIII. Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. (1871) 247

Einleitung . 249

Seite

Ueber das Verhältniss der elektrischen Gesetze zum Princip der Erhaltung der Energie . 249
Art. 1. Elektrische Theilchen und elektrische Massen 249
„ 2. Das Gesetz der elektrischen Kraft 251
„ 3. Das Gesetz des elektrischen Potentials 254
„ 4. Elektrische Grundgesetze 255
„ 5. Princip der Erhaltung der Energie für zwei Theilchen, welche ein abgesondertes System bilden 258
„ 6. Ausdehnung des Princips der Erhaltung der Energie auf zwei elektrische Theilchen, welche kein abgesondertes System bilden 261
„ 7. Anwendbarkeit auf andere Körper 265

Ueber die Bewegungen zweier elektrischer Theilchen durch Wechselwirkung . 268
Art. 8. Ueber die Geltung der Gesetze für Molekularbewegungen 268
„ 9. Bewegungen zweier elektrischen Theilchen in Richtung der sie verbindenden Geraden 269
„ 10. Zwei Aggregatzustände eines Systems von zwei gleichartigen Theilchen 271
„ 11. Bewegungen zweier elektrischen Theilchen, welche im Raume, in einer Richtung senkrecht auf die sie verbindende Gerade, ungleiche Geschwindigkeiten besitzen 272
„ 12. Aggregatzustände derselben 274
„ 13. Keine Kreisbewegung derselben um einander 274
„ 14. Ueber die Schwingungsdauer eines elektrischen Atomen-Paares . 276
„ 15. Anwendbarkeit auf chemische Atomengruppen 278
„ 16. Ueber Aggregatzustand und Schwingung zweier ungleichartigen elektrischen Theilchen 279
„ 17. Ueber Ampère'sche Molekularströme 281
„ 18. Bewegungen zweier ungleichartigen elektrischen Theilchen im Raume, unter Einfluss einer elektrischen Scheidungskraft . 285
„ 19. Elektrische Ströme in Konduktoren 291
„ 20. Ueber Thermomagnetismus 294
„ 21. Helmholtz, über den Widerspruch zwischen dem Gesetze der elektrischen Kraft und dem Gesetze der Erhaltung der Kraft . 296

IX. Ueber das Aequivalent lebendiger Kräfte. (1874) 300
Art. 1. Princip der Erhaltung der Energie 301
„ 2. Unterscheidung der Eigenschaften eines einzelnen Körpers oder Körpertheilchens und eines Körperpaares 302
„ 3. Merkmale eines Grundgesetzes der Wechselwirkung 303
„ 4. Zwei Arten von Aequivalenten einer lebendigen Kraft 304
„ 5. Aequivalent der zweiten Art 305
„ 6. Gesetz der Arbeitsfähigkeit unter der Voraussetzung, dass sie das Aequivalent der lebendigen Kraft sei 307
„ 7. Ableitung des Potentials aus der Arbeitsfähigkeit 309
„ 8. Allgemeine Anwendung 310

X. Ueber die Bewegungen der Elektricität in Körpern von molekularer Konstitution. (1875) . 312
Art. 1. Bemerkungen zu den in der Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen vom Jahre 1871 Art. 4 aufgestellten elektrischen Grundgesetzen 313

Seite

Art. 2. Bemerkungen zum Aufsatz im Jubelbande dieser Annalen S. 199 . . 316
„ 3. Ueber die gegen das Grundgesetz der elektrischen Wirkung erhobenen Bedenken . 328
„ 4. Identität der in allen Körpern enthaltenen beweglichen Theile, deren Bewegung Wärme, Magnetismus oder Galvanismus ist . 334
„ 5. Identität der von der elektromotorischen Kraft im Strome erzeugten lebendigen Kraft mit der vom Strome im Leiter erzeugten Wärme . 336
„ 6. Bewegung der Elektricität in Konduktoren 339
„ 7. Zweierlei Wärmeverbreitung in ponderabelen Körpern 342
„ 8. Ueber die von Kohlrausch entwickelte Ansicht von der Thermo-Elektricität . 343
„ 9. Leitungswiderstand und Stromintensitäts-Maximum 348
„ 10. Vertheilung der Elektricität in Konduktoren 354

XI. Bemerkungen zu Edlund's Erwiderung auf zwei gegen die unitarische Theorie der Elektricität gemachte Einwürfe. (1876) 358

XII. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über die Energie der Wechselwirkung. (1878) 361

Einleitung . 363
Art. 1. Leitfaden der experimentellen Forschung in der Elektrodynamik . 364
„ 2. Die Energie der Wechselwirkung auf absolutes Maass zurückgeführt . 372
„ 3. Ableitung des elektrodynamischen aus dem elektrostatischen Potentialgesetze mittelst des Energieprincips 376
„ 4. Ableitung des gewöhnlichen Princips der Energie aus dem Princip der Erhaltung der Energie 379
„ 5. Das allgemeine Gesetz der elektrischen Kraft 380
„ 6. Bewegungsgesetze zweier blos durch Wechselwirkung getriebenen elektrischen Theilchen 384
„ 7. Elektrische Strahlung, insbesondere Reflexion und Zerstreuung der Strahlen . 389
„ 8. Anwendung der Theorie der Zurückwerfung und Zerstreuung elektrischer Strahlen auf Lichtäther und Gase nach der Krönig-Clausius'schen Theorie der molekularen Stösse . . 394
„ 9. Bewegungsgesetze zweier durch Wechselwirkung und äussere Einwirkung getriebenen elektrischen Theilchen 395
„ 10. Bewegungsgesetze eines in elektrischer Hohlkugel eingeschlossenen, durch elektrische Wechselwirkung und äussere Einwirkung getriebenen Elektricitätstheilchens 399
„ 11. Fortsetzung . 403
„ 12. Schluss . 405

Hierzu Tafel II.

XIII. Ueber die Energie der Wechselwirkung (Auszug). (1878) 413

XIV. Ueber Einrichtungen zum Gebrauch absoluter Maasse in der Elektrodynamik mit praktischer Anwendung. Von W. Weber und F. Zöllner. (1880) . 420

Art. 1. Ueber die Bedeutung und den praktischen Gebrauch absoluter Maasse in der Physik im Allgemeinen und der Elektrodynamik im Besonderen 420
„ 2. Beschreibung und Aufstellung der angewandten Instrumente 433

Seite

Art. 3. Ein Normalleiter zu elektrodynamischen Messungen nebst Beobachtungen zur Bestimmung seines Widerstandes nach absolutem Maasse . 437

Hierzu Tafel III und Tafel IV.

Handschriftlicher Nachlass.

Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über den Zusammenhang des elektrischen Grundgesetzes mit dem Gravitationsgesetze . . 479

Art. 1. Ueber Zurückführung qualitativer Verschiedenheiten der Körper auf quantitative, nach der Annahme, dass alle ponderabelen Moleküle Verbindungen positiv und negativ elektrischer Moleküle seien 479

Art. 2. Ableitung des Gravitationsgesetzes aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung nach ZÖLLNER 481

„ 3. Ueber die Unzulänglichkeit direkter Versuche zur Entscheidung der Frage, ob bei gleichen Elektricitätsmengen die Anziehungskraft zweier ungleichartig elektrischer Moleküle wirklich grösser sei als die Abstossungskraft zweier gleichartig elektrischer Moleküle 486

„ 4. Elektrische Raumerfüllung, insbesondere über die Existenz eines aus lauter gleichartig elektrischen Molekülen bestehenden Aethers — Lichtäthers — in allen von ponderabelen Körper nicht eingenommenen Räumen. — Mannigfaltigkeit ponderabeler Körper 489

„ 5. Klassifikation der Körpermoleküle nach Zusammensetzung und Scheidbarkeit . 492

„ 6. Elekricität in metallischen Leitern 499

„ 7. Theorie des galvanischen Widerstands metallischer Leiter . 507

„ 8. Einige Aufgaben, welche nach dem Grundgesetze elektrischer Wirkung in Verbindung mit der Annahme von der Zusammensetzung ponderabeler Moleküle aus positiv und negativ elektrischen Molekülen noch zu lösen sind 514

„ 9. Fortsetzung . 516

„ 10. Ueber verschiedene Bewegungen in den aus positiv und negativ elektrischen Molekülen gebildeten ponderabelen Körpermolekülen und den davon abhängigen Wärmeeigenschaften . 518

„ 11. Eis, Wasser, Dampf 519

„ 12. Der Lichtäther ist ein statisches von positiv elektrischen Molekülen gebildetes Medium 524

Zur Galvanometrie (Auszug) . 526

Ueber Maassbestimmungen . 539

Bemerkungen zu der Abhandlung: „Untersuchung über den galvanischen Lichtbogen, von Prof. E. EDLUND“ 578

Ueber die Einrichtung des Bifilargalvanometers 584

Zusatz zu voriger Abhandlung 597

Gleichzeitige Messung des Erdmagnetismus und der Stromintensität nach absoluten Maassen durch korrespondirende Beobach-

Seite
tungen an der Tangentenboussole und am Bifilargalvanometer . 602
Einrichtung eines vollständigen Messapparats für alle absoluten Maassbestimmungen in der Galvanometrie 609
Elektroskopische und elektrodynamische Wirkungen der freien Elektricität geschlossener Ketten . 616
Ueber Elektrothermismus. (Ueber Elektricität und Wärme) 622
Aphorismen . 630

Anhang.

Bemerkungen über Herrn LAMONT's Beurtheilung magnetischer Instrumente 635

GALVANISMUS

UND

ELEKTRODYNAMIK.

ZWEITER THEIL.

ABHANDLUNGEN AUS DEN JAHREN 1858 BIS 1880
NEBST NACHLASS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

I.

Bericht über einige im physikalischen Institute in Göttingen gemachte Versuche.

Von

Wilhelm Weber.

Der Königl. Societät vorgelegt am 10. April 1858.

[Nachrichten von der G. A. Universität und der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, April 16. 1858, No. 6, p. 67—76.]

In dem physikalischen Institute der hiesigen Universität werden ausser dem regelmässigen Kursus von physikalischen Vorträgen auch praktische physikalische Uebungen gehalten, an denen die Mitglieder des mathematisch-physikalischen Seminars Antheil nehmen. Diejenigen, welche Physik zum Hauptfach wählen und grössere Uebung erworben, finden dabei Gelegenheit, auch besondere Arbeiten für sich allein auszuführen, wie dies z. B. im letzten Jahre von den Herren Dr. Arndtsen und Dr. Christie aus Christiania geschehen ist, welche ihre hier ausgeführten Arbeiten in Poggendorff's Annalen ausführlicher bekannt machen werden, von deren Resultaten hier nur ein kurzer Bericht gegeben werden soll.

Bei dem besonderen Interesse, welches noch immer der *Diamagnetismus* erweckt, als eine der neuesten über das innere Wesen und den Zusammenhang der Körper Aufschluss versprechenden Entdeckungen, und bei dem noch vorhandenen Mangel *quantitativer* Bestimmungen, wurde das nach Angabe des Professor Weber von Herrn Leyser in Leipzig verfertigte *Diamagnetometer*, womit schon Herr John Tyndall in London viele interessante Versuche gemacht und in den Philosophical Transactions for 1856 (Further Researches on the Polarity of the Diamagnetic Force) mitgetheilt hat, und wovon ein zweites Exemplar sich in dem hiesigen physikalischen Institute befindet, als Messapparat zu einigen *quantitativen* Bestimmungen über Diamagnetismus benutzt.

Herr Tyndall hatte bei seinen Versuchen eine fast gleiche Ablenkung der astatischen Magnetnadel durch den diamagnetischen Körper

gefunden, wenn der Diamagnetismus durch einen von *zwei, drei* oder *vier* Bechern herrührenden Strom erregt wurde, wodurch das *proportionale Wachsthum* der diamagnetischen Kraft mit der den Diamagnetismus erregenden Kraft in Zweifel gestellt wurde. Dieser Zweifel ist durch die von Herrn Dr. Christie mit demselben Instrumente vollständiger ausgeführten *Messungen* erledigt worden, indem Herr Dr. Christie mit jeder Beobachtung der *Ablenkung* eine Bestimmung der *Empfindlichkeit* der astatischen Nadel verband, woraus sich die letztere mit der Stromintensität *variabel* ergab. Hieraus folgte, dass die beobachteten Ablenkungen erst *auf gleiche Empfindlichkeit* reducirt werden mussten, ehe sie als Maassstab des erregten Diamagnetismus dienen konnten. Nach dieser Reduktion und nach genauen Messungen der *Stromintensitäten* (die bekanntlich der Becherzahl nicht proportional gesetzt werden dürfen) mit Hülfe der *Tangenten-Boussole*, ist das Gesetz der Proportionalität der diamagnetischen Kraft mit der sie erregenden galvanischen Kraft genau geprüft und bestätigt gefunden worden. Die Stromintensität, nach bekanntem absoluten Maasse bestimmt, war dabei von 16 bis 44 Einheiten gesteigert worden.

Dasselbe Instrument bot nun zugleich die Gelegenheit dar, das konstante Verhältniss selbst, welches zwischen der diamagnetischen Kraft und der sie erregenden galvanischen Kraft Statt findet, durch Messung genauer zu bestimmen. Dieses Verhältniss heisst die *diamagnetische Konstante,* und ist vom Professor Weber mit einem Instrumente, welches nach den nämlichen Principien konstruirt war, aber keine so feine mechanische Ausführung erhalten hatte, zum ersten Male in den Elektrodynamischen Maassbestimmungen (Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. I, Leipzig 1852)[1]) bestimmt worden. Eine Wiederholung dieser Messung mit einem feineren Messinstrumente schien daher von besonderem Interesse und ist gleichfalls von Herrn Dr. Christie ausgeführt worden.

Dieser Messung wurde dadurch eine besondere Schärfe gegeben, dass sie nicht auf eine Vergleichung des diamagnetischen Wismuths mit magnetischem Eisen gegründet wurde, welche, von anderen Umständen abgesehen, schon wegen der verschiedenen Vertheilung des Magnetismus im Eisen und des Diamagnetismus im Wismuth keiner grossen Schärfe fähig ist, sondern dass sie auf eine Vergleichung des diamagnetischen Wismuths mit einem *Solenoid* (einem spiralförmig gewundenen Leitungsdraht) gegründet wurde, durch welches ein schwacher mit der Tangenten-Boussole genau gemessener Strom hindurchging. Dieses Solenoid hatte eine cylindrische Form von demselben Durchmesser und derselben Höhe

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 473.]

wie der gebrauchte Wismuthcylinder. Aus der Zahl seiner Spiralwindungen und der Stärke des hindurchgehenden Stroms liess sich das Moment bestimmen, womit es von derselben Stelle aus wie der diamagnetische Wismuthcylinder auf die astatische Nadel wirkte; auch liess sich der Strom leicht so reguliren, dass diese Wirkung der des Wismuthcylinders nahe gleich war.

Aus diesen Messungen hat sich ergeben, dass die Einheit der erregenden Kraft (nach absolutem Maasse, wonach die horizontale erdmagnetische Kraft in Göttingen gegenwärtig = 1,81 ist) in 1 Milligramm Wismuth ein Moment erzeugt, welches nach dem Gauss'schen absoluten Maasse = 0,000 001 488 5 ist, während dasselbe Moment für Eisen vom Professor Weber = 5,6074 gefunden worden ist. Der Diamagnetismus des Wismuths ist hiernach also 3,8 Millionen Mal kleiner als der Magnetismus des Eisens. Dieses Resultat ist etwas kleiner als das von Weber gefundene, was sich, abgesehen von der grösseren Schärfe der Messung, welche das hier gebrauchte Instrument gestattet, aus der Verschiedenheit des Wismuths erklärt, welches in beiden Fällen nicht von absoluter Reinheit hatte erhalten werden können. — Um eine anschauliche Vorstellung von der Grösse dieser diamagnetischen Kräfte zu geben, möge bemerkt werden, dass 1 Milligramm Stahl von einer starken Magnetnadel im Durchschnitt ungefähr ein Moment = 400 nach demselben Maasse besitzt, welches 269 Millionen Mal grösser ist, als das eben angeführte Moment des Wismuths.

Endlich hat Herr Dr. Christie dasselbe Instrument drittens noch dazu benutzt, um die von Weber und Tyndall ausser Zweifel gesetzte Polarität diamagnetischer Körper durch ein genaueres Studium der *Vertheilung des Diamagnetismus* näher zu erforschen. Es hat sich ergeben, dass nach dem Princip der *idealen Vertheilung* von Gauss bei einem cylindrischen Wismuthstabe, in welchem überall gleiche erregende Kraft seiner Axe parallel wirkt, fast aller Diamagnetismus auf die beiden kreisförmigen Endflächen vertheilt gedacht werden kann, ein Resultat, welches ganz mit demjenigen, was nach der Theorie erwartet werden musste, in Uebereinstimmung steht.

Bei allen diesen mit dem erwähnten *Diamagnetometer* ausgeführten Versuchen war nur ein einziger Umstand im Dunkeln geblieben, nämlich woher es rühre, dass die *Empfindlichkeit* dieses Instruments so *veränderlich* sei, wofür nach der Theorie desselben, wenn bei der Konstruktion und Regulirung alle vorgeschriebenen Bedingungen genau erfüllt wären, gar kein Grund vorläge. Es leuchtet nun zwar ein, dass durch diese Konstruktion und Regulirung des Instruments eine Kompensation sehr grosser Kräfte, welche den Diamagnetismus erregten, so bewerkstelligt werden sollte, dass sie auf die äusserst empfindliche

astatische Magnetnadel gar keinen Einfluss ausübten; während die mit dem Instrumente alsdann zu messenden Kräfte, nämlich die diamagnetischen Kräfte selbst, dagegen sehr klein sind, wonach sich erwarten lässt, dass die geforderte Kompensation sich nicht ganz mit der erforderlichen Genauigkeit praktisch werde herstellen lassen. Genauer betrachtet zerfällt die Herstellung der geforderten Kompensation in zwei verschiedene Aufgaben, nämlich *erstens* in Beziehung auf die Gleichgewichtslage der astatischen Nadel, *zweitens* in Beziehung auf ihre Empfindlichkeit. In Beziehung auf die *erstere* war, nachdem beide Aufgaben näherungsweise gelöst waren, noch für eine *feinere Korrektion* gesorgt worden, ohne welche die astatische Nadel mit Fernrohr, Spiegel und Skale gar nicht hätte beobachtet werden können. In Beziehung auf die *Empfindlichkeit* wurde aber, um das Instrument nicht zu sehr zu kompliciren, auf eine feinere Korrektion verzichtet, da in der That der Mangel derselben den Messungen keinen wesentlichen Eintrag thut, wenn dabei nur die Variationen der Empfindlichkeit genau bestimmt und berücksichtigt werden. Da sich nun aber diese Variationen der Empfindlichkeit von einer unerwarteten Grösse und Wichtigkeit ergaben, so schien es doch nöthig, um alle wesentlichen Elemente bei diesen feinen Messungen vollkommen zu beherrschen, auch die Ursachen dieser Variationen genauer zu prüfen und zu erforschen. Diese feine Prüfung ist nun von Herrn Dr. Arndtsen mit dem besten Erfolge ausgeführt worden, und es hat sich daraus ergeben, wie diese Variationen beherrscht und, wenn es nöthig befunden würde, ganz beseitigt werden könnten. Bei der Genauigkeit aber, mit welcher diese Variationen in Rechnung gebracht werden können, ist in der Regel kein Grund vorhanden, sie zu vermeiden, vielmehr da man es ganz in der Gewalt hat, ob durch die Variation die Empfindlichkeit des Instruments gesteigert oder vermindert werden soll, kann man daraus oft Vortheil für die Messungen selbst ziehen. Da hier auf die Beschreibung des Instruments verzichtet werden muss, so kann auch auf diese die Theorie desselben betreffenden Versuche nicht näher eingegangen werden.

Dagegen verdient noch eine andere von Herrn Dr. Arndtsen mit demselben Instrumente gemachte Untersuchung einer Erwähnung. Es leuchtet nämlich von selbst ein, dass dasselbe Instrument, welches zur Erforschung der Polarität des diamagnetischen Wismuths dient, auch zur Erforschung der magnetischen Polarität solcher Körper, welche früher für unmagnetisch oder schwach magnetisch gehalten wurden, benutzt werden kann, um *quantitative* Bestimmungen zu gewinnen, an denen es für dieselben noch gänzlich fehlt. Insbesondere schien es von Wichtigkeit zu erforschen, ob bei diesen Körpern, ebenso wie Joule, Müller und Weber beim Eisen gefunden haben, bei wachsender magnetisiren-

der Kraft eine Abweichung des Magnetismus von der Proportionalität der magnetisirenden Kraft nachgewiesen werden könne, weil dieser Umstand für die Erforschung der inneren Ursachen des Magnetismus und seiner Variationen von grosser Bedeutung ist. Diese Versuche sind von Herrn Dr. Arndtsen mit *Eisenvitriol*, *Eisenchloridlösung*, *Cyan-Eisen-Kalium* und mit *Nickel* ausgeführt worden. Es ist dabei zu bemerken, dass die magnetisirende Kraft, welche auf diese Körper wirkte, und die nicht durch Elektromagnete, sondern durch blosse galvanische Ströme erzeugt wurde, mit den vorhandenen Mitteln nur bis zur Stärke = 600 nach absolutem Maasse (wonach die horizontale erdmagnetische Kraft jetzt in Göttingen = 1,81) gebracht werden konnte, während sie bei den von Weber mit Eisen ausgeführten Versuchen bis über 3000 getrieben worden war. Hierzu kommt noch, dass diese gemessene magnetisirende Kraft als eine *äussere* Kraft zu bezeichnen ist, und dass beim *reinen Eisen* auf die *einzelnen* Theilchen ausserdem noch eine bedeutende *innere*, von der magnetischen Wechselwirkung herrührende, Kraft mitwirkte, welche bei den oben genannten Körpern fast gänzlich verschwindet. Hiernach würde also zu erwarten sein, dass bei den genannten Körpern die fragliche Abweichung von der Proportionalität unter sonst gleichen Verhältnissen später als beim reinen Eisen wahrnehmbar würde, nämlich erst dann, wenn die *äussere* Kraft für sich allein ebenso stark wirkte, wie beim Eisen die *äussere* und *innere* Kraft zusammen genommen.

Unter diesen Verhältnissen ist nicht zu verwundern, dass bei mehreren der untersuchten Körper sich keine merkliche Abweichung von der Proportionalität ergeben hat; desto interessanter ist es aber, dass sich beim *Nickel* ergeben hat, dass diese Abweichung von der Proportionalität viel früher als beim Eisen hervortritt, so dass der *Nickelmagnetismus* in Folge magnetisirender Kräfte seinen höchsten Grenzwerth fast erreicht hat, bei welchen der Eisenmagnetismus fast noch gar nicht merklich von der anfänglichen Proportionalität abweicht.

Ausser diesen Versuchen hat Herr Dr. Arndtsen auch noch eine umfassende Untersuchung über den *Leitungswiderstand* der Metalle mit besonderer Rücksicht auf ihre *Temperatur* ausgeführt, wovon die folgende Tafel eine kurze Uebersicht der Resultate giebt. Unter der Ueberschrift *Widerstand* ist der Widerstand eines Cylinders von 1 Millimeter Höhe und 1 Millimeter Durchmesser bei 0° Temperatur nach absolutem Maasse angegeben; unter der Ueberschrift *Korrektion wegen der Temperatur* ist der Faktor angegeben, mit welchem der Widerstand bei 0° Temperatur multiplicirt werden muss, um den Widerstand bei t Grad der 100theiligen Skale zu erhalten.

Metall	Widerstand	Korrektion wegen der Temperatur
Silber	241190	$1 + 0{,}00341420 \, . \, t$
Kupfer	244370	$1 + 0{,}00394025 \, . \, t$
Aluminium No. 1	476218	$1 + 0{,}00340790 \, . \, t$
Aluminium No. 2	427616	$1 + 0{,}00363860 \, . \, t$
Messing	949086	$1 + 0{,}0016619 \, . \, t$
		$+ 0{,}000002734 \, . \, t^2$
Argentan	1289815	$1 + 0{,}00038736 \, . \, t$
		$+ 0{,}0000005578 \, . \, t^2$
Eisen	1626643	$1 + 0{,}0041304 \, . \, t$
		$+ 0{,}0000052713 \, . \, t^2$
Blei	2631490	$1 + 0{,}00376768 \, . \, t.$

Auch Herr Dr. Christie hat noch einige magnetische Beobachtungen und Versuche ausgeführt, die interessante Resultate ergeben haben. Von dem hiesigen Mechanikus Herrn Inspektor Meyerstein waren nämlich auf Bestellung des brasilianischen Gouvernements die Instrumente zu zwei vollständigen magnetischen Observatorien, für wissenschaftliche Expeditionen, verfertigt worden, deren Prüfung Herr Dr. Christie übernommen hatte. Die Einrichtung der dazu gehörigen transportablen Magnetometer, zur Messung der *Deklination* und *Intensität*, ist anderwärts ausführlich beschrieben. Blos die *Induktions-Magnetometer* zur Messung der *Inklination*, welche nach Angabe des Professor Weber in kleinerem Maassstabe ausgeführt worden waren, um sie auf der Reise brauchen zu können, dürften eine Erwähnung verdienen, da die von Herrn Dr. Christie ausgeführten Prüfungen ergeben haben, dass dadurch für die Messung der *Inklination* nicht blos in festen Observatorien, sondern auch auf der Reise gleiche Vortheile gewonnen werden, wie durch das andere Magnetometer für *Deklination* und *Intensität*. — Die mit diesen Induktions-Magnetometern angestellten Beobachtungen und Versuche haben nun ausserdem noch Veranlassung gegeben, dass Herr Dr. Christie die für die Messung der Intensität wichtige Veränderlichkeit des Nadelmagnetismus bei *normaler* und *transversaler* Lage der Nadel von Neuem zu bestimmen unternahm. Diese Bestimmung war nämlich vom Professor Weber, mit Hülfe der *magnetischen Induktion,* nur für kleinere Nadeln, in seiner Abhandlung im 6. Bande der Abhandlungen unserer Societät (Göttingen 1855)[1]) gemacht worden; es schien aber von Wichtigkeit, dass dieselbe Bestimmung gerade mit den beiden grösseren Nadeln wiederholt würde, mit welchen alle Messungen der Intensität nach absolutem Maasse im hiesigen magnetischen Observatorium seit 1834 ausgeführt worden sind. Diese Versuche haben zu den Resultaten geführt, welche in der letzten Kolumne unter der Ueber-

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. II, p. 333.]

schrift *Aenderung* angegeben sind. Es ist daselbst nämlich der Faktor angegeben, mit welchem die nach absolutem Maasse ausgedrückte magnetische Direktionskraft multiplicirt werden muss, um die von ihr hervorgebrachte Aenderung des magnetischen Moments der Nadel zu erhalten. Da nun beim Uebergange aus der *transversalen* Lage in die *normale* die horizontale erdmagnetische Kraft (gegenwärtig = 1,81) auf die Nadel zu wirken anfängt, so ergiebt sich, dass man die mit jenem Uebergange verbundene Zunahme des Nadelmagnetismus erhält, wenn man den in der letzten Kolumne angegebenen Faktor mit 1,81 multiplicirt.

Nadelnummer	Gewicht in Gramm	Magnetisches Moment	Aenderung
1.	1770	$714 . 10^6$	450000
2.	1750	$674 . 10^6$	462000.

II.

Sitzung am 2. November.

Herr Professor Weber las: *Ueber die beabsichtigte Einführung eines galvanischen Widerstands-Etalons oder Standards.*

[Nachrichten der G. A. Universität und der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, November 13. 1861, No. 17, p. 263—273.]

Ich erlaube mir, der Königl. Societät eine kurze Mittheilung in Betreff der beabsichtigten Einführung eines galvanischen Widerstands-Etalons oder Standards zu machen. Es ist der Vorschlag dazu von Gründen des praktischen Bedürfnisses ausgegangen, was bei den sich immer weiter ausdehnenden technischen Anwendungen des Galvanismus wohl erwartet werden konnte. Alle galvanischen, zu chemischen Analysen, galvanoplastischen und anderen technischen Zwecken gebrauchten *Säulen* sind, wenn sie auch konstante genannt werden, fortwährend kleineren und oft auch grösseren Aenderungen unterworfen, die man kennen muss, um sie zu beherrschen. Wenn aber auch diese Säulen ganz unveränderlich wären, würde doch ihre *Wirkung* bald grösser bald kleiner sein, nach Verschiedenheit der Anwendungen, die von ihnen gemacht werden. Diese *Wirkungen* zu beherrschen fordert daher nicht blos eine Kenntniss der Säule selbst, sondern auch aller Körper, durch welche der Strom der Säule gehen soll, und zwar die Kenntniss ihres *Widerstands*. Darum sind die Widerstandsmessungen unentbehrlich geworden und zwar hat sich das Bedürfniss derselben am dringendsten für den telegraphischen Gebrauch herausgestellt.

Zu Widerstandsmessungen ist aber ein *Widerstandsmaass* erforderlich. Ohne solches Maass können die Körper, durch welche der Strom geführt werden soll, nur beschrieben werden, während nach festgesetztem Widerstandsmaasse eine *Zahl* genügt, um alles Wesentliche dadurch auszudrücken, und zwar viel genauer als durch alle Beschreibungen möglich ist, da sehr grosse Verschiedenheiten der Widerstände auch dann noch Statt finden können, wenn die Beschreibungen der Körper ganz mit einander übereinstimmen.

Im Grunde ist ein solches Maass auch schon frühzeitig in Anwendung gebracht worden, indem man die verschiedenen Körper, durch welche Ströme geleitet werden sollten, um Beschreibungen zu vermeiden, mit Kupferdrähten verglich, deren Länge und Querschnitt gemessen wurden. Es leuchtet ein, dass dabei, wenn auch nur stillschweigend, der Widerstand eines Kupferdrahts, welcher das Längenmaass zur Länge und das Flächenmaass zum Querschnitt hat, als *Widerstandsmaass* zum Grunde lag. Doch ist die ausdrückliche Feststellung eines bestimmten Widerstandsmaasses zuerst von Jacobi in Petersburg 1846 zur Sprache gebracht worden.

Jacobi sagt darüber selbst: „Nicht minder wichtig, als die Absolutheit der Strommessungen, ist es, wenn die Physiker die Grösse der Leitungswiderstände, die sie messen, durch eine gemeinschaftliche Einheit ausdrücken. Hier aber kann keine absolute Bestimmung Statt finden, weil es scheint, dass bei den Widerständen auch der chemisch reinsten Metalle Unterschiede Statt finden, welche durch eine Verschiedenheit der Dimensionen allein nicht erklärt werden können. Gesetzt also, Sie hätten Ihre Widerstandsmesser und Multiplikatoren auf Kupferdraht von 1 Meter Länge und 1 Millimeter Dicke bezogen, so hätten wir immer noch nicht die Ueberzeugung, ob Ihr Kupferdraht und der unsrige einen gleichen Widerstands-Coefficienten besitzen. Alle diese Schwierigkeiten nun werden gehoben, wenn man einen beliebig gewählten Kupfer- oder andern Draht bei den Physikern umher wandern lässt und diese bittet, ihre Widerstands-Messinstrumente darauf zu beziehen und ihre Messungen künftig nur nach diesem Maasse anzugeben“. Von einem solchen von Jacobi beliebig gewählten Widerstands-Etalon (ein Kupferdraht von 25 englischen Fuss Länge und $22\frac{3375}{10000}$ Gramm Gewicht) sind wirklich eine Menge Kopien gemacht und zu Widerstandsmessungen benutzt worden. Sei es aber, dass auf die Anfertigung dieser Kopien nicht die nöthige Sorgfalt verwendet worden, ungeachtet in der Wheatstone'schen Waage das feinste Vergleichungsmittel gegeben war, oder sei es, dass diese Widerstands-Etalons eine Veränderung mit der Zeit erlitten haben, es haben sich zwischen denselben später sehr bedeutende Differenzen herausgestellt.

Daher hat Siemens in Berlin im Jahre 1860, mit besonderer Berücksichtigung der immer dringender werdenden Bedürfnisse der technischen Physik, und durch mancherlei gegen den Jacobi'schen Widerstands-Etalon erhobene Bedenken geleitet, ein allen Anforderungen genügendes, namentlich von Jedermann mit Leichtigkeit und in der nöthigen Genauigkeit darstellbares neues Widerstandsmaass aufzustellen gesucht, was auf Benutzung des Widerstands des *Quecksilbers* beruht, als desjenigen Metalls, welches überall mit grosser Leichtigkeit, in aus-

reichender, fast vollkommener Reinheit zu beziehen oder herzustellen ist, und, so lange es flüssig ist, keine verschiedene seine Leitungsfähigkeit modificirende Molekular-Beschaffenheit besitzt, auch in seinem Widerstande von Temperaturveränderungen weniger abhängig ist als andere Metalle, und endlich durch die Grösse seines specifischen Widerstands besondere Bequemlichkeit für die Anwendung bietet.

Mit der Feststellung dieses neuen Widerstandsmaasses hat Siemens zugleich auch die Darstellung von *Widerstandsskalen*, als nothwendigen und unentbehrlichen Vermittlern zwischen dem Maasse und den zu messenden Gegenständen verbunden und hat dieselben in grosser Anzahl und Vollkommenheit so konstruirt, dass mit grösster Leichtigkeit alle Widerstände gebildet werden können, welche nach seinem Maasse durch ganze Zahlen von 1 bis 10000 ausdrückbar sind.

Endlich wird gegenwärtig auch in England die Aufstellung eines bestimmten Widerstandsmaasses beabsichtigt und man hofft den Zweck am besten zu erreichen, wenn von der British Association und Royal Society geeignete Maassregeln ergriffen würden, um jeden Experimentator in der ganzen Welt, insbesondere auch Alle, welche sich mit den die elektrischen Telegraphen betreffenden Untersuchungen und Prüfungen beschäftigen, auf ihr Verlangen mit einem Widerstands-Standard zu versehen, der nicht blos für eine bestimmte Temperatur gilt, sondern auch mit einer genauen Angabe seiner Variation für eine bestimmte Temperaturveränderung versehen ist, so wie endlich auch, um seine galvanische Bedeutung festzustellen, *mit einer genauen Angabe der Kraft, welche erforderlich ist, um einen bestimmten Strom darin zu erregen.* — Ich verdanke diese Mittheilung unserem Korrespondenten, dem Professor W. Thomson in Glasgow, einem der gründlichsten Forscher im Gebiete der Elektricitätslehre.

Mit genaueren Maassbestimmungen zu diesem letzteren Zwecke habe ich mich nun vor längerer Zeit beschäftigt, und zwar unter dem Titel der *absoluten Widerstandsmessungen.* Die galvanische Bedeutung des Jacobi'schen Widerstands-Etalons z. B. habe ich durch die Angabe bestimmt, dass, um einen Strom von der nach Gauss festgesetzten Intensitätseinheit darin zu erregen, eine elektromotorische Kraft von 5980 Millionen erforderlich sei.[1]) Eine ähnliche Bestimmung von einer anderen kupfernen Kette habe ich der Königl. Societät im Jahre 1853 vorgelegt.[2]) Es hatte sich jedoch bei diesen bisherigen Bestimmungen mehr um die

[1]) Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, I, S. 252. [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 351.]

[2]) Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 5. Bd. [Wilhelm Weber's Werke, Bd. II, p. 277.]

Methode und um die Bedeutung der damit zu gewinnenden Resultate gehandelt, als um die quantitative Ausführung, die nur als Probe mit den zu anderen Untersuchungen vorhandenen Hülfsmitteln und Instrumenten bewerkstelligt wurden.

Sollten nun aber diese absoluten Widerstandsmessungen weitere Anwendung finden, nämlich um allen quantitativen Resultaten wichtiger galvanischer Beobachtungen und Forschungen einen *bleibenden* Ausdruck zu geben, so würde ein ähnlicher Fall eintreten wie bei der Messung der Sekundenpendellänge und anderen Fundamentalbestimmungen: es würde das Bedürfniss eintreten, eine absolute Widerstandsmessung nach den strengsten Vorschriften, mit den vollkommensten Instrumenten und mit allen Kunstgriffen feinster Beobachtung auszuführen. Es ist dies eine Aufgabe, welche sich nur von sehr geschickten Händen, bei ungestörtester Musse und mit festeren Einrichtungen, als es jetzt für physikalische Forschungen giebt, lösen liesse. Wenn aber die British Association und Royal Society die Aufgabe wirklich in die Hand nehmen, wird gewiss alles Erforderliche irgendwo dazu besonders beschafft werden.

Dieser feinsten Ausführung einer absoluten Widerstandsmessung sind aber noch mancherlei Untersuchungen vorauszuschicken, von denen ich hier einige vorlege.

Man unterscheidet *Galvanometer* und *Galvanoskope*. Jene, zu denen die Tangenten-Boussolen gehören, dienen nur für stärkere Ströme, deren Intensität aber damit nach genau bestimmtem Maasse ausgedrückt erhalten wird; diese dagegen dienen zur Beobachtung der geringsten Spuren von Strömen, von denen sonst nichts wahrgenommen werden kann. Die höchste Empfindlichkeit der letzteren wird aber nur durch engste Umschliessung der Nadel mit ihrem Multiplikator erreicht, wodurch die genauere Kenntniss des Maassstabes verloren geht, die sich bei der Tangenten-Boussole aus ihrer Konstruktion von selbst ergab. Um dennoch ein solches Galvanoskop zu wirklichen Messungen zu gebrauchen, bedarf es ausser der Beobachtung des vom Strome hervorgebrachten Ausschlags noch irgend einer Beobachtung als Maassstab für die Empfindlichkeit des Instruments. In der Regel sucht man diesen Maassstab ein für alle Mal festzusetzen durch vorausgeschickte korrespondirende Beobachtungen am Galvanometer und Galvanoskope. Abgesehen aber davon, dass solche korrespondirende Beobachtungen, wegen der so sehr verschiedenen Empfindlichkeit beider Instrumente kein genaues Resultat ergeben, ist jener Maassstab für sehr empfindliche Galvanoskope keineswegs konstant und kann daher gar nicht vorausbestimmt werden. Dagegen lässt sich mit der Beobachtung des Ausschlags eine andere Beobachtung, nämlich die der Schwingungs-Dämpfung, welche jenen Maassstab unmittelbar giebt, verbinden.

Auf dieser Verbindung beruht die Möglichkeit, die empfindlichsten Galvanoskope zu den genauesten Messungen zu gebrauchen, was die nothwendige Bedingung für die Ausführung absoluter Widerstandsmessung bildet. Die Theorie solcher zu genauen Messungen geeigneter Galvanoskope bedarf aber eine besondere Entwicklung, da sie eine von gewöhnlichen Galvanoskopen ganz abweichende Konstruktion erhalten müssen. Die Entwicklung dieser Theorie bietet besonderes Interesse noch dadurch, dass der Anwendung der Galvanoskope auch zu vielen anderen feineren Untersuchungen, wo sie bisher unbrauchbar waren, der Weg geöffnet wird.

Durch die Konstruktion des Galvanoskops muss es nämlich möglich gemacht werden, Ausschlag und Dämpfung gleichzeitig mit grösster Genauigkeit zu beobachten, während bei gewöhnlichen Galvanoskopen blos die Vergrösserung des Ausschlags massgebend für die Konstruktion war. Was aber den Ausschlag vergrössert, verstärkt nicht immer die Dämpfung und umgekehrt. Dazu kommt, dass es ein Ausschlags-Maximum giebt, was nicht überschritten werden darf, und dass es eine bestimmte Dämpfungsstärke giebt, welche der feinsten Bestimmung fähig ist, nämlich diejenige Dämpfungsstärke, bei welcher zwei aufeinander folgende Schwingungsbogen der Galvanometernadel sich verhalten wie 2.7182..:1.

Es ergeben sich daraus in der Theorie der zu genauen Messungen geeigneten Magnetoskope mehrere interessante Aufgaben, die ich hier nicht näher erörtere. Ich bemerke nur, dass die abweichende Konstruktion solcher Galvanoskope von den gewöhnlichen hauptsächlich auf der Nothwendigkeit starker Magnete als Galvanoskop-Nadeln, um der Dämpfung willen, beruht, wozu noch, für den Zweck der absoluten Widerstandsmessung, die Nothwendigkeit einer längeren Schwingungsdauer und eines wenig veränderlichen Ruhestands der Galvanoskop-Nadel hinzukommt. Die beiden letzten Forderungen führen zur Anwendung zweier gleich starker zu einem astatischen System verbundener Magnete und deren Aufhängung an einem Metalldrahte, durch dessen Stärke die Schwingungsdauer regulirt werden kann. In der Anwendung des astatischen Systems gleicht also dies Magnetoskop dem gewöhnlichen, nur mit dem Unterschiede, dass, was hier mit sehr kleinen Nadeln geschieht, dort mit grösseren und viel stärkeren Nadeln ausgeführt werden muss.

Auf Grund dieser zu Maassbestimmungen eingerichteten *Galvanoskope* sind endlich Probeversuche gemacht worden, um die äusserste Grenze der in absoluten Widerstandsmessungen erreichbaren Sicherheit experimentell festzustellen, deren Resultat sich folgendermassen aussprechen lässt.

Die absolute Widerstandsmessung setzt die Kenntniss der Intensität des Erdmagnetismus nach absolutem Maasse an dem Orte und zur Zeit der absoluten Widerstandsmessung voraus, welche um so genauer gegeben sein muss, als sich der Einfluss eines Fehlers dieser Intensität in der Widerstandsmessung verdoppelt. Auf Erörterung der für die Intensität des Erdmagnetismus erreichbaren Sicherheit braucht nicht eingegangen zu werden, weil dies von Gauss in der „Intensitas“ [1]) geschehen ist, wonach diese Messungen zu den Fundamentalbestimmungen in diesem Gebiete der Physik gehören. Unterscheidet man nun bei der absoluten Widerstandsmessung den von der Messung des Erdmagnetismus und den von der übrigen Messung herrührenden wahrscheinlichen Fehler, so kann es immer dahin gebracht werden, dass der letztere, wenn nicht kleiner, doch keinesfalls grösser als der erstere ist. Mehr aber zu leisten, sieht man leicht ein, würde bei der Abhängigkeit aller Beobachtungen in diesem Gebiete vom Erdmagnetismus, dessen Einflusse alle Nadeln und Ströme unterworfen sind, keinen wesentlichen Zweck haben.

Ich schliesse mit einer Bemerkung, zu der das Ergebniss der absoluten Bestimmung der Siemens'schen Widerstandsskale Veranlassung gegeben.

Wie durch das Verhältniss einer Weglänge zu einer Zeit, eben so ist nach galvanischen Principien durch das Verhältniss einer elektromotorischen Kraft zu einer Stromintensität eine *Geschwindigkeit* bestimmt. Das Verhältniss der Kraft, welche erforderlich ist, um einen bestimmten Strom in einer gegebenen Kette zu erregen, zur Intensität dieses Stroms ist also auch durch eine *Geschwindigkeit* bestimmt, welche, da nach den Ohm'schen Gesetzen das Verhältniss jener Kraft zu dieser Stromintensität für eine *gegebene Kette* konstant ist, unmittelbar die Kraft angiebt, welche erforderlich ist, um einen Strom von der Intensität = 1 in der gegebenen Kette zu erregen.

Die Bestimmung dieser *Geschwindigkeit,* in welcher also die absolute Widerstandsmessung besteht, lässt sich nun darauf bauen, dass man diese Geschwindigkeit selbst physisch darstellt, was mit Hülfe des von mir in den „Resultaten und den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837“ [2]) beschriebenen Induktions-Inklinatoriums geschehen kann. Da aber die direkte Messung einer solchen wirklich dargestellten Geschwindigkeit grosse Schwierigkeiten findet, so zieht man eine indirekte Messungsmethode, wie die, auf welche sich die obigen Erörterungen beziehen, vor, wodurch zugleich die wirkliche physische Dar-

[1]) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 79.]

[2]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. II, p. 75.]

stellung jener Geschwindigkeit entbehrlich gemacht wird, was für die Sache ohne Bedeutung ist, wonach aber das gefundene Resultat doch immer eine Geschwindigkeit ist.

Das oben erwähnte Resultat der absoluten Widerstandsmessung des Jacobi'schen Widerstands-Etalons war also eine bestimmte *Geschwindigkeit*, wobei nach Gauss Millimeter als Längenmaass, und Sekunde als Zeitmaass zum Grunde lag. Es kann die Zugrundelegung dieser Maasse dadurch ausgedrückt werden, dass man der dort angegebenen Zahl 5 980 000 000 die Bezeichnung Millimeter/(Sekunde) beifügt, was gleichbedeutend ist mit 5 980 000 Meter/(Sekunde).

Ebenso ist nun auch das Resultat der absoluten Widerstandsmessung für die Einheit der Siemens'schen Widerstandsskale in einer bestimmten *Geschwindigkeit* ausgedrückt erhalten worden, und zwar ist die Zahl der Meter, welche mit einer Sekunde zu dividiren ist, nahe 10 Millionen, d. i. der Länge des *Erdquadranten* gleich gefunden worden.

Ist es nun auch an sich gleichgültig, wie gross oder klein ein Widerstands-Standard gewählt wird, so leuchtet doch ein, dass wenn, nach dem der British Association und Royal Society gemachten Vorschlage, diesem Standard, um seine galvanische Bedeutung festzustellen, immer die genaue Angabe der Kraft, welche erforderlich ist, um einen bestimmten Strom darin zu erregen, beigefügt werden soll, es sehr zweckmässig erscheine, die sonst ganz beliebige Wahl so einzurichten, dass diese beizufügende Angabe sich durch die blosse Bezeichnung Erdquadrant/(Sekunde) kurz und bündig fassen lasse. — Dass nach Siemens alsdann ein diesem Standard sehr nahe gleicher Widerstand sich unter allen Verhältnissen leicht und sicher durch eine Quecksilbersäule von 1 Quadratmillimeter Querschnitt und 1 Meter Länge herstellen lasse, würde dabei oft unter Verhältnissen, wo der wahre Standard nicht zur Hand wäre, praktisch nützlich werden können.

Zur

Galvanometrie

von

Wilhelm Weber.

Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften am 4. Januar 1862 vorgelegt.

Mit einer Tafel.

[Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematische Klasse, Bd. 10, Göttingen 1862, p. 3—96.]

III.

Bei den sich immer weiter ausdehnenden technischen Anwendungen des Galvanismus sind, um mannigfaltigen, dadurch hervorgerufenen Bedürfnissen zu genügen, schon verschiedene Vorschläge zur Einführung *galvanischer Widerstandsmaasse* (Etalons oder Standards) gemacht worden, und es dürfte den von Sachverständigen darauf gerichteten ernstlichen Bestrebungen wohl gelingen, die jenem Zwecke in weitestem Umfange und vollkommenster Weise entsprechenden Maassregeln nicht blos ausfindig zu machen und allseitig fest zu begründen, sondern sie auch zu baldiger praktisch erfolgreicher Ausführung zu bringen.

Alle zu chemischen Analysen, galvanoplastischen, telegraphischen und anderen technischen Zwecken gebrauchten *galvanischen Säulen* sind, wenn sie auch konstant genannt werden, fortwährend kleineren und oft auch grösseren Aenderungen unterworfen, die man näher kennen lernen muss, um sie zu beherrschen. Wenn aber auch diese Säulen ganz unveränderlich wären, würden doch ihre *Wirkungen* bald grösser bald kleiner sein, nach Verschiedenheit der Anwendungen, die von ihnen gemacht werden. Diese *Wirkungen* zu beherrschen fordert daher nicht blos eine Kenntniss der Säule selbst, sondern auch aller Körper, durch welche der Strom der Säule gehen soll, und zwar die Kenntniss ihres *Widerstands*. Darum sind die *Widerstandsmessungen* für alle praktischen Anwendungen unentbehrlich geworden, insbesondere für die Konstruktion und Prüfung elektrischer Telegraphen, zumal bei ihrer wachsenden Ausdehnung und Verwicklung der Verhältnisse.

Zu den Widerstandsmessungen ist aber ein *Widerstandsmaass* erforderlich. Ohne Messung mit solchem Maasse können zwar die Körper, durch welche der Strom geführt werden soll, in verschiedener Weise beschrieben werden; nach einer mit solchem Maasse gemachten Messung aber genügt schon *eine einzige Zahl*, um alles Wesentliche vollständiger und genauer auszudrücken, als durch alle Beschreibungen möglich ist. Denn es treten oft durch die Widerstandsmessungen Verschiedenheiten und Aenderungen der Körper hervor, welche auch aus ihrer genauesten Beschreibung nicht erkannt werden können.

Im Grunde ist ein solches *Maass* auch schon frühzeitig in Anwendung gebracht worden, indem man die verschiedenen Körper, durch welche Ströme geleitet werden sollten, mit Kupferdrähten verglich, deren Länge und Querschnitt gemessen wurden. Es leuchtet nämlich ein, dass dabei, wenn auch nur stillschweigend, der Widerstand eines Kupferdrahts von einer dem Längenmaasse gleichen Länge und von einem dem Flächenmaasse gleichen Querschnitt als *Widerstandsmaass* zum Grunde lag. Doch ist die ausdrückliche Feststellung eines bestimmten Widerstandsmaasses zuerst von Jacobi in Petersburg im Jahre 1846 zur Sprache gebracht worden.

Jacobi sagt darüber: „Nicht minder wichtig, als die Absolutheit der Strommessungen, ist es, dass die Physiker die Grösse der Leitungswiderstände durch eine gemeinschaftliche Einheit ausdrücken. Hier aber kann keine absolute Bestimmung Statt finden, weil es scheint, dass bei den Widerständen auch der chemisch reinsten Metalle Unterschiede Statt finden, welche durch eine Verschiedenheit der Dimensionen allein nicht erklärt werden können. — Alle diese Schwierigkeiten nun werden gehoben, wenn man einen beliebig gewählten Kupfer- oder anderen Draht bei den Physikern umher wandern lässt und diese bittet, ihre Widerstands-Messinstrumente darauf zu beziehen und ihre Messungen künftig nur nach diesem Maasse anzugeben.“ Von einem solchen von Jacobi gewählten *Widerstands-Etalon* (einem Kupferdrahte von 25 englischen Fuss Länge und 22337 $\frac{1}{2}$ Milligramm Gewicht) sind wirklich eine Menge von Kopien gemacht und zu Widerstandsmessungen benutzt worden. Sei es aber, dass auf die Anfertigung nicht die nöthige Sorgfalt verwendet worden, oder sei es, dass solche Widerstands-Etalons mit der Zeit Veränderungen erleiden, es haben sich zwischen diesen Kopien später sehr bedeutende Differenzen herausgestellt.

Daher hat Siemens in Berlin im Jahre 1860, mit besonderer Berücksichtigung der immer dringender werdenden Bedürfnisse der technischen Physik, ein allen Anforderungen genügendes, von Jedermann mit Leichtigkeit und in der nöthigen Genauigkeit darstellbares *neues Widerstandsmaass* aufzustellen versucht, was auf Benutzung des Widerstands des *Quecksilbers* beruht, als desjenigen Metalls, welches überall mit grosser Leichtigkeit in ausreichender, fast vollkommener Reinheit zu beziehen oder herzustellen ist, und, so lange es flüssig ist, keine andere seine Leitungsfähigkeit modificirende Molekular-Beschaffenheit annimmt, auch in seinem Widerstande von Temperaturänderungen weniger abhängig ist als andere Metalle, und endlich durch die Grösse seines specifischen Widerstands besondere Bequemlichkeit für die Anwendung bietet.

Mit der Aufstellung dieses neuen *Widerstandsmaasses* hat Siemens

zugleich auch die Darstellung von *Widerstandsskalen*, als nothwendigen und unentbehrlichen Vermittlern zwischen dem Maasse und den zu messenden Gegenständen, verbunden und hat dieselben in solcher Ausdehnung und Vollkommenheit konstruirt, dass mit der grössten Leichtigkeit und Genauigkeit alle Widerstände gebildet werden können, welche nach seinem Maasse durch ganze Zahlen von 1 bis 10 000 ausdrückbar sind.

Endlich wird gegenwärtig auch in England die Aufstellung eines bestimmten Widerstandsmaasses beabsichtigt und man hofft die allgemeine Verbreitung und Anwendung, so wie alle dadurch erreichbaren wissenschaftlichen und technischen Zwecke, durch Begründung einer Anstalt unter dem vereinten Schutze der British Association und der Royal Society sicher zu stellen, von welcher jeder Experimentator in der ganzen Welt auf sein Verlangen mit einem *Widerstands-Standard* versehen werden soll, welcher nicht blos für eine genau bestimmte Temperatur gilt, sondern auch mit einer Angabe seiner Variation für eine bestimmte Temperaturänderung versehen, und dessen *galvanische Bedeutung endlich durch eine genaue Angabe der Kraft, welche erforderlich ist, um einen bestimmten Strom darin zu erregen, festgestellt ist.*

Mit genaueren Maassbestimmungen zu diesem letzteren Zwecke, nämlich zur Erforschung der *galvanischen Bedeutung eines Leiters*, durch Bestimmung der zur Erzeugung eines bestimmten Stroms erforderlichen Kraft, habe ich mich nun vor längerer Zeit beschäftigt, und zwar unter dem Titel der *absoluten Widerstandsmessungen*. Es wurde hiernach z. B. die galvanische Bedeutung des Jacobi'schen Widerstands-Etalons durch die Angabe festgestellt, dass, um einen Strom von der nach Gauss festgesetzten Intensitätseinheit darin zu erregen, eine elektromotorische Kraft nach Gauss'schem Maasse von 5980 Millionen Einheiten erforderlich sei.[1]) Eine ähnliche Bestimmung von einer anderen Kupferkette habe ich der Königl. Gesellschaft im Jahre 1853 vorgelegt.[2]) Es hatte sich jedoch bei diesen bisherigen Bestimmungen mehr um die Methode und die Bedeutung der damit zu gewinnenden Resultate, als um äusserste Feinheit der quantitativen Ausführung gehandelt, die nur probeweise mit den zu anderen Zwecken vorhandenen Hülfsmitteln und Instrumenten bewerkstelligt worden war.

Sollen nun aber diese absoluten Widerstandsmessungen weitere Anwendung finden, sollen sie benutzt werden, um allen quantitativen Resultaten wichtiger galvanischer Beobachtungen und Forschungen einen

[1]) Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, I, S. 252. [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 351.]

[2]) Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 5. Bd. [Wilhelm Weber's Werke, Bd. II, p. 319.]

bleibenden Ausdruck zu geben, so tritt ein ähnlicher Fall wie bei anderen Fundamentalbestimmungen ein, es tritt nämlich das Bedürfniss hervor, wenigstens eine absolute Widerstandsmessung nach den strengsten Methoden, mit den vollkommensten Instrumenten und mit aller Kunst der feinsten Beobachtung auszuführen. Es ist dies eine Aufgabe, welche nur von sehr geschickten Händen, bei ungestörtester Musse und mit festeren Einrichtungen, als es jetzt für physikalische Forschungen giebt, vollkommen gelöst werden dürfte. Dass es nur einer solchen Messung bedarf, die aber mit grösster Feinheit ausgeführt werden muss, leuchtet leicht daraus ein, dass die Widerstände aller Körper mit dem Widerstande *eines einzigen Etalons* genau verglichen werden können, und dass es daher nur der genauen Kenntniss von dem *absoluten Werthe dieses einzigen Etalon-Widerstands* bedarf, um die Vortheile aller durch absolute Werthe gegebenen Beziehungen allgemein auf alle Körper zu übertragen.

Abgesehen von diesen Vortheilen, welche die Kenntniss des absoluten Werths eines solchen Etalon-Widerstands gewähren kann, bietet aber die Aufgabe dieser Messung an sich auch Interesse, wegen des Einflusses, welchen sie auf die Entwicklung der Wissenschaft gewinnt. Die Entwicklung fast der ganzen *Galvanometrie* lässt sich an diese Aufgabe knüpfen, und alle Fortschritte der Galvanometrie lassen sich an der Lösung dieser Aufgabe erproben. Ist einmal, nach Erlangung der Einsicht in die Möglichkeit der Lösung, das zu erreichende Ziel bestimmt bezeichnet, so ist jede vollkommenere Lösung als Beweis von den Fortschritten der Galvanometrie fast wichtiger als durch ihren eigenen unmittelbaren Nutzen.

Durch feinere Ausbildung der absoluten Widerstandsmessung werden nicht blos wesentliche Lücken der Galvanometrie ausgefüllt, sondern auch viele zerstreute Untersuchungen in einen engeren Zusammenhang gebracht. Umgekehrt würde, wenn auf anderem Wege eine höhere Ausbildung der Galvanometrie erreicht werden sollte, die feinere Ausführung der absoluten Widerstandsmessung die Folge davon sein. Es sollen nun hier einige solche, der feineren Ausführung der absoluten Widerstandsmessung dienende *galvanometrische Untersuchungen* näher betrachtet werden.

Man unterscheidet *Galvanometer* und *Galvanoskope*. Jene, zu denen die Tangenten-Boussolen gehören, dienen nur für stärkere Ströme, deren Intensität aber damit nach genau bekanntem absoluten Maasse ausgedrückt erhalten wird; diese dagegen dienen zur Beobachtung der geringsten Spuren von Strömen, von denen sonst nichts wahrgenommen werden kann. Die grosse Empfindlichkeit der letzteren wird aber nur durch sehr enge Umschliessung der Nadel von ihrem Multiplikator er-

reicht, wodurch die genauere Kenntniss des Maassstabs verloren geht, die sich bei der Tangenten-Boussole aus der Konstruktion von selbst ergiebt. Um dennoch ein solches Galvanoskop zu Messungen zu gebrauchen, bedarf es daher ausser der Beobachtung des vom Strome hervorgebrachten Ausschlags noch irgend einer Beobachtung als Maassstab für die Empfindlichkeit des Instruments. In der Regel sucht man diesen Maassstab ein für alle Mal festzusetzen, durch vorausgeschickte korrespondirende Beobachtungen am Galvanometer und Galvanoskope. Abgesehen aber davon, dass solche korrespondirende Beobachtungen, wegen der so sehr verschiedenen Empfindlichkeit beider Instrumente, kein genaues Resultat ergeben, ist der Maassstab der Empfindlichkeit für sehr empfindliche Galvanoskope in der Regel gar nicht konstant, und kann daher gar nicht vorausbestimmt werden. Dagegen lässt sich mit der Beobachtung des *Ausschlags* eine andere Beobachtung, nämlich die der *Schwingungsdämpfung* verbinden, welche jenen Maassstab unmittelbar giebt.

Auf dieser Verbindung beruht die Möglichkeit, die empfindlichsten Galvanoskope zu den genauesten Messungen zu gebrauchen, was die nothwendige Bedingung für die Ausfühung absoluter Widerstandsmessung bildet. Galvanoskope zu diesem Gebrauche bedürfen aber einer von gewöhnlichen Galvanoskopen abweichenden Konstruktion, deren Theorie besonders zu entwickeln ist. Diese Entwicklung bietet noch ausserdem Interesse, weil dadurch der Anwendung der empfindlichsten Galvanoskope zu vielen anderen feinen Untersuchungen der Weg gebahnt wird.

Der vorliegende Zweck fordert demnach eine solche Konstruktion, welche gestattet, *Ausschlag* und *Dämpfung* zugleich mit grösster Genauigkeit zu beobachten, während bei gewöhnlichen Galvanoskopen blos die feinste Beobachtung des Ausschlags maassgebend für die Konstruktion war. Was aber den Ausschlag vergrössert, verstärkt nicht immer die Dämpfung und umgekehrt. Dazu kommt, dass Ausschlag und Dämpfung auch nicht gewisse Grenzen überschreiten dürfen, wenn sie der feinsten Bestimmung fähig sein sollen. Die Rücksicht auf die Dämpfung ist es nun, welche insbesondere die Anwendung starker Magnete als Galvanoskopnadeln fordert, wozu dann noch das Bedürfniss einer längeren Schwingungsdauer und eines wenig veränderlichen Ruhestands der Galvanoskopnadel hinzukommt. Es wird dadurch die Anwendung eines *astatischen*, von zwei starken Magneten gebildeten Systems begründet, dessen Schwingungsdauer durch Länge und Stärke des zur Aufhängung dienenden Metalldrahts regulirt wird.

Die absolute Messung eines *Etalon-Widerstands* hängt nun aber nicht blos von der Genauigkeit der *galvanometrischen Messungen* ab, sondern ausserdem noch von der Genauigkeit unserer Kenntniss des

Erdmagnetismus nach absolutem Werthe am Orte und zu der Zeit jener galvanometrischen Messungen. Das höchste Ziel der galvanometrischen Messungen besteht daher darin, dass die unvermeidliche, aus der Bestimmung des Erdmagnetismus herrührende, Unsicherheit im *absoluten Werthe des Etalon-Widerstands* durch die galvanometrische Messung nicht merklich vergrössert werde. Darzulegen und zu prüfen, wie dieses Ziel zu erreichen sei, ist der Hauptzweck dieser Abhandlung, woran noch einige Erörterungen über die *Kopirung* von Widerstands-Etalons und andere die Feststellung und Bedeutung des Widerstands-Etalons betreffende Fragen werden geknüpft werden.

I. *Die Methode der absoluten Widerstandsmessung.*

1.

Verhältniss einer elektromotorischen Kraft zu einer Stromintensität.

Ein galvanischer Strom i, welcher mit seinem ponderablen Träger gegen einen Leiter mit der Geschwindigkeit v bewegt wird, übt nach dem von Faraday entdeckten Induktionsgesetze eine *elektromotorische Kraft* e auf den Leiter aus, welche sowohl mit der Intensität des inducirenden Stroms i als auch mit der Geschwindigkeit der inducirenden Bewegung v proportional ist. Das Verhältniss dieser elektromotorischen Kraft zu dem Produkt aus der Intensität des inducirenden Stroms in die Geschwindigkeit der inducirenden Bewegung, e/iv, hat also einen von der Intensität i sowohl als auch von der Geschwindigkeit v unabhängigen Werth, und zwar wird dieser Werth aus geometrisch gegebenen Verhältnissen des Stromträgers und des Leiters zu einander als ein *reiner Zahlenwerth* bestimmt, d. h. unabhängig von dem zu den geometrischen Abmessungen gebrauchten Raummaasse, so wie auch von den Maassen der elektromotorischen Kräfte, Stromintensitäten und Geschwindigkeiten. Betrachtet man nämlich von dem inducirenden Strome i ein einziges Längenelement α, welches mit der Geschwindigkeit v gegen das Längenelement des Leiters α' bewegt wird, in dem Augenblicke, wo die Entfernung beider Elemente von einander $= r$ ist, und bezeichnet man die vier Winkel, welche von den Richtungen der beiden Elemente, $[\alpha]$, $[\alpha']$, von der Richtung ihrer Verbindungslinie $[r]$ und von der Bewegungsrichtung des Stromelements $[v]$ gebildet werden, mit $\vartheta = [r, \alpha]$, $\vartheta' = [r, v]$, $\varepsilon = [\alpha, v]$, $\varphi = [r, \alpha']$, so ist nach dem bekannten, für die Volta-Induktion geltenden, Gesetze die elektromotorische Kraft e, welche von dem Elemente α des inducirenden Stroms i auf das inducirte Element α' ausgeübt wird,

$$e = iv \cdot \frac{aa'}{r^2}(3\cos\vartheta\cos\vartheta' - 2\cos\varepsilon)\cos\varphi,$$

oder es ist das Verhältniss

$$\frac{e}{iv} = \frac{aa'}{r^2}(3\cos\vartheta\cos\vartheta' - 2\cos\varepsilon)\cos\varphi,$$

dessen Werth hiernach in einer *reinen Zahl* ausgedrückt erhalten wird, da die Verhältnisse zweier Linien a/r und a'/r sowohl wie die Kosinus der Winkel reine Zahlen sind.

Nennt man nun diejenigen Verhältnisse des Stromträgers und Leiters zu einander, unter welchen diese Zahl = 1 ist, die *Normalverhältnisse*, so ergiebt sich, dass unter diesen Normalverhältnissen das Verhältniss der elektromotorischen Kraft zur Stromintensität, e/i, der Geschwindigkeit v, mit welcher der Stromträger bewegt wird, gleich ist, oder dass

$$\frac{e}{i} = v.$$

Im Allgemeinen ersieht man hieraus, dass der Quotient irgend einer elektromotorischen Kraft dividirt durch irgend eine Stromintensität irgend einer Geschwindigkeit gleich ist, was durch den Satz ausgedrückt wird: *eine elektromotorische Kraft verhält sich zu einer Stromintensität wie eine Weglänge zu einer Zeit.*

Derselbe Satz ergiebt sich auch unmittelbar aus den Begriffen, welche in der Lehre vom Galvanismus mit *elektromotorischen Kräften* e und *Stromintensitäten* i verbunden werden.

Bezeichnet nämlich ε die Menge positiver oder negativer Elektricität in der Längeneinheit des Stromleiters nach elektrostatischem Maasse (in Theilen derjenigen Menge, welche auf eine gleiche Menge in der Einheit der Entfernung eine Kraft ausübt, die der ponderablen Masseneinheit in der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit ertheilen würde), und u die Geschwindigkeit, mit welcher die Elektricität im Leiter sich bewegt, so ist i proportional mit εu und wird daraus durch Multiplikation mit dem Faktor $[1/c] . \sqrt{8}$ erhalten, worin c eine aus dem Grundgesetz der elektrischen Wirkung bekannte *konstante Geschwindigkeit* bezeichnet, die im 5. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaften der Wissenschaften[1]) S. 264 = 439450 . 10^6 Millimeter/(Sekunde) gefunden worden ist.

Bezeichnet ferner f den Unterschied der Kraft, welche auf die im inducirten Leiter enthaltene positive Elektricität nach der Richtung des Leiters wirkt, von der Kraft, welche auf die darin enthaltene negative Elektricität wirkt, ausgedrückt in Theilen derjenigen Kraft,

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 652.]

welche der ponderablen Masseneinheit in der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit ertheilen würde, so ist die auf den inducirten Leiter wirkende elektromotorische Kraft e proportional mit f und wird daraus durch Multiplikation mit dem Faktor $[c/\varepsilon].\sqrt{\frac{1}{8}}$ erhalten.

Es sind diese Bedeutungen von i und e dieselben, wonach ein Strom von der Intensität $= 1$, wenn er um die Flächeneinheit herum geht, gleiche Wirkungen mit der Einheit des magnetischen Moments ausübt, und wonach ferner die Einheit der magnetischen Kraft auf einen geschlossenen Leiter, während derselbe so gedreht wird, dass die Projektion der von ihm umschlossenen Fläche auf die gegen die Richtung der magnetischen Kraft senkrechte Ebene gleichförmig in der Zeiteinheit um die Flächeneinheit wächst, die Einheit der elektromotorischen Kraft ausübt. Diese Bedeutungen von i und e sind ihrer Beziehung zum Magnetismus wegen allen *absoluten Messungen* zu Grunde zu legen.

Nach diesen auch den absoluten Widerstandsmessungen zu Grunde zu legenden Bedeutungen von e und i ergiebt sich das Verhältniss

$$\frac{e}{i} = \frac{\frac{fc}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{8}}}{\frac{\varepsilon u}{c}\sqrt{8}} = \frac{c^2}{8u} \cdot \frac{f}{\varepsilon^2}.$$

Bezeichnet man die elektrostatische Kraft, welche die in einem Stücke x des Leiters enthaltene Menge positiver oder negativer Elektricität, $= \varepsilon x$, auf eine gleiche Menge in der Entfernung x ausübt, mit f', so ist bekanntlich

$$f' = \frac{\varepsilon x \cdot \varepsilon x}{x^2} = \varepsilon^2,$$

folglich

$$\frac{e}{i} = \frac{c^2}{8u} \cdot \frac{f}{f'}.$$

Nun wird aber das Verhältniss zweier Kräfte f/f' sowohl wie das Verhältniss zweier Geschwindigkeiten c/u durch reine Zahlen ausgedrückt, woraus sich also ergiebt, dass

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{c}{u} \cdot \frac{f}{f'} = n$$

ein reiner Zahlenfaktor ist, und hieraus folgt, dass e/i eine Geschwindigkeit ist, und zwar eine n Mal grössere, als die Geschwindigkeit c.

2.

Darstellung einer dem Widerstande eines Leiters gleichen Geschwindigkeit.

Nach dem Ohm'schen Gesetze der galvanischen Kette ist die Stromintensität i der auf die Kette wirkenden elektromotorischen Kraft e

direkt proportional, und dem Widerstande der Kette w umgekehrt proportional, und es kann, wenn das Widerstandsmaass danach gewählt wird,

$$i = \frac{e}{w}$$

gesetzt werden, woraus folgt, dass der Quotient

$$\frac{e}{i} = w$$

für jede gegebene Kette einen *konstanten* Werth hat, den man ihren *Widerstand nach dem absoluten Maasse* nennt.

Dieser *Widerstand* also, weil er der Quotient aus einer elektromotorischen Kraft dividirt durch eine Stromintensität ist, muss nach dem vorhergehenden Artikel einer gewissen *Geschwindigkeit* gleich sein, und es ist von Interesse, diese Geschwindigkeit nicht blos ihrer Grösse nach zu bestimmen, sondern auch wirklich so darzustellen, wie sie dem Verhältniss e/i in allen physischen Beziehungen entspricht.

Man gebe dem Leitungsdrahte die Form eines Kreises, welcher der magnetischen Meridianebene parallel aufgestellt, und um seinen horizontalen Durchmesser gedreht werde, während eine kleine Boussole im Mittelpunkte des Kreises sich befindet. Diese Boussole wird dann nach bekannten Gesetzen vom magnetischen Meridiane abgelenkt, desto mehr, je schneller der Kreis gedreht wird; denn die bei dieser Drehung vom vertikalen Theile des Erdmagnetismus im Kreise inducirten Ströme wirken auf die Boussole und üben eine gegen die Meridianebene senkrechte Direktionskraft auf sie aus, deren *Mittelwerth für die Dauer einer halben Umdrehung* proportional mit der Drehungsgeschwindigkeit wächst. — Während der Dauer einer halben Umdrehung ist diese Direktionskraft freilich veränderlich, woraus folgt, dass die Nadel nicht in Ruhe beharren kann, sondern innerhalb gewisser Grenzen schwanken muss; je kleiner aber bei beschleunigter Drehung die Dauer einer halben Umdrehung gegen die der Nadel vermöge der erdmagnetischen Direktionskraft zukommende Schwingungsdauer wird, desto mehr nähern sich jene Grenzen einander, und obige Nadelschwankung lässt sich dadurch so verkleinern, dass sie ganz unwahrnehmbar wird und die Nadel ganz ruhig erscheint. — Diejenige *Geschwindigkeit* nun, mit welcher die Leitertheilchen in einem dem Kreishalbmesser gleichen Abstande von der Drehungsaxe durch die Drehung bewegt werden müssen, damit jener *Mittelwerth* π^2 Mal grösser sei, als die vom vertikalen Theile des Erdmagnetismus auf die Boussole unmittelbar ausgeübte vertikale Direktionskraft, ist *die dem Widerstande des Leitungsdrahts gleiche Geschwindigkeit.*

Jener *Mittelwerth* und diese von der Erde auf die Boussole unmittelbar ausgeübte vertikale Direktionskraft verhalten sich aber wie

die Tangenten der von ihnen hervorgebrachten Ablenkungen v und I, wo v die während der Drehung beobachtete horizontale Ablenkung der Boussole und I die erdmagnetische Inklination bezeichnet. Beobachtet man also, dass bei n Umdrehungen in der Zeiteinheit, tang v/tang $I = \pi^2$, so ist der Widerstand des kreisförmigen Leiters

$$w = 2n\pi r,$$

wenn r den Halbmesser des kreisförmigen Leiters bezeichnet.

Diese so dargestellte dem Widerstande gleiche Geschwindigkeit steht nun wirklich auch in gleichen physischen Beziehungen wie das Verhältniss der elektromotorischen Kraft zur Stromintensität oder der Widerstand des Leiters; denn es lässt sich nachweisen, dass jene Geschwindigkeit, ebenso wie dieser Widerstand, ganz unabhängig ist sowohl von der Stärke und der Richtung der erdmagnetischen Kraft, welche auf den Leiter inducirend wirkt, als auch von der Stärke der Boussole, auf welche der Erdmagnetismus und die im Leiter inducirten Ströme wirken.

Zum Beweis dieser Beziehung der eben beschriebenen Geschwindigkeit zum Widerstand mögen folgende Erläuterungen dienen.

Ist φ der Winkel, welchen die Kreisebene mit der Meridianebene bildet, $d\varphi/dt$ die Drehungsgeschwindigkeit und r der Halbmesser des Kreises, so erhält man die vom vertikalen Theile des Erdmagnetismus T' auf den Kreis ausgeübte elektromotorische Kraft, nach der Art. 1 angegebenen Bedeutung,

$$e = \pi r^2 \cdot T' \cdot \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Ist nun ferner die Drehungsgeschwindigkeit $d\varphi/dt = \varrho$ konstant, also $e = \pi r^2 T' \varrho \cos\varphi$, mit $\cos\varphi$ proportional, so ist, nach dem Ohm'schen Gesetze, auch die Intensität des im Leiter inducirten Stroms i mit $\cos\varphi$ proportional, und kann

$$i = i_0 \cos\varphi$$

gesetzt werden, wo i_0 einen konstanten Werth hat.

Nach elektromagnetischen Gesetzen übt nun dieser inducirte Strom auf die Nadel m im Mittelpunkte des kreisförmigen Leiters ein Drehungsmoment aus, welches, wenn die Kreisebene vertikal, oder $\varphi = 0$, und ebenso die Ablenkung der Nadel vom magnetischen Meridiane $v = 0$ wäre, aus der Theorie der Tangenten-Boussole bekannt und durch den Quotienten des Produkts der Länge des Leiters $2\pi r$ in die Stromintensität i und in den Nadelmagnetismus m, dividirt durch das Quadrat des Kreishalbmessers r^2, dargestellt würde, also $= 2\pi i m/r$; sind aber φ und v von Null verschieden, so muss dieser Quotient, wie leicht gezeigt werden kann, noch mit $\cos\varphi \cos v$ multiplicirt werden, wonach

also das vom inducirten Strome i auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment

$$= \frac{2\pi i m}{r} \cdot \cos\varphi \cos v = \frac{2\pi m}{r} \overset{.}{i_0} \cos v \,.\, \cos\varphi^2$$

erhalten wird.

Der *Mittelwerth* dieses Drehungsmoments für die Dauer einer halben Umdrehung $= \pi/\varrho$ ergiebt sich hieraus

$$\frac{2\pi m}{r} \overset{.}{i_0} \cos v \cdot \frac{\varrho}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\varrho}} \cos\varphi^2 \, dt = \frac{2\pi m}{r} \overset{.}{i_0} \cos v \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\varphi^2 \, d\varphi = \frac{\pi m}{r} \overset{.}{i_0} \cos v.$$

Nun ist ferner das von der Erde auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment, wenn T den horizontalen Theil des Erdmagnetismus bezeichnet,

$$= Tm \sin v,$$

was also, wenn v keine wahrnehmbare Aenderung erleidet, als konstant genommen werden kann. Es muss alsdann dieses von der Erde auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment jenem *Mittelwerthe* des vom inducirten Strome ausgeübten gleich sein, das heisst,

$$Tm \sin v = \frac{\pi m}{r} \overset{.}{i_0} \cos v,$$

folglich

$$\overset{.}{i_0} = \frac{rT}{\pi} \operatorname{tang} v,$$

$$\overset{.}{i} = \frac{rT}{\pi} \operatorname{tang} v \cdot \cos\varphi.$$

Nun war aber

$$e = \pi r^2 \, T' \, \varrho \cdot \cos\varphi,$$

folglich ist

$$\frac{e}{\overset{.}{i}} = \frac{\pi^2}{\operatorname{tang} v} \cdot \frac{T'}{T} \cdot r\varrho,$$

oder es ist, weil $T'/T = \operatorname{tang} I$, wenn I die erdmagnetische Inklination bezeichnet,

$$\frac{e}{\overset{.}{i}} = \frac{\operatorname{tang} I}{\operatorname{tang} v} \cdot \pi^2 r \varrho.$$

Bezeichnet endlich $2n\pi$ denjenigen Werth von ϱ, für welchen

$$\frac{\operatorname{tang} v}{\operatorname{tang} I} = \pi^2$$

beobachtet wird, so ist

$$\frac{e}{\overset{.}{i}} = 2n\pi r,$$

das heisst, die *Geschwindigkeit*, mit welcher sich alsdann das im Abstande r von der Drehungsaxe befindliche Leitertheilchen in seiner Kreisbahn bewegt, stellt den *Widerstand des Leiters* $w = e/i$ dar.

Bezeichnet man den Widerstand der *Längeneinheit* des Leiters mit dem Namen seines *specifischen Widerstandes*, so ist der specifische Widerstand eines kreisförmigen Leiters einer bestimmten *Drehungsgeschwindigkeit* dieses Leiters gleich, nämlich, da $2\pi r$ die Länge des Leiters ist, der Drehungsgeschwindigkeit n, für welche

$$\frac{\operatorname{tang} v}{\operatorname{tang} I} = \frac{\pi}{2}$$

beobachtet wird.

3.

Bestimmung des Widerstands aus dem Verhältnisse $\int edt / \int idt$ bei einem Induktionsstosse.

Aus der Möglichkeit wirklicher Darstellung derjenigen Geschwindigkeiten, welche den Widerständen von Leitungsdrähten gleich sind, wird zugleich die Möglichkeit erkannt, diese Geschwindigkeiten, und damit auch die ihnen gleichen Widerstände, zu *messen*. Diese Messungen heissen *die absoluten Widerstandsmessungen*.

Wenn aber auch die Möglichkeit der absoluten Widerstandsmessungen hieraus einleuchtet, so ist doch damit noch keineswegs die genaueste und feinste Methode für die wirkliche Ausführung gegeben, von der die praktische Bedeutung dieser Messungen abhängt; vielmehr bedarf es zu deren Ermittelung weiterer Erörterungen, die der Ausführung vorausgeschickt werden müssen.

Der im vorigen Artikel erwähnte, in die Form eines Kreises gebrachte und um dessen horizontalen Durchmesser drehbare Leitungsdraht, nebst der im Mittelpunkte des Kreises befindlichen Boussole, bildet im Wesentlichen dasselbe Instrument, von welchem unter dem Namen des *Induktions-Inklinatoriums* schon in den „Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837“, S. 81—96,[1]) gehandelt worden ist. Durch dieses *Induktions-Inklinatorium* können also die Widerstandsmessungen auf Geschwindigkeitsmessungen reducirt werden. Eine genaue Ausführung dieser Geschwindigkeitsmessungen setzt aber, wie von selbst einleuchtet, eine vollkommen gleichförmige Drehungsgeschwindigkeit voraus, deren Darstellung, wenn auch nicht unmöglich, doch mit grossen praktischen Schwierigkeiten verknüpft ist. Es ist daher für die Ausführung einer genauen absoluten Widerstandsmessung von grösster Wichtigkeit, dass sie von der Darstellung und

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. II, p. 75—88.]

Messung einer so vollkommen gleichförmigen Drehungsgeschwindigkeit unabhängig gemacht werde.

Die Methode, diesen Zweck zu erreichen, beruht nun im Allgemeinen darauf, dass man, statt einen bestimmten Mittelwerth der elektromotorischen Kraft e und der Stromintensität i durch fortgesetzte gleichförmige Drehung lange Zeit konstant zu erhalten, und dieselben während dieser Zeit zu messen, genau bestimmte und messbare, aber auf ganz kurze Zeit beschränkte Integralwerthe $\int e dt$ und $\int i dt$ darzustellen sucht, unter Umständen, unter welchen der Quotient e/i für alle Zeitelemente dt konstant bleibt, wenn auch e und i variiren. Aus genauer Messung der Integralwerthe $\int e dt$ und $\int i dt$ ergiebt sich dann der Quotient $\int e dt / \int i dt = e/i$, gleich dem gesuchten Widerstande des Leitungsdrahts w, wobei es gleichgültig ist, ob der kurze Zeitraum, über welchen sich jene Integrale erstrecken, welcher gar nicht gemessen zu werden braucht, etwas grösser oder kleiner ist, da das Resultat davon ganz unabhängig ist.

4.

Ausführung mit dem Induktions-Inklinatorium.

Die im vorigen Artikel angegebene Methode würde nun mit dem *Induktions-Inklinatorium* leicht auf folgende Weise zur Ausführung gebracht werden können. Den aus dem Leitungsdrahte gebildeten Kreis, statt ihn in eine fortgesetzte gleichförmige Drehung zu versetzen, dreht man blos ein Stück, zum Beispiel halb herum, am zweckmässigsten von der horizontalen Lage des Kreises anfangend bis wieder zur horizontalen Lage, und zwar in recht kurzer Zeit, was mit dem Namen eines *Induktionsstosses* bezeichnet wird. Der Integralwerth $\int e dt$ für einen solchen Induktionsstoss ist nämlich leicht zu bestimmen; denn es ist nach Art. 2 $e = \pi r^2 T' \cos \varphi \,.\, d\varphi/dt$, folglich ist der Integralwerth von $e dt$, von $\varphi = -\pi/2$ bis $\varphi = +\pi/2$ genommen,

$$\int e dt = 2\pi r^2 T',$$

wenn r den Halbmesser des Kreises und T' den vertikalen Theil des Erdmagnetismus bezeichnet.

Der Integralwerth $\int i dt$ kann ebenfalls sehr einfach bestimmt werden, durch Vermittelung der Drehungsgeschwindigkeit, in welche die Boussole durch einen solchen Induktionsstoss versetzt wird; denn wird diese Drehungsgeschwindigkeit mit γ, der Magnetismus und das Trägheitsmoment der Boussole mit m und k bezeichnet, so ist

$$\int i dt = \frac{2rk}{\pi^2 m} \cdot \gamma.$$ [1]

[1]) Nach Art. 2 war das von dem inducirten Strome $i = i_0 \cos \varphi$ auf die Nadel ausgeübte horizontale Drehungsmoment $= [2\pi m/r] \,.\, i_0 \cos v \cos \varphi^2$, folglich, wenn im Augen-

Nun verhält sich aber bei einer in Schwingung gesetzten Nadel die grösste Drehungsgeschwindigkeit γ (im Augenblicke, wo sie durch die Gleichgewichtslage geht) zur grössten Ablenkung von der Gleichgewichtslage, d. i. zur Elongationsweite a, wie π zur Schwingungsdauer der Nadel t, oder es ist $\gamma = [\pi/t] \,.\, a$, also

$$\int i dt = \frac{2rk}{\pi m t} \cdot a \cdot$$

Hieraus ergiebt sich, da $\int e dt = 2\pi r^2 T'$ war, der gesuchte Widerstand des Leitungsdrahts

$$w = \frac{\int e dt}{\int i dt} = \frac{\pi^2 m r t T'}{k a}.$$

Bezeichnet T den horizontalen Theil des Erdmagnetismus und I die Inklination, so ist bekanntlich $T'/T = \operatorname{tang} I$ und $mT/k = \pi^2/t^2$; folglich

$$w = \frac{\pi^4 r}{a \cdot t} \operatorname{tang} I.$$

Bildete der Leitungsdraht, statt eines einfachen Kreises, einen aus n gleich grossen, von einander isolirten, Windungen zusammengesetzten Ring, so würde man finden:

$$w = \frac{n^2 \pi^4 r}{a \cdot t} \cdot \operatorname{tang} I.$$

5.

Trennung des Induktors vom Galvanometer.

So einfach auch die im vorigen Artikel beschriebene Methode der absoluten Widerstandsmessung mit dem *Induktions-Inklinatorium* erscheint, so bewährt sie sich doch nicht in der praktischen Ausführung. Denn *erstens* ist die durch eine einzige halbe Umdrehung des Kreises (Induktionsstoss) der Nadel ertheilte Drehungsgeschwindigkeit und die dadurch hervorgebrachte Elongationsweite viel zu klein, um mit einer gewöhnlichen Boussole beobachtet und gemessen zu werden; es würden

blicke des Induktionsstosses die Nadel in Ruhe und $v = 0$ ist, $= [2\pi m/r] \,.\, i_0 \cos \varphi^2$. Dieses Drehungsmoment mit dem Trägheitsmoment k dividirt giebt die Drehungsbeschleunigung der Nadel $d\gamma/dt = [2\pi m/rk] \,.\, i_0 \cos \varphi^2$. Hieraus erhält man, wenn die Drehungsgeschwindigkeit des Kreises $d\varphi/dt$ mit ϱ bezeichnet wird, $d\gamma = [2\pi m/rk] \,.\, [i_0/\varrho] \,.\, \cos \varphi^2 d\varphi$, und den Integralwerth hiervon, zwischen $\varphi = -\pi/2$ und $\varphi = +\pi/2$, $\gamma = [\pi^2 m/rk] \,.\, [i_0/\varrho]$, also $i = i_0 \cos \varphi = [rk/\pi^2 m] \,.\, \varrho \gamma \cos \varphi$, woraus $idt = [rk/\pi^2 m] \,.\, \gamma \cos \varphi \, d\varphi$, und der Integralwerth hiervon, zwischen den Grenzen $\varphi = -\pi/2$ und $\varphi = +\pi/2$, $\int idt = [2rk/\pi^2 m] \,.\, \gamma$ erhalten wird. Es ist hierbei die Drehungsgeschwindigkeit des Kreises ϱ als konstant angenommen worden; man sieht aber leicht ein, dass das Resultat unverändert bleiben würde, auch wenn ϱ veränderlich wäre; denn es würde dann auch i_0 veränderlich sein, das Verhältniss i_0/ϱ aber konstant bleiben.

zu diesem Zwecke sogar die feinsten magnetometrischen Beobachtungen nicht genügen, wenn die Boussole durch ein mit Spiegel und Skale versehenes Magnetometer ersetzt werden könnte, dessen Aufstellung übrigens in der Mitte des drehbaren Kreises mit grossen praktischen Schwierigkeiten verbunden sein würde. *Zweitens* aber kommt noch hinzu, dass bei dieser Methode die Horizontalität der Nadelaxe vollkommen verbürgt werden müsste; denn sonst würde, wie man leicht einsieht, bei der Drehung des Kreises um seinen horizontalen Durchmesser, die Induktion des vertikalen Theils des Erdmagnetismus mit der Induktion des vertikalen Theils des Nadelmagnetismus vermischt werden.

Diese Gründe lassen es daher als weit zweckmässiger erscheinen, statt eines Kreises *zwei Kreise* aus dem Leitungsdrahte zu bilden, von denen der eine zum *Induktor* gebraucht und gedreht wird, der andere zum *Multiplikator* dient und feststeht. Man gewinnt durch diese Trennung freie Hand für die zweckmässigste Einrichtung des Induktors sowohl wie des zum Galvanometer erforderlichen Multiplikators, wo dann jeder für sich, ohne auf den anderen Rücksicht nehmen zu müssen, viel vollkommener konstruirt werden kann. Auf dieser Trennung des Induktors vom Multiplikator beruht die im ersten Bande der Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften[1]) entwickelte Methode, worüber hier folgende Bemerkung genügen wird.

Die Berechnung des Widerstands des Leitungsdrahts aus den Beobachtungen wird durch die Trennung des Induktors vom Multiplikator nur wenig verändert, nämlich blos in Folge der festen Stellung, in welcher der getrennte Multiplikator, der an der Drehung des Induktors nicht mehr Theil nimmt, verharrt, wonach *erstens* das von dem inducirten Strome $i = i_0 \cos \varphi$ auf die Nadel ausgeübte horizontale Drehungsmoment $= [2\pi m/r] . i_0 \cos \varphi$ gefunden wird (statt des in der Note zu Art. 4 angeführten Werths $= [2\pi m/r] . i_0 \cos \varphi^2$), woraus dann $\int i\,dt = [rk/2\pi m] . \gamma$ folgt; und wonach *zweitens* die Elongationsweite a aus der Drehungsgeschwindigkeit γ nicht mehr nach dem Art. 4 angeführten Gesetze $\gamma = [\pi/t] . a$ bestimmt werden kann, weil dieses Gesetz nur für eine frei schwingende Nadel gilt, die keine Dämpfung erleidet, was Art. 4 der Fall war, weil der mit dem Induktor verbundene Multiplikator vor und nach dem Induktionsstoss sich stets in horizontaler Lage befand. Beharrt dagegen der vom Induktor getrennte Multiplikator während der ganzen Nadelschwingung in seiner der Meridianebene parallelen vertikalen Stellung, so erleidet die schwingende Nadel eine Dämpfung und die Elongationsweite a ist dann aus der Drehungsgeschwindigkeit γ nach den von Gauss in den „Resultaten aus den Beobachtungen

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 301.]

des magnetischen Vereins im Jahre 1837" [1]) entwickelten Gesetzen zu bestimmen. Wird γ nach diesen Gesetzen aus der beobachteten Elongationsweite und aus der zugleich beobachteten Abnahme der Schwingungsbögen der Nadel bestimmt, so ergiebt sich zur Berechnung von w folgende Gleichung, nämlich entweder für einfache Kreise von gleichem Halbmesser r, sowohl als Induktor wie auch als Multiplikator:

$$w = \frac{4\pi^4 r}{\gamma . t^2} \cdot \operatorname{tang} I,$$

oder für einen aus n Windungen vom Halbmesser r zusammengesetzten Ring als Induktor und für einen aus n' Windungen vom Halbmesser r' zusammengesetzten Ring als Multiplikator:

$$w = \frac{4nn'\pi^4}{\gamma . t^2} \cdot \frac{r^2}{r'} \cdot \operatorname{tang} I.$$

6.

Dämpfung als Maass der Empfindlichkeit des Galvanometers.

Die Freiheit, den Halbmesser der Multiplikatorwindungen r' kleiner zu machen als den der Induktorwindungen r, und dafür die Zahl der Multiplikatorwindungen n' zu vergrössern, welche durch die im vorigen Artikel erörterte Trennung des Multiplikators vom Induktor erlangt wird, gewinnt sodann eine höhere Bedeutung dadurch, dass *erstens* bei der festen Stellung des Multiplikators die Vertauschung der Boussole mit einem Magnetometer kein Hinderniss mehr findet, *zweitens*, dass ausserdem der der Nadel durch einen Induktionsstoss ertheilten Drehungsgeschwindigkeit γ eine für die feinere Beobachtung angemessene Grösse gegeben werden kann. Denn aus der Gleichung am Schlusse des vorigen Artikels ersieht man, dass wenn r' den halben Werth und n' den doppelten erhält, unter sonst ganz gleichen Umständen, bei unverändertem Leitungsdrahte, die von einem Induktionsstosse hervorgebrachte Drehungsgeschwindigkeit γ einen vier Mal grösseren Werth annimmt. Nur auf diese Weise ist es möglich, bei einer so schwachen Induktion wie der Erdmagnetismus bietet, der von γ abhängigen Elongationsweite der Nadel α die zu genauer Messung nöthige Grösse zu geben.

Es leuchtet aber ein, dass, wenn der Multiplikator die Nadel eng umschliesst, statt nach Maassgabe einer Tangenten-Boussole einen weiten Kreis um dieselbe zu bilden, das für Tangenten-Boussolen gültige Gesetz, wonach die von einem Induktionsstosse der Nadel ertheilte Drehungsgeschwindigkeit γ bestimmt wurde, nämlich die Art. 5 angeführte Gleichung $\int i dt = [rk/2\pi m] . \gamma$, wonach also $\gamma = [2\pi m/rk] . \int i dt$ war (oder, für eine Mehrzahl von Umwindungen n' vom Halbmesser r',

[1]) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 389.]

$\gamma = [2n'\pi m/r'k] . \int i dt$) keine Anwendung mehr findet, weil alsdann die Verschiedenheit der Lage der verschiedenen Umwindungen, aus denen der Multiplikator zusammengesetzt wird, und die Vertheilungsweise des Magnetismus in der Nadel Einfluss gewinnen und genauer in Rechnung zu bringen sind; doch bleibt auch dann γ mit $\int i dt$ proportional und das konstante Verhältniss $\gamma/\int i dt$, welches der Empfindlichkeits-Koefficient des Galvanometers genannt werden kann, und mit f bezeichnet werden möge, lässt sich leicht für jedes gegebene Galvanometer auf dem Wege der Beobachtung, durch gleichzeitige Messung von γ und $\int i dt$ bestimmen. Doch ist dabei zu beachten, dass die Konstanz des Koefficienten $\gamma/\int i dt = f$ nothwendig an die Unveränderlichkeit des Instruments geknüpft ist, eine Unveränderlichkeit, die so empfindlichen Galvanoskopen mit eng umschliessenden Multiplikatoren keineswegs *auf die Dauer* zugeschrieben werden darf, weshalb die Empfindlichkeit solcher Instrumente, wie schon in der Einleitung bemerkt worden, gar nicht *voraus* bestimmt werden kann. Es muss also der Koefficient f, oder die Empfindlichkeit des Instruments, für den Augenblick der Beobachtung selbst bestimmt werden.

Eine solche Bestimmung wird durch die nach der Methode der *Zurückwerfung* (welche im ersten Bande der Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, S. 349,[1]) näher erörtert worden ist) kombinirten Beobachtungen, welche die durch einen Induktionsstoss der Nadel ertheilte *Drehungsgeschwindigkeit* und zugleich deren *Dämpfung* betreffen, gewonnen; denn diese Dämpfung ist dem Quadrate des Koefficienten f proportional. Wird nämlich aus solchen Beobachtungen die von der Schliessung der Kette herrührende Dämpfung durch den Werth des logarithmischen Dekrements λ (nach dem natürlichen Systeme) bestimmt, so ist, wenn w den Widerstand der Kette, k das Trägheitsmoment der Nadel und τ deren Schwingungsdauer unter dem Einflusse der Dämpfung bezeichnet,

$$f^2 = \frac{2w}{k\tau} \cdot \lambda.$$ [2])

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 441.]

[2]) Nach *elektromagnetischem* Gesetze war, wie oben angeführt worden, die von den durch einen Induktionsstoss inducirten Strömen der Nadel ertheilte Drehungsgeschwindigkeit

$$\gamma = f . \int i dt,$$

also, während des Induktionsstosses, $d\gamma = f i dt$. Es ist also die vom Strome i im Multiplikator der Nadel ertheilte Drehungsbeschleunigung $d\gamma/dt = fi$, und folglich, wenn k das Trägheitsmoment der Nadel bezeichnet, das vom Strome i im Multiplikator auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment $= kfi$.

Der Ausdruck dieses Drehungsmoments giebt aber, wenn darin $i = 1$ gesetzt wird, nach *magnetelektrischem* Gesetze den Faktor, welcher, mit der Drehungsgeschwindigkeit der Nadel γ multiplicirt, der von der bewegten Nadel auf den Multiplikator ausgeübten *elektromotorischen Kraft* gleich ist, $= kf\gamma$, woraus, nach dem

Nun war aber $f = \gamma / \int i dt$, und nach Art. 3 und 4 $w = \int e dt / \int i dt$ und $\int e dt = 2 n \pi r^2 T'$; folglich ergiebt sich, wenn aus diesen vier Gleichungen f, $\int e dt$ und $\int i dt$ eliminirt werden,

$$w = \frac{8 (n \pi r^2 T')^2}{k \gamma^2 \tau} \cdot \lambda.$$

Hierbei ist in Beziehung auf die Ausführung der Beobachtungen noch zu bemerken, dass *erstens* bei starker Dämpfung der Fall vorkommen kann, dass die Schwingungsdauer bei geschlossener Kette τ sich unmittelbar nicht genau bestimmen lässt, und dass es daher nothwendig wird, die Schwingungsdauer bei geöffneter Kette t dafür zu beobachten; dass *zweitens* auch bei geöffneter Kette sehr häufig eine noch wahrnehmbare Dämpfung Statt findet, welche durch Beobachtung des logarithmischen Dekrements λ_0 bestimmt wird. Bei geschlossener Kette kommt dann zu λ_0 noch λ hinzu und das alsdann beobachtete logarithmische Dekrement ist also $\lambda_0 + \lambda = \lambda_1$. Unter solchen Verhältnissen muss (wie sich aus vorhergehender Note leicht ergiebt) in obige Gleichung $\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$ und $\tau = t_0 \sqrt{(\pi^2 + \lambda_1^2)/(\pi^2 + \lambda_0^2)}$ substituirt werden, um den Widerstand w in seiner Abhängigkeit von den beobachteten Werthen t_0, λ_0 und λ_1 darzustellen, nämlich:

$$w = \frac{8 (n \pi r^2 T')^2}{k \gamma^2 t_0} \cdot (\lambda_1 - \lambda_0) \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda_1^2}}.$$

7.

Induktion durch den horizontalen Theil des Erdmagnetismus.

Auf ähnliche Weise wie die Art. 5 angegebene Sonderung des Multiplikators vom Induktor benutzt werden kann, um ein Galvanometer mit eng umschliessendem *Multiplikator* von höchster Empfindlichkeit für die Messung zu gewinnen, ebenso kann diese Sonderung auch dazu dienen, um dem *Induktor* eine angemessenere und vortheilhaftere Einrichtung zu geben.

Ohm'schen Gesetze, der von der bewegten Nadel im Multiplikator inducirte Strom $i = k f \gamma / w$ folgt. Setzt man nun diesen Werth von i in die Gleichung $d\gamma = f i dt$, so findet man, dass die durch Schliessung der Kette hervorgebrachte Dämpfung die Drehungsgeschwindigkeit der Nadel retardirt und dass diese Retardation $d\gamma/dt = [k f^2 / w] \cdot \gamma$ ist. Nun ist aber die Differentialgleichung der schwingenden Nadel (siehe Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, 1837, S. 74) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 389] $d^2 x/dt^2 + 2\varepsilon\, dx/dt + n^2 x = 0$, worin die Drehungsgeschwindigkeit $\gamma = dx/dt$ und die von der Dämpfung herrührende Drehungsretardation $[k f^2/w] \cdot \gamma = 2\varepsilon\, dx/dt$ gesetzt ist, folglich $k f^2 / w = 2\varepsilon$. — Aus dieser Differentialgleichung folgt aber $x = p + A e^{-\varepsilon t} \sin (t \sqrt{n^2 - \varepsilon^2} - B)$, wonach die Schwingungsdauer $\tau = \pi / \sqrt{n^2 - \varepsilon^2}$ und das Decrementum logarithmicum naturale $\lambda = \varepsilon \tau$ ist. Hiernach ist also $k f^2 / w = 2\varepsilon = 2\lambda/\tau$, oder $f^2 = [2 w / k\tau] \cdot \lambda$, was zu beweisen war.

Der Halbmesser der Induktorwindungen braucht nicht mehr des Galvanometers wegen beschränkt, sondern kann so weit vergrössert werden, als es mit einer raschen und leichten Drehung des Induktors verträglich ist, wodurch die Induktionsstösse bedeutend verstärkt werden. Denn die Stärke des Induktionsstosses ist $\int edt = 2n\pi r^2 T'$ gefunden worden und man sieht leicht, dass dieser Werth m Mal vergrössert wird, auch bei unveränderter Drahtlänge, wenn der Halbmesser r der Induktorwindungen m Mal grösser und folglich die Zahl n der Induktorwindungen m Mal kleiner genommen wird.

Ausserdem fällt aber auch in Folge der Sonderung des Induktors vom Multiplikator der Grund weg, aus welchem bei vereinigtem Induktor und Multiplikator die Induktordrehung um den *horizontalen* Durchmesser des Induktors geschehen musste, nämlich der Grund, dass bei Drehung des Induktors blos eine Induktion durch den Erdmagnetismus, und nicht zugleich auch durch den Nadelmagnetismus Statt finde, weil die letztere schwer zu bestimmen oder zu eliminiren wäre. In Folge der Sonderung des Induktors vom Multiplikator kann also die Drehung auch um den *vertikalen* Durchmesser des Induktors geschehen, wodurch die Induktion von dem *horizontalen* Theil des Erdmagnetismus T, statt vom *vertikalen* Theile T', abhängig gemacht wird. Durch diese Vertauschung von T mit T' verwandelt sich die Gleichung am Schlusse des vorigen Artikels in folgende:

$$w = \frac{8\,(n\pi r^2 T)^2}{k\gamma^2 t_0} \cdot (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda_1^2}}.$$

Diese Vertauschung gewährt den Vortheil, dass die Messung des *horizontalen* Theils des Erdmagnetismus T genügt, während im anderen Falle ausserdem noch die Messung der *Inklination* I nöthig war, um den *vertikalen* Theil $T' = T \operatorname{tang} I$ bestimmen zu können.

II. *Konstruktion des Galvanometers.*

8.

Aus der im vorigen Abschnitte gegebenen Uebersicht über die Methode der absoluten Widerstandsmessung leuchtet die Wichtigkeit ein, welche die Konstruktion des Galvanometers für die Ausführung einer solchen Messung hat. Es kommt dabei nicht blos auf einen hohen Grad der Empfindlichkeit, sondern auch darauf an, dass dieser Grad der Empfindlichkeit, aus den Dämpfungsbeobachtungen der Nadelschwingungen, genau bestimmt werden kann.

Die Theorie des Galvanometers ist oft von verschiedenen Seiten, nach Verschiedenheit der Zwecke, zu denen es dienen sollte, erörtert worden; in nächster Beziehung zu dem Zwecke der absoluten Wider-

standsmessung, mit der wir uns hier beschäftigen, steht aber der im fünften Bande dieser Abhandlungen[1]) erörterte Gebrauch des Galvanometers zu der mit Hülfe der *Induktion* ausgeführten Messung der *magnetischen Inklination*, womit auch schon a. a. O. eine Anwendung auf die Widerstandsmessung selbst verbunden worden ist. Die daselbst für die Konstruktion des Galvanometers gegebenen Regeln finden daher auch hier Anwendung, z. B. dass der Widerstand des Multiplikators dem der übrigen Kette, zu welcher der Induktor gehört, nahe gleich sein soll. Doch handelte es sich bei dem dortigen Galvanometer hauptsächlich nur um die Empfindlichkeit, oder Grösse des Ausschlags der durch einen Induktionsstoss in Schwingung gesetzten Galvanometernadel, während hier dagegen es sich zugleich um die Grösse der Dämpfung handelt, welche zur genauen Bestimmung jener Empfindlichkeit benutzt werden soll. Von dieser Benutzung der Dämpfung ist zwar auch dort schon, bei Gelegenheit der auf die Widerstandsmessung gemachten Anwendung, gehandelt worden; sie bedarf aber noch einer näheren Erörterung, um zu ermitteln, was der höchste Grad der Genauigkeit bei dieser *Bestimmung der Empfindlichkeit* und wie derselbe zu erreichen sei.

9.

Grenzen für die Grösse des Ausschlags und der Dämpfung.

Könnten auch *Ausschlag* und *Dämpfung*, theils durch enge Umschliessung der Galvanometernadel mit dem Multiplikator, theils durch Verstärkung des Nadelmagnetismus, ganz nach Belieben vergrössert werden, so dürften doch gewisse Grenzen dabei nicht überschritten werden, wenn die Genauigkeit der Widerstandsmessung nicht vermindert statt vermehrt werden soll.

Denn was zunächst den *Ausschlag* betrifft, der nicht über die Skale, womit er gemessen werden soll, hinausgehen darf, so wird seiner Vergrösserung bei allen *magnetometrischen* Beobachtungen durch die Regel, dass dieselben stets auf kleine Ablenkungswinkel beschränkt bleiben sollen, wonach die Skalenlänge eingerichtet wird, eine Grenze gesetzt. Es würde nämlich sonst der wesentlichste Vorzug dieser Beobachtungen verloren gehen, welcher darin besteht, dass stets kleine Ablenkungen auch zu den feinsten Messungen gebraucht werden und genügen, wodurch viele störende Einflüsse vermieden und die Berechnung der Beobachtungen sehr vereinfacht wird.

Ebenso leuchtet in Beziehung auf die *Dämpfung*, welche aus dem *Unterschiede* des Grössenverhältnisses zweier auf einander folgenden Schwingungsbögen von der Einheit zu bestimmen ist, ein, dass dieser

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. II, p. 277.]

Unterschied zwar eine für genaue Bestimmung hinreichende Grösse haben muss, aber auch nicht so gross sein darf, dass die Einheit selbst dagegen verschwindet, weil sonst entweder der erste Schwingungsbogen zu gross sein würde, um mit der Skale gemessen zu werden, oder der zweite für eine genaue Messung zu klein sein würde. Zwischen diesen beiden Grenzen muss also ein Fall liegen, wo die in Bestimmung der Dämpfung erreichbare Genauigkeit ein Maximum ist.

Bezeichnet man den grösseren Schwingungsbogen, welcher dem durch die Länge der Skale gesetzten Grenzwerthe nahe gleich sein soll, mit a, den kleineren mit x, so wird die Grösse der Dämpfung proportional mit $\log[a/x] = \lambda$ gefunden, und die in Bestimmung der Dämpfung erreichbare Genauigkeit wird durch den Quotienten der kleinsten messbaren Aenderung von x, dividirt durch die zugehörige in Theilen von λ ausgedrückte Aenderung von λ, dargestellt. Derjenige Werth von x, für welchen der absolute Werth dieses Quotienten ein Maximum ist, wird durch die Gleichung

$$\left(\frac{\lambda\,dx}{d\lambda}\right)^2 = x^2\left(\log\frac{a}{x}\right)^2 = \text{Maximum}$$

bestimmt, woraus $a : x = e : 1$ folgt, wenn $e = 2{,}71828$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Es ergiebt sich hieraus die Regel, dass es für die Bestimmung der Dämpfung am vortheilhaftesten ist, das Galvanometer so zu konstruiren, dass das Verhältniss zweier aufeinander folgenden Bögen der in Schwingung gesetzten Nadel dem Verhältniss $e : 1$ gleich ist oder wenigstens nahe kommt.

10.

Unifilare und bifilare Aufhängung der Galvanometernadel.

Die Aufhängung der Galvanometernadel kann entweder *unifilar* oder *bifilar* sein und nur eine genauere Betrachtung der auszuführenden Beobachtungen kann der Wahl der einen oder anderen Aufhängung den Vorzug geben.

Wird die Galvanometernadel durch einen Induktionsstoss in Schwingung gesetzt, d. h., wird ihr im Augenblicke, wo sie sich in der Ruhelage befindet, eine bestimmte Drehungsgeschwindigkeit γ ertheilt, so reicht es bekanntlich nicht hin, den Ausschlag, oder die *erste* Elongation der Nadel a, zu beobachten, sondern es ist, namentlich zur Bestimmung der Dämpfung, nothwendig, auch die *zweite* Elongation der Nadel b, nach der entgegengesetzten Seite von der Ruhelage, zu beobachten. Zum Zweck einer genauen Messung müssen aber ferner diese beiden Beobachtungen häufiger wiederholt werden. Es leuchtet nun ein, dass, statt abzuwarten, bis zwischen je zwei Wiederholungen die Nadel jedes

Mal zur vollkommenen Ruhe gelangt ist, es grosse Vortheile bietet, ein System solcher Wiederholungen ohne Unterbrechung in stetiger Aufeinanderfolge auszuführen, was thunlich ist, wenn man beachtet, dass die Nadel im Augenblicke jedes Induktionsstosses zwar in derjenigen Lage sich befinden soll, wo sie, wenn sie keine Bewegung besässe, in Gleichgewicht beharren könnte, dass es aber für den Zweck dieser Beobachtungen nicht nothwendig sei, dass sie sich wirklich im Gleichgewicht befinde. Die Nadel kann vielmehr in diesem Augenblicke eine Drehungsgeschwindigkeit besitzen, wenn letztere nur bei allen Wiederholungen im Augenblicke jedes Induktionsstosses immer gleich gross ist. Die Methode der Anordnung solcher Beobachtungssysteme ist von Gauss angegeben worden und man findet sie im ersten Bande der Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, S. 349, unter dem Namen der *Zurückwerfungsmethode* näher erörtert.[1]) Es ergiebt sich daraus, dass die genaue Ausführung eines solchen Beobachtungssystems fordert, dass *erstens* die Dauer eines Induktionsstosses einen sehr kleinen Bruchtheil von der Schwingungsdauer der Nadel bilde, *zweitens*, dass der Augenblick jedes Induktionsstosses so genau wie möglich mit dem Augenblicke zusammenfalle, wo die Nadel in der Lage sich befindet, in welcher sie, wenn ihre Drehungsgeschwindigkeit Null wäre, im Gleichgewicht beharren könnte. Es leuchtet aber ein, dass die Erfüllung dieser beiden Forderungen nur bei einer längeren Schwingungsdauer der Nadel, z. B. von 20 bis 30 Sekunden, zu erreichen ist, wonach also die Konstruktion des Galvanometers eingerichtet werden muss.

Soll nun eine solche längere Schwingungsdauer durch *unifilare* Aufhängung der Nadel hergestellt werden, und soll die Nadel, zum Zweck der Dämpfung, einen verhältnissmässig zu ihrer Grösse möglichst starken Magnetismus besitzen, so leuchtet die Nothwendigkeit einer grösseren Nadel ein, z. B. von 600 bis 900 Millimeter Länge, wodurch auch eine entsprechende Ausdehnung des Multiplikators in der Richtung der Nadel nothwendig wird. Bei solcher Verlängerung des Multiplikators kann nun zwar durch die damit verbundene Verstärkung des Magnetismus der Nadel eine hinreichend starke *Dämpfung* erlangt werden; die Grösse des von einem Induktionsstosse hervorgebrachten *Ausschlags* dagegen vermindert sich mit der Verlängerung der Nadel und des Multiplikators so rasch, dass der Fall eintreten kann, dass dieselbe zu genauen Messungen nicht mehr genügt. Bei grösseren Nadeln kann man unter normalen Verhältnissen etwa rechnen, dass die Grösse des Ausschlags der Länge der Nadel umgekehrt proportional ist, dass also

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 441.]

z. B. bei einer 600 bis 900 Millimeter langen Nadel, welche zu einer Schwingungsdauer von 20 bis 30 Sekunden erforderlich wäre, der Ausschlag 4 bis 6 Mal kleiner sein würde, als bei einer 150 Millimeter langen Nadel.[1]) Ergäbe sich nun, dass auch dann noch der Ausschlag, unter sonst günstigen Verhältnissen, eine für feinere Messungen hinreichende Grösse behielte, so wäre kein wesentlicher Grund vorhanden, den Gebrauch der *unifilaren* Aufhängung zu verwerfen. Wenn sich aber ergeben sollte, dass der so verkleinerte Ausschlag nicht mehr genügte, würde man zur *bifilaren* Aufhängung genöthigt werden.

Diese *bifilare* Aufhängung lässt sich alsdann so einrichten, dass die daraus entspringende statische Direktionskraft S grösser ist als die magnetische Direktionskraft D, und dass (bei verkehrter Lage der Nadelpole) die Schwingungsdauer der Nadel blos von der Differenz $S—D$ abhängt, wodurch es möglich wird, dieselbe beliebig zu reguliren und zu verlängern. Eine auf diese Weise hergestellte längere Schwingungsdauer, verbunden mit einem verhältnissmässig starken Magnetismus der Nadel, gestattet aber ferner nicht blos ein Galvanometer von sehr grosser Empfindlichkeit herzustellen, sondern auch die Dämpfung so zu verstärken, dass sie einer ebenso genauen Bestimmung wie der Ausschlag der Nadel fähig ist. Endlich gewährt diese *bifilare* Aufhängung auch

[1]) Es genügt für die vorliegende Betrachtung, nur eine einzige Windung des Multiplikators in der Vertikalebene der Nadel zu betrachten, und von der Nadel nur zwei Punkte, die man als Nordpol und Südpol bezeichnen kann, deren Abstand von einander $= l$ sei. Die Multiplikatorwindung bilde um jeden dieser Punkte einen Halbkreis vom Halbmesser r, beide durch zwei parallele Stücke von der Länge l mit einander verbunden. Es ist dann die Drehungsgeschwindigkeit, welche der Nadel durch einen Induktionsstoss ertheilt wird, aus mehreren Theilen zusammengesetzt, nämlich aus dem, welcher von den beiden Halbkreisen, indem sie auf die in ihren Mittelpunkten liegenden Nadelpole wirken, herrührt, welcher $= [\pi m/kr] . \int i dt$ erhalten wird, wenn m das magnetische Moment und k das Trägheitsmoment der Nadel bezeichnet; ferner aus dem, welcher von den beiden parallelen Verbindungsstücken herrührt, $= [2 l m / r k \sqrt{l^2 + r^2}] . \int i dt$, und endlich aus dem, welcher von jedem Halbkreis, indem er auf den im Mittelpunkt des anderen Halbkreises liegenden Nadelpol wirkt, herrührt, der aber, wenn r gegen l sehr klein ist, als verschwindend betrachtet werden kann. Hiernach kann, wenn r gegen l sehr klein ist, $\gamma = (\pi + 2)(m/kr) \int i dt$ gesetzt werden. Nun verhalten sich bei zwei homogenen Nadeln von ähnlicher Gestalt die grössten magnetischen Momente, die sie annehmen können, $m : m'$ wie die Kuben, ihre Trägheitsmomente $k : k'$ wie die fünften Potenzen ihrer Polabstände $l : l'$, oder es ist $m : m' = l^3 : l'^3$, $k : k' = l^5 : l'^5$, woraus das Verhältniss ihrer Drehungsgeschwindigkeiten

$$\gamma : \gamma' = l'^2 : l^2$$

folgt. Und da ihre Ausschläge $a : a'$ im zusammengesetzten Verhältnisse dieser Drehungsgeschwindigkeit und der mit dem Polabstande proportionalen Schwingungsdauer steht, so erhält man hieraus

$$a : a' = l' : l.$$

in den Fällen, wo der eben bezeichnete Hauptzweck durch *unifilare Aufhängung grösserer Magnete* erreichbar wäre, doch noch den besonderen Vortheil, dass die Konstruktion des Galvanometers *in kleinerem Maassstabe ohne Eintrag der Genauigkeit der Messungen* ermöglicht wird, was für die praktische Anwendung oft von grosser Wichtigkeit ist.

11.

Astatisches Nadelsystem mit unifilarer Aufhängung.

Derselbe Zweck aber, zu welchem nach dem vorigen Artikel die *bifilare* Aufhängung besonders geeignet war und, zumal wenn es sich um kleinere Nadeln handelte, den Vorzug vor der *unifilaren* Aufhängung zu verdienen schien, lässt sich aber auch durch die *unifilare* Aufhängung erreichen, wenn die einfache Nadel mit einem *astatischen Nadelsystem* vertauscht wird, d. h., mit einem Systeme von zwei gleichen mit einander fest verbundenen Nadeln, von denen die eine vom Multiplikator umschlossen ist, die andere mit entgegengesetzter Lage der Pole ausserhalb, entweder über oder unter dem Multiplikator, sich befindet. Die magnetischen Direktionskräfte der beiden verbundenen Nadeln heben dann nämlich einander auf, und die statische Direktionskraft kann durch die Wahl eines geeigneten Drahts für die Aufhängung so regulirt werden, dass die angemessenste Schwingungsdauer erhalten wird. Ausser allen Vortheilen, die auch durch *bifilare* Aufhängung einer einfachen Nadel erreicht werden konnten, bietet diese Einrichtung noch einen besonderen Vorzug dadurch dar, dass der Einfluss mancher sonst unvermeidlichen äusseren Störungen ganz vermieden wird. Solche äussere Störungen haben nämlich ihren Grund besonders in den *Deklinationsvariationen des Erdmagnetismus.* Sind diese Variationen in der Regel auch während der kurzen Dauer der Beobachtungen an sich nur gering, so darf doch nicht übersehen werden, dass dieselben bei einer Nadel, welche von der blossen *Differenz der statischen und magnetischen Direktionskraft* dirigirt wird, was bei einer empfindlichen bifilaren Aufhängung der Fall war, so viel Mal vergrössert werden, als jene Differenz in der ganzen magnetischen Direktionskraft enthalten ist. Die Gleichgewichtslage der Nadel kann in Folge hiervon oft einem raschen und erheblich grossen Wechsel unterworfen sein, welcher die präcise Ausführung der Induktionsstösse stört und die Sicherheit und Uebereinstimmung, wodurch diese Beobachtungen sich sonst auszeichnen, sehr vermindert. Diese Störungen werden bei dem beschriebenen *astatischen* Nadelsysteme ganz vermieden, wenn man dabei auf genaue Gleichheit der Nadeln und auf den Parallelismus ihrer Axen achtet; denn es leuchtet ein, dass auf das Verhalten eines solchen Nadelsystems die Variationen des Erdmagnetismus gar keinen

Einfluss haben. Wenn also nur die *statische* Direktionskraft konstant ist, so ist die Gleichgewichtslage eines solchen Systems ganz unveränderlich und gestattet die präciseste Ausführung der Beobachtungen.

12.

Theorie des Multiplikators.

Nach den vorausgeschickten Erörterungen über die Konstruktion des Galvanometers im Allgemeinen und insbesondere über die Konstruktion der Galvanometernadel und deren Aufhängung, gehen wir zur Hauptaufgabe über, nämlich zur Theorie des Multiplikators, die für den vorliegenden Zweck einer vollständigeren Entwicklung bedarf, als bisher von ihr gegeben worden ist.

Die Resultate früherer Erörterungen lassen sich im Wesentlichen folgendermaassen kurz zusammenfassen. Handelt es sich *erstens* um den Multiplikator einer Tangenten-Boussole, welcher einen kreisförmigen Ring von sehr grossem Halbmesser bilden soll, gegen welchen die Dimensionen der Nadel sowohl wie die seines eigenen Querschnitts sehr klein sind, so leuchtet ein, dass die Gestalt dieses Querschnitts von sehr geringem Einfluss ist. Soll dennoch diese Gestalt nicht willkürlicher Bestimmung überlassen bleiben, so leuchtet erstens aus praktischen Gründen die Zweckmässigkeit, dem Querschnitt die Gestalt eines Rechtecks zu geben, von selbst ein, und sodann ergiebt sich für das Verhältniss der beiden Seiten dieses Rechtecks die einfache Regel, wenn der Flächeninhalt des Rechtecks gegeben und in Theilen des Quadrats des Ringhalbmessers ausgedrückt $= 2\varepsilon^3$ ist, dass die Höhe des Rechtecks zur Basis sich wie $\varepsilon : 2$ verhalte.

Handelt es sich *zweitens* aber um den Multiplikator eines Galvanoskops, welcher die Nadel so eng umschliessen soll, als die freie Bewegung der Nadel es gestattet, so ist blos die Gestalt der die Nadel zunächst umschliessenden Umwindung als gegeben zu betrachten. In der Regel wird diese Umwindung eine Figur bilden, welche von zwei Parallellinien und zwei Halbkreisen umschlossen ist. Aus Gründen der praktischen Zweckmässigkeit kann sodann angenommen werden, dass eine Anzahl Windungen von gleicher Gestalt und Grösse neben einander in der Oberfläche einer Säule, die jene Figur zur Basis hat, liegen und die unterste Schicht der Multiplikatorwindungen bilden, über welche alle übrigen Windungen in Gestalt von Parallelschichten aufgewunden werden. Der ganze Multiplikator erhält dadurch die Gestalt eines Rings, für welchen aber die Gestalt seines Querschnitts noch näher zu bestimmen ist.

Diese Bestimmung wird erhalten, wenn man das von irgend einer

Windung auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment betrachtet. Bei dieser Betrachtung des Drehungsmoments genügt es (wie in der Note zu Art. 10 geschehen), von der Nadel nur zwei Punkte, die man als Nordpol und Südpol bezeichnen kann, und deren Abstand, $= l^0$, der Länge der beiden Parallelseiten der Umwindung gleich gesetzt werden darf, zu berücksichtigen. Es ist dann das Drehungsmoment, welches der durch die Windung gehende Strom i auf die Nadel ausübt, aus mehreren Theilen zusammengesetzt, nämlich *erstens* aus dem, welcher von den beiden Halbkreisen auf die in ihren Axen liegenden Nadelpole ausgeübt wird, wenn man unter Axe eines Halbkreises das in seinem Mittelpunkte auf seine Ebene errichtete Perpendikel versteht; *zweitens* aus dem, welcher von den beiden Parallelseiten der Umwindung herrührt; *drittens* aus dem, welcher von jedem Halbkreis auf den in der Axe des anderen Halbkreises gelegenen Nadelpol ausgeübt wird. Bezeichnet r den Halbmesser der Halbkreise und x die Länge des von einem Nadelpole auf die Ebene des Halbkreises gefällten Perpendikels, so wird der *erste* $= \pi r^2 mi/(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}$, der *zweite* $= 2rl^0 mi/[(r^2 + x^2)\sqrt{l^{02} + r^2 + x^2}]$, der *dritte* Theil $= 2rmi \int (l^0 \cos\varphi + r)\, d\varphi/(l^{02} + r^2 + x^2 + 2rl^0 \cos\varphi)^{\frac{3}{2}}$ gefunden, wo der Integralwerth zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/2$ zu nehmen ist. Hält man sich dann vorzugsweise an die Betrachtung der beiden *Hauptfälle*, nämlich *erstens*, wo $l^0 = 0$ ist oder die Multiplikatorwindungen Kreise bilden, und *zweitens*, wo l^0 so gross ist, dass x und r als dagegen verschwindend betrachtet werden dürfen, so ist im *ersten Falle* der zweite Theil $= 0$ und der dritte dem ersten gleich, $= \pi r^2 mi/(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}$, im *zweiten Falle* wird der dritte Theil $= 2rmi/l^{02}$. Bezeichnet man nun den Quotienten des ganzen Drehungsmoments einer Umwindung, dividirt mit ihrer Länge, mit dem Namen des specifischen Drehungsmoments, so sind alle Windungen, für welche das specifische Drehungsmoment gleich ist, in dem Falle wenn $l^0 = 0$ ist, d. h. wenn die Multiplikatorwindungen kreisförmig sind, durch folgende Gleichung gegeben:

$$\frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{2\pi r^2 mi}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{Konst.};$$

in dem Falle wenn l^0 gegen r und x sehr gross ist, d. h. wenn die Multiplikatorwindungen sehr langgestreckt sind, durch folgende Gleichung:

$$\frac{1}{2(l^0 + \pi r)} \left(\frac{\pi r^2 mi}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2rl^0 mi}{(r^2 + x^2)\sqrt{l^{02} + r^2 + x^2}} + \frac{2rmi}{l^{02}} \right) = \text{Konst.},$$

wofür auch gesetzt werden kann

$$\frac{mi}{2l^0} \left(\frac{\pi r^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2r}{r^2 + x^2} \right) = \text{Konst.}$$

Setzt man im ersteren Falle die Konstante $= mi/d^2$, oder, indem man d zum Längenmaasse nimmt, $= mi$, so erhält man

$$\frac{r}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = 1\,;$$

setzt man im letzteren Falle die Konstante $= mi/2l^0 d$ oder, indem man d zum Längenmaasse nimmt, $= mi/2l^0$, so erhält man

$$\frac{\pi r^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2r}{r^2 + x^2} = 1.$$

Setzt man endlich in beiden Gleichungen $r^2 + x^2 = \varrho^2$, so ergiebt sich

für den ersten Fall $r = \varrho^3$,
für den zweiten Fall $\pi r = \varrho\,(\sqrt{1 + \pi\varrho} - 1)$.

Nun wächst aber die Empfindlichkeit des Galvanometers proportional mit dem vom Multiplikator auf die Nadel ausgeübten Drehungsmoment, und von letzterem leuchtet ein, dass, wenn sein Werth ein Maximum sein soll, das specifische Drehungsmoment aller an der äusseren Oberfläche gelegenen Umwindungen gleich sein müsse. Hieraus folgt, dass die äussere Begrenzung des Querschnitts des Multiplikators nach obigen Gleichungen bestimmt werden müsse, wenn das Galvanometer die grösste Empfindlichkeit besitzen soll. Die innere Begrenzung des Querschnitts des Multiplikators ist durch den für die Nadel frei zu lassenden Raum gegeben.

Fig. 1 der Taf. I stellt hiernach den Querschnitt des Multiplikators in beiden Fällen dar. Die gegebene innere Begrenzung ist durch die Linie AB, $A'B'$ angedeutet; ADB, $A'D'B'$ sind die äusseren Begrenzungen im ersteren, aDb, $a'D'b'$ im letzteren Falle.

Wird nun aber auch hier, wie beim Multiplikator einer Tangenten-Boussole, ein *rectangulärer Querschnitt* vorgezogen, für welchen nur das Verhältniss der beiden Rechteckseiten zu bestimmen ist, so ergiebt sich für den ersteren Fall, wo die Multiplikatorwindungen kreisförmig sind, wenn man den Halbmesser des für die Nadel frei zu lassenden cylindrischen Raums $= 1$ setzt und die dem Halbmesser parallele Seite des Rechtecks mit a, die darauf senkrechte Seite mit $2b$ bezeichnet, folgende Gleichung:

$$\frac{2}{(1+a)^2 - 1}\int\limits_1^{1+a} \frac{r^2\,dr}{(r^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{b}\int\limits_0^{b} \frac{(1+a)\,dx}{([1+a]^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$

oder, wenn die Integration ausgeführt wird,

$$\log\frac{1 + a + \sqrt{(1+a)^2 + b^2}}{1 + \sqrt{1 + b^2}} = \frac{3\,(1+a)^2 - 1}{2\,(1+a)\sqrt{(1+a)^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}.$$

Hiernach ist,

für kleine Werthe von a, $b = \sqrt{a}$,
für $a = 1$, $b = 1{,}1444$
für $a = \infty$, $b = 0{,}4413 \cdot a$.

Für den letzteren Fall ergiebt sich auf dieselbe Weise folgende Gleichung:

$$\frac{1}{a}\int\limits_1^{1+a}\frac{\pi r^2 dr}{(r^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a}\int\limits_1^{1+a}\frac{2r dr}{r^2+b^2} = \frac{1}{b}\int\limits_0^{b}\frac{\pi(1+a)^2 dx}{([1+a]^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{b}\int\limits_0^{b}\frac{2(1+a)\,dx}{(1+a)^2+x^2},$$

woraus erhalten wird

$$\log\frac{(1+a)^2+b^2}{1+b^2} + \pi\log\frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}}$$
$$= \frac{\pi(1+2a)}{\sqrt{(1+a)^2+b^2}} - \frac{\pi}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{2a}{b}\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{1+a}.$$

Hiernach ist,

für kleine Werthe von a, $b^2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{2+\pi}{4+3\pi}\cdot a = 0{,}5745 \cdot a$,
für $a = 1$, $b = 0{,}8322$
für $a = \infty$, $b = 0{,}3435 \cdot a$.

Fig. 2 der Taf. I stellt diese Querschnitte, wenn $a = 1$ ist, dar. Die gegebene innere Begrenzung gegen den für die Nadel frei gelassenen Raum ist durch die Linien AB, $A'B'$ angedeutet; $ADEB$, $A'D'E'B'$ stellen die beiden rectangulären Querschnitte eines kreisförmigen, $adeb$, $a'd'e'b'$ die eines langgestreckten Multiplikators dar. Der erstere Querschnitt $ADEB$ ist mehr als doppelt so gross wie das Quadrat des Abstandes c der Nadelaxe vom Multiplikator, das letztere $adeb$ ist nahe $\frac{4}{3}$ desselben Quadrats. Soll bei gleicher Grösse des für die Nadel freigelassenen Raums ein kleinerer Multiplikator gebildet werden, so stellen $\alpha\delta\varepsilon\zeta$, $\alpha'\delta'\varepsilon'\zeta'$ die Querschnitte des kreisförmigen, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{e}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{e}'\mathfrak{b}'$ die eines langgestreckten Multiplikators dar, von denen einer der ersteren nahe $\frac{1}{16}$, einer der letzteren nahe $\frac{1}{21}$ des Quadrats von c beträgt.

Bei der Gestalt des Querschnitts des Multiplikators ist endlich noch besonders darauf Rücksicht zu nehmen, dass die *Proportionalität der beobachteten Ablenkungen mit den Stromintensitäten* innerhalb möglichst weiter Grenzen erhalten werde, was für Messungszwecke sehr wichtig ist. Es genügt in dieser Beziehung, zu bemerken, dass diese Proportionalität desto vollkommener ist, je grösser, bei gleichem Querschnitt, die Seite $2b$ gegen a ist; doch braucht, bei dem geringen Umfange der Ablenkungen bei magnetometrischer Beobachtungsweise, eine solche Vergrösserung der Seite $2b$ im Vergleich zu a nicht auf Kosten der Empfindlichkeit zu geschehen, was der Fall sein würde, wenn b den oben

bestimmten Werth überstiege. Dagegen muss aber gänzlich vermieden werden, was oft geschieht, dass der Multiplikator in zwei durch einen Zwischenraum getrennte Theile zerfällt wird, um Platz für die Aufhängung der Nadel zu gewinnen. Zwischen der vom Multiplikator umschlossenen Nadel und dem Aufhängungsfaden oder der astatisch zu verbindenden Nadel lässt sich immer leicht eine hakenförmige, um den Querschnitt des Multiplikators herumgeführte, hinreichend feste und freie Verbindung herstellen, welche ohne anzustossen einen genügenden Spielraum für die Nadelbewegung gewährt, so dass es keiner Durchbrechung des Multiplikators für die Aufhängung der Nadel bedarf.

13.

In vielen Fällen ist für das zu konstruirende Galvanometer nicht blos der für die Nadel frei zu lassende Spielraum, d. i. bei kreisförmiger Gestalt der Halbmesser c des vom Multiplikator umschlossenen Cylinderraums, sondern auch der zum Multiplikator zu verwendende Draht selbst mit seinem Rauminhalte v gegeben. In allen solchen Fällen genügen die im vorigen Artikel entwickelten Vorschriften; denn aus dem gegebenen Halbmesser c und Rauminhalte v können danach sowohl a wie b berechnet werden, nämlich für kreisförmige Multiplikatoren nach den beiden Gleichungen

$$\log \frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}} = \frac{3(1+a)^2-1}{2(1+a)\sqrt{(1+a)^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}},$$

$$v = 2\pi(2+a)\,a\,b\,c^3.$$

Anders verhält es sich aber, wenn, wie im vorliegenden Falle, zur Erreichung höchster Empfindlichkeit und stärkster Dämpfung auch die Wahl des Drahts ganz frei gestellt wird.

Diese Wahl bezieht sich, abgesehen von der specifischen Beschaffenheit (gewöhnlich Kupfer), blos auf den Querschnitt und den Rauminhalt des Drahts. Da aber schon Art. 8 angeführt ist, dass es vortheilhaft sei, den Widerstand des zum Multiplikator zu verwendenden Drahts dem der übrigen Kette, zu welcher der Induktor gehört, gleich zu machen, so reducirt sich jene Freiheit entweder auf die Wahl des Querschnitts, aus welchem der Rauminhalt, oder auf die Wahl des Rauminhalts, woraus der Querschnitt bestimmt wird. Es bleibt also zu bestimmen übrig, wie diese Wahl zur Vermehrung der *Empfindlichkeit* und *Dämpfung* am zweckmässigsten getroffen werden könne.

Für die Wahl des Rauminhalts, aus dem in jedem Falle die Drahtstärke zu bestimmen ist, kommt nun zunächst in Betracht, dass *die Empfindlichkeit* mit wachsendem Rauminhalte zwar anfangs auch rasch

wächst, dass aber dieses Wachsthum kein gleichförmiges ist, sondern abnimmt bis es ganz verschwindet, worauf sogar der Fall eintritt, wo bei wachsendem Rauminhalte die Empfindlichkeit abnimmt. Es giebt also einen bestimmten Werth des Rauminhalts, für welchen die Empfindlichkeit am grössten ist.

Um diesen Werth zu bestimmen, muss der Ausdruck der Empfindlichkeit genauer entwickelt werden. Zum Maass der Empfindlichkeit dient diejenige Drehungsgeschwindigkeit f, welche der Nadel von der Stromeinheit in der Zeiteinheit ertheilt wird; es muss daher f zunächst entwickelt werden.

Nach dem elektromagnetischen Gesetze ist nun das von dem Elemente a einer Multiplikatorwindung, durch welche die Stromeinheit geht, auf die Galvanometernadel m ausgeübte Drehungsmoment, wenn r den Halbmesser der Windung und x den Abstand der Drehungsaxe der Nadel von der Ebene der Windung, beide in Theilen des Halbmessers c des für die Nadel freigelassenen Raums ausgedrückt, bezeichnen, im Falle der Kreisform,

$$= \frac{am}{c^2} \cdot \frac{r}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit dx, so giebt der Integralwerth desselben von $x = -b$ bis $x = +b$, mit $2b$ dividirt, das *mittlere* Drehungsmoment aller, gleichem Werthe von r entsprechenden, Stromelemente

$$= \frac{am}{c^2} \cdot \frac{1}{r\sqrt{r^2 + b^2}},$$

woraus das *mittlere* Drehungsmoment aller, gleichem Werthe von r entsprechenden, Multiplikatorwindungen durch Multiplikation mit $2\pi rc/a$ erhalten wird, nämlich

$$= \frac{2\pi m}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2}}.$$

Multiplicirt man nun ferner diesen Ausdruck mit dr, so giebt der Integralwerth von $r = 1$ bis $r = 1 + a$, mit a dividirt, das *mittlere* Drehungsmoment aller Windungen des ganzen Multiplikators

$$= \frac{2\pi m}{ac} \log \frac{1 + a + \sqrt{(1 + a)^2 + b^2}}{1 + \sqrt{1 + b^2}},$$

woraus das Drehungsmoment des ganzen Multiplikators durch Multiplikation mit der Länge l des ganzen Multiplikatordrahts und Division mit der mittleren Länge aller seiner Umwindungen $2\pi c\,(1 + \frac{1}{2}a)$ erhalten wird.

Der Quotient aus diesem Drehungsmomente, dividirt mit dem Trägheitsmoment der Nadel k, ist der gesuchte Ausdruck von f, oder es ist

$$f = \frac{2l}{(2+a)\,ac^2} \cdot \frac{m}{k} \log \frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}}.$$

Bezeichnet nun w den gegebenen absoluten Widerstand des Multiplikatordrahts, und $\varkappa$ den gegebenen specifischen Widerstand des Metalls (Kupfers), woraus er besteht, so ist der Querschnitt des Drahts, nach dem Ohm'schen Gesetze, $= [\varkappa/w] \,.\, l$, also der Rauminhalt des ganzen Multiplikators

$$\frac{\varkappa}{w}\, l^2 = 2\pi\,(2+a)\,abc^3.$$

Setzt man in obigen Ausdruck von f den hieraus sich ergebenden Werth von l, so erhält man

$$f = 2\frac{m}{k}\sqrt{\frac{2\pi w}{c\varkappa}} \cdot \sqrt{\frac{b}{(2+a)a}} \cdot \log \frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}}.$$

Da nun m, k, w, c, $\varkappa$ gegebene Grössen sind, so ändert sich die Empfindlichkeit f hiernach blos mit dem Werthe von a und wird ein Maximum, wenn

$$\sqrt{\frac{b}{(2+a)a}} \cdot \log \frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}} = \text{Maximum},$$

worin b als Funktion von a durch die erste im Anfang des Artikels angeführte Gleichung gegeben ist. Fügt man dann noch die daselbst angeführte zweite Gleichung für v, und die aus dem Ohm'schen Gesetze folgende Gleichung, $l^2 = [w/\varkappa] \,.\, v$, für die Drahtlänge l (woraus sich der Querschnitt $= v/l$ ergiebt) hinzu, so lassen sich die vier Elemente a, b, v, l bestimmen, in denen alle Vorschriften zur Konstruktion des Multiplikators vollständig enthalten sind.

Berücksichtigt man zunächst blos die Gleichung

$$\sqrt{\frac{b}{(2+a)a}} \cdot \log \frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}} = \text{Maximum},$$

setzt aber darin $b/(1+a) = \beta$ als bekannt oder gegeben voraus, so kann, $r = 1+a$ gesetzt, geschrieben werden

$$\sqrt{\frac{r}{r^2-1}} \cdot \left(\log r + \log \frac{1+\sqrt{1+\beta^2}}{1+\sqrt{1+(\beta r)^2}}\right) = \text{Maximum},$$

woraus durch Differentiation folgt

$$\frac{1+r^2}{2r^{\frac{1}{2}}(r^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left(\log r + \log \frac{1+\sqrt{1+\beta^2}}{1+\sqrt{1+(\beta r)^2}}\right)$$

$$-\sqrt{\frac{r}{r^2-1}} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2 r^2}{1+(\beta r)^2+\sqrt{1+(\beta r)^2}}\right) = 0,$$

was sich zurückführen lässt auf

$$\log\frac{r+\sqrt{r^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}}=\frac{3r^2-1}{1+r^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}.$$

Nimmt man nun ferner noch die im Anfang dieses Artikels angeführte Gleichung, nämlich, $r=1+a$ gesetzt,

$$\log\frac{r+\sqrt{r^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}}=\frac{3r^2-1}{2r\sqrt{r^2+b^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$$

hinzu, so erhält man aus diesen beiden Gleichungen eine dritte

$$(1+r^2)\sqrt{1+b^2}=2r\sqrt{r^2+b^2},$$

woraus

$$b^2=\frac{3r^2+1}{r^2-1}$$

folgt; und substituirt man diesen Werth von b^2 in die erste Gleichung, so findet man zur Bestimmung von r

$$\log\frac{r\sqrt{r^2-1}+r^2+1}{\sqrt{r^2-1}+2r}=\frac{(r^2-1)^{\frac{3}{2}}}{r(1+r^2)}.$$

Hieraus findet man $r=3{,}0951$, woraus $a=r-1$, $b=(3r^2+1)/(r^2-1)$, $v=2\pi(2+a)abc^3$, $l=\sqrt{wv/\varkappa}$ berechnet werden kann, nämlich

$$\begin{aligned} a &= 2{,}095\,1, \\ b &= 1{,}861\,78, \\ v &= 100{,}364\,.\,c^3, \\ l &= 10{,}018\,2\,.\sqrt{\frac{w\,.\,c^3}{\varkappa}}. \end{aligned}$$

Alle diese Vorschriften für die Konstruktion des Multiplikators ergeben sich also blos aus der Forderung *grösster Empfindlichkeit*, ohne alle Rücksicht auf die *Dämpfung*, und es bleibt daher besonders zu erörtern übrig, wie sich die *Dämpfung* bei einem solchen Multiplikator verhalte. Beachtet man nun in Beziehung auf die *Dämpfung*, dass sie zwar im Allgemeinen nicht allein vom Multiplikator, sondern auch vom Nadelmagnetismus abhängt, dass aber in unserem Falle, wo es sich blos um die *Theorie des Multiplikators* handelt, der Nadelmagnetismus als gegeben zu betrachten sei, so kann leicht bewiesen werden, dass dieselbe unter diesen Verhältnissen, bei gegebenem Nadelmagnetismus, mit der Empfindlichkeit wächst und zugleich mit ihr den höchsten Werth erreicht, so dass durch die nämliche Konstruktion des Multiplikators, durch welche die höchste Empfindlichkeit hergestellt wird, zugleich auch die stärkste Dämpfung erhalten werde. Wird nämlich das oben angegebene Maass der Empfindlichkeit wieder mit f bezeichnet, so ist,

wie schon Art. 6 angeführt worden, $f^2 = [2w/k\tau] \cdot \lambda$, wo τ die Schwingungsdauer bei geschlossener Kette (die sich zur Schwingungsdauer t bei offener Kette wie $\sqrt{1 + \lambda^2/\pi^2} : 1$ verhält) und w den Widerstand der ganzen Kette, zu welcher der Multiplikator und Induktor gehört, bezeichneten, ferner $e^\lambda : 1$ das Verhältniss zweier auf einander folgenden Schwingungsbögen war, dessen Exponent $\lambda = [k\tau/2w] \cdot f^2$, bei gegebener Schwingungsdauer, als Maass der Dämpfung genommen werden kann. Dieses Maass der Dämpfung ist also, bei konstantem Werth des Faktors $k\tau/2w$, dem Quadrate der Empfindlichkeit f proportional, woraus folgt, dass der höchsten Empfindlichkeit auch die stärkste Dämpfung entspricht.

Für den Fall der höchsten Empfindlichkeit war aber nach S. 49

$$f = 2\frac{m}{k}\sqrt{\frac{2\pi w}{c\varkappa}} \cdot \sqrt{\frac{b}{(2+a)a}} \cdot \log \frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}} = 1{,}79227 \cdot \frac{m}{k}\sqrt{\frac{w}{c\varkappa}},$$

wo w den *Multiplikatorwiderstand* bezeichnete; der Widerstand der *ganzen Kette* ergab sich doppelt so gross, so dass nach dieser Bezeichnung

$$\lambda = \frac{k\tau}{4w} f^2 = 0{,}803\,056 \cdot \frac{\tau}{c} \cdot \frac{m^2}{k\varkappa}.$$

Nun sollte aber nach Art. 9 das Verhältniss $e^\lambda : 1 = e : 1$ sein, folglich

$$\lambda = 0{,}803\,056 \cdot \frac{\tau}{c} \cdot \frac{m^2}{k\varkappa} = 1.$$

Wäre also die der höchsten Empfindlichkeit entsprechende Dämpfung zu stark, so brauchte nur die Galvanometernadel mit einer schwächeren vertauscht zu werden, wobei es leicht so eingerichtet werden kann, dass m/k, und folglich die Empfindlichkeit f, bei dieser Vertauschung unverändert bleibt.

14.

Der Einfachheit wegen sind in dem vorigen Artikel blos die Vorschriften zur Konstruktion eines Multiplikators mit *kreisförmigen* Umwindungen entwickelt worden, ungeachtet zu feineren Beobachtungen in der Regel *langgestreckte* Multiplikatoren gebraucht werden; es leuchtet aber ein, dass aus den Art. 12 auch für *langgestreckte* Multiplikatoren entwickelten Bestimmungen ähnliche Vorschriften für die letzteren abgeleitet werden können. Für den praktischen Gebrauch wird es aber selten einer solchen genaueren Entwickelung bedürfen, sondern es wird genügen, den Querschnitt eines *langgestreckten* Multiplikators den Art. 12 gegebenen Vorschriften gemäss einzurichten, im Uebrigen aber die im vorigen Artikel für kreisförmige Multiplikatoren gegebenen Vorschriften

zu befolgen, blos mit der Abänderung, dass der Ausdruck der Empfindlichkeit f in dem Verhältniss von

$$1 : \frac{2+\pi}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi c(1+\frac{1}{2}a)}{\pi c(1+\frac{1}{2}a)+l^0}}$$

verkleinert wird, wonach auch das Verhältniss zweier auf einander folgenden Schwingungsbögen abzuändern, nämlich dessen Exponent

$$\lambda = 0{,}803\,056 \cdot \left(\frac{2+\pi}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi c(1+\frac{1}{2}a)}{\pi c(1+\frac{1}{2}a)+l^0} \cdot \frac{\tau}{c} \cdot \frac{m^2}{k\varkappa}$$

zu setzen ist: folglich, weil nach Art. 9 $e^\lambda : 1 = e : 1$ sein soll,

$$0{,}803\,056 \cdot \left(\frac{2+\pi}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi c(1+\frac{1}{2}a)}{\pi c(1+\frac{1}{2}a)+l^0} \cdot \frac{\tau}{c} \cdot \frac{m^2}{k\varkappa} = 1.$$

Es genügt nämlich hier, wie in der Note zu Art. 10, nur eine einzige Windung des Multiplikators in Betracht zu ziehen, deren Drehungsmoment für grosse Werthe von l^0 im Verhältnisse von $2\pi : 2+\pi$ verkleinert wird. Dazu kommt, dass, indem die Drahtmasse durch die Verlängerung des Multiplikators, bei unverändertem Querschnitte und Widerstande, im Verhältnisse von $\pi c(1+\frac{1}{2}a) : \pi c(1+\frac{1}{2}a)+l^0$ wächst, die Zahl der Umwindungen, und proportional damit sowohl das Drehungsmoment als auch die Empfindlichkeit des ganzen Multiplikators in dem Verhältnisse von $\sqrt{\pi c(1+\frac{1}{2}a)+l^0} : \sqrt{\pi c(1+\frac{1}{2}a)}$ abnehmen.

Endlich möge noch bemerkt werden, dass in der hier entwickelten Theorie des Multiplikators, ebenfalls blos der Einfachheit wegen, nur eine einfache *vom Multiplikator umschlossene* Nadel in Betracht gezogen worden ist. Für ein *astatisches Nadelsystem*, nach Art. 11, können daher die gefundenen Resultate nur dann unmittelbare Anwendung finden, wenn die vom Multiplikator nicht umschlossene Nadel, was leicht geschehen kann, vom Multiplikator so fern gehalten wird, dass seine Wirkung auf dieselbe gegen die auf die umschlossene Nadel verschwindet. In der Regel ist dies aber nicht der Fall, sondern die beiden Nadeln werden gewöhnlich symmetrisch in gleichem Abstande von der oberen Seite des Multiplikators aufgehangen, woraus sich eine Vergrösserung der Empfindlichkeit sowohl wie der Dämpfung ergiebt. Es wird nämlich dadurch bei einem *langgestreckten* Multiplikator die Empfindlichkeit nahezu in dem Verhältnisse von 3 : 4, die Dämpfung in dem Verhältnisse von 9 : 16 vergrössert.

III. *Galvanometrische Beobachtungen.*

15.

Nach Erörterung der Methode der absoluten Widerstandsmessung und der Konstruktion des Galvanometers gehen wir zur Betrachtung der *Beobachtungen* über, welche in *galvanometrische* und *magnetische*

zerfällt werden können, von denen aber die letzteren blos die Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus betreffen, dessen Bestimmung nach absolutem Werthe schon von Gauss so vollständig abgehandelt worden ist, dass die dazu erforderlichen Beobachtungen keiner weiteren Betrachtung mehr bedürfen.

Sollten nun die *galvanometrischen Beobachtungen* mit einem nach den Vorschriften des vorigen Abschnitts konstruirten Galvanometer gemacht werden, so müsste zur Herstellung desselben derjenige *Etalon*, um dessen Widerstand es sich vorzugsweise handelt, nämlich der zum allgemeinen Gebrauche ausersehene und zur Vergleichung der Widerstände aller Körper dienende Etalon, wirklich vorhanden und gegeben sein; denn er soll den Maassstab abgeben, nach welchem das Galvanometer zu konstruiren ist, damit der Widerstand der vom Multiplikator des Galvanometers und vom Induktor gebildeten Kette seinem Widerstande gleich werde, was nöthig ist, damit beide mit einander unmittelbar verglichen werden können.

Wäre nun dieser *Etalon-Widerstand* wirklich vorhanden und gegeben und seinem absoluten Werthe nach wenigstens näherungsweise bekannt, nämlich $W = 2w$, so würde hiernach, den im vorigen Abschnitte entwickelten Regeln gemäss, ein speciellerer Anschlag zur Konstruktion des ganzen galvanometrischen Apparats, des Galvanometers sowohl wie des Induktors, in folgender Weise leicht gemacht werden können.

Man nehme z. B. den Halbmesser des für die Galvanometernadel frei zu lassenden Raums $c = 20$ Millimeter an; im Falle eines *kreisförmigen* Multiplikators würde dann nach der Gleichung $v = 100{,}364 . c^3$ der Rauminhalt des Multiplikators $= 802\,912$ Kubikmillimeter erhalten werden. Dieser Draht wäre sodann der Vorschrift gemäss, nach welcher $b = 1{,}861\,78$ sein soll, in Gestalt eines Ringes von $2c = 40$ Millimeter Durchmesser im Lichten und $2bc = 74{,}471\,2$ Millimeter Höhe aufzuwickeln, wonach der äussere Ringdurchmesser $2(1 + a)c = 123{,}804$ Millimeter sich ergiebt. — Im Fall eines *langgestreckten* Multiplikators, welcher nöthig ist, um stärkere Nadeln anwenden und dadurch stärkere Dämpfung herstellen zu können, wäre nun zwar genau genommen der angegebene Querschnitt, den im vorigen Abschnitt entwickelten Regeln gemäss, etwas zu verändern, der äussere Durchmesser nämlich etwas zu vergrössern, die Ringhöhe dagegen etwas zu verkleinern, wobei auch die Grösse des Querschnitts eine kleine Aenderung erleiden würde. Da aber die danach genau bestimmte Grösse des Querschnitts einem Maximumwerthe der Empfindlichkeit entsprechen würde, wo kleine Aenderungen des Querschnitts nur einen unerheblichen Einfluss auf die Empfindlichkeit haben, so genügt es für den praktischen Zweck des Anschlags, an die unveränderte Grösse des für einen kreisförmigen

Multiplikator berechneten Querschnitts sich zu halten, wozu es jedoch nöthig ist, den Rauminhalt des Multiplikators in dem Verhältniss von $\pi c(1+\frac{1}{2}a):\pi c(1+\frac{1}{2}a)+l^0$ zu vergrössern, wenn l^0 die Länge der zwischen den beiden Halbringen eingeschalteten Parallelseiten bezeichnet. Nun ist $\pi c(1+\frac{1}{2}a)=128{,}65$ Millimeter, folglich wäre, für $l^0=128{,}65$, der Rauminhalt $=1\,605\,824$, für $l^0=385{,}95$, der Rauminhalt $=3\,211\,648$ Kubikmillimeter zu setzen. Die Drahtmasse würde hiernach, wenn man für Kupfer, aber mit Berücksichtigung der zur Isolation dienenden Umspinnung und der bei cylindrischer Drahtform bleibenden Zwischenräume, die mittlere Dichtigkeit $=6$ annimmt, für $l^0=128{,}65$ zu $9\,634\,944$, für $l^0=385{,}95$ zu $19\,269\,888$ Milligramm zu veranschlagen sein. Dieser Draht würde also auf einen Multiplikatorrahmen zu wickeln sein, welcher von zwei Halbkreisen, jeder von 20 Millimeter Halbmesser, und von zwei Parallelseiten, jede von der Länge $l^0=128{,}65$ oder $l^0=385{,}95$ Millimeter gebildet wäre, und der für den Draht einen ringförmigen Raum, der an Höhe etwas kleiner sein soll als der für einen kreisförmigen Multiplikator angegebene Werth $2bc$, also einen Raum von nahe 70 Millimeter Höhe, liesse. Die Länge l endlich des aus der angegebenen Masse zu bildenden Drahts würde aus der Gleichung $l^2=[w/\varkappa].v$ erhalten, wo $\varkappa$ den Widerstand des Drahts bei 1 Millimeter Länge und 1 Quadratmillimeter Querschnitt bezeichnet, wofür in runder Zahl, bei der angenommenen Dichtigkeit $=6$, der Werth $\varkappa=\frac{1}{6}.2\,000\,000$ gerechnet werden kann. Hiernach ergiebt sich für $l^0=128{,}65$ der Werth von $l=2{,}1949\sqrt{w}$, für $l^0=385{,}95$, aber $l=3{,}104\sqrt{w}$. Wäre also z. B. der gegebene Etalonwiderstand $W=2w=2.10^{10}$, so wäre aus der angegebenen Masse für den Fall $l^0=128{,}65$ eine Drahtlänge von 219490 Millimeter, die 426 Umwindungen bilden würde, für den Fall $l^0=385{,}95$ eine Drahtlänge von 310400 Millimeter, die 302 Umwindungen bilden würde, herzustellen.

Was sodann die Herstellung des *astatischen Nadelsystems* betrifft, so kann das Trägheitsmoment k desselben in das der beiden Nadeln und das ihres festen Verbindungsstücks nebst Spiegel und übrigem Zubehör getheilt werden. Letzteres kann, da es von der Wahl der Nadeln unabhängig ist, als gegeben betrachtet werden und werde z. B. für Millimeter und Milligramme als Raum- und Massenmaass, $=20.10^6$ angenommen. Auch die Länge der Nadeln, welche sich nach der Länge des Multiplikators richten muss, kann für $l^0=128{,}65$ höchstens zu 150, für $l^0=385{,}95$ höchstens zu 400 Millimetern veranschlagt werden, wonach das Trägheitsmoment der beiden Nadeln im ersteren Falle $=\frac{1}{12}.150^2.p$, im letzteren Falle $=\frac{1}{12}.400^2.(\frac{8}{3})^3 p$ zu rechnen ist, wobei dünne und homogene Nadeln von ähnlicher Gestalt vorausgesetzt und die Masse des kleineren Nadelpaares mit p bezeichnet ist. Hiernach ist also das

Trägheitsmoment des ganzen astatischen Nadelsystems, für $l^0 = 128{,}65$, $k = 20 \,.\, 10^6 + \frac{1}{12} \,.\, 150^2 \,.\, p$, für $l^0 = 385{,}95$, $k = 20 \,.\, 10^6 + \frac{1}{12} \,.\, 400^2 \,.\, (\frac{8}{3})^3 \,.\, p$. Die Schwingungsdauer des Systems kann durch angemessene Wahl des Aufhängungsdrahts ganz den Bedürfnissen der Beobachtung angepasst werden, wonach die Schwingungsdauer $\tau = 30$ Sekunden angenommen werde. Da nun ausserdem der Widerstand des Drahts bei 1 Millimeter Länge und 1 Quadratmillimeter Querschnitt $\varkappa = \frac{1}{6}\, 2\,000\,000$ angenommen worden ist, so ergiebt sich nach der Gleichung Art. 14

$$0{,}803056 \cdot \left(\frac{2+\pi}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi c(1+\frac{1}{2}a)}{\pi c(1+\frac{1}{2}a)+l^0} \cdot \frac{\tau}{c} \cdot \frac{m^2}{\varkappa k} = 1,$$

für $l^0 = 128{,}65$ der Werth des Magnetismus einer Nadel m gleich dem geometrischen Mittel aus den beiden Zahlen 824880 und $20 \,.\, 10^6 + 1875\,p$; für $l^0 = 385{,}95$ gleich dem aus den beiden Zahlen 1649760 und $20 \,.\, 10^6 + 252\,840\,p$. Wird also die Masse einer kleineren Nadel $\frac{1}{2}p = 50\,000$ Milligramm genommen, so soll ihr magnetisches Moment = 13083000, folglich für jedes Milligramm im Mittel 261,66 Einheiten betragen; die Masse der grösseren Nadel würde dann bei ähnlicher Gestalt 948160 Milligramm betragen und ihr magnetisches Moment sollte = 204310000, folglich für jedes Milligramm 215,48 Einheiten betragen. Magnetnadeln von dieser Grösse und Stärke lassen sich aber leicht darstellen.

Nach der am Schlusse von Art. 14 gemachten Bemerkung gelten aber diese Bestimmungen für ein *astatisches Nadelsystem* nur dann, wenn die äussere Nadel weit genug vom Multiplikator entfernt gehalten wird. Ist aber die Einrichtung so getroffen, dass die obere Seite des Multiplikators symmetrisch zwischen beiden Nadeln liegt, so ergiebt sich daraus für obige Gleichung die Aenderung, dass die Einheit im zweiten Gliede mit dem Bruch $\frac{9}{16}$ zu vertauschen ist, wonach die magnetischen Momente der Nadeln im Verhältniss von 4 : 3 kleiner erhalten werden, nämlich für die kleinere Nadel = 9812250, für die grössere Nadel = 153232500 Einheiten.

Was endlich den *Induktor* betrifft, so soll derselbe so konstruirt werden, dass die dazu verwendete Drahtlänge $2\pi\Sigma r$ einen Widerstand besitzt, welcher dem Widerstande w des Multiplikators nach Abzug des Widerstands der Verbindungsdrähte gleich ist; es ist also, wenn alle Drähte gleicher Art sind, $2\pi\Sigma r = l - l'$, wenn l' die Länge der beiden Verbindungsdrähte bezeichnet. Der Integralwerth des von einem Induktionsstosse hervorgebrachten Stroms ist alsdann, bei inducirendem Erdmagnetismus T, $\int i dt = [2\pi T/2w] \,.\, \Sigma r^2$ und folglich die durch einen solchen Induktionsstoss dem astatischen Nadelsystem ertheilte Drehungsgeschwindigkeit nach Art. 13 $\gamma = f \,.\int i dt = 2\pi T \,.\, \Sigma r^2 \,.\, \sqrt{1/wk\tau}$, wenn τ die Schwingungsdauer bei geschlossener Kette bezeichnet und in dem

Verhältniss $e^\lambda : 1$ zweier auf einander folgenden Schwingungsbögen $\lambda = 1$ ist. Aus dieser Drehungsgeschwindigkeit γ ergiebt sich, wenn sie der Nadel in der Ruhelage ertheilt wird, die Grösse der ersten darauf folgenden Ablenkung $\alpha = \gamma\tau \cdot \frac{1+e^2}{\sqrt{1+\pi^2}} \cdot e^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\pi}\text{ arc tang }\frac{1}{\pi}\right)}$, oder, wenn für γ sein Werth gesetzt wird,

$$\alpha = 2\pi T . \Sigma r^2 . (1+e^2)\sqrt{\frac{\tau}{(1+\pi^2)wk}} \cdot e^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\pi}\text{ arc tang }\frac{1}{\pi}\right)}.$$

Wären die Halbmesser aller Induktorwindungen gleich und ihre Anzahl n, so wäre die ganze Drahtlänge $l - l' = 2n\pi r$ und $\Sigma r^2 = nr^2 = [(l-l')/2\pi] . r$. Nach Substitution dieses Werthes erhält man aus der vorigen Gleichung

$$r = \frac{\alpha}{(1+e^2)(l-l')T} \cdot \sqrt{\frac{(1+\pi^2)wk}{\tau}} \cdot e^{\frac{3}{2}+\frac{1}{\pi}\text{ arc tang }\frac{1}{\pi}},$$

worin α so gross genommen werden kann, als die Skale, mit welcher die Ablenkungen der Nadel beobachtet werden sollen, es gestattet, da die nach der Zurückwerfungsmethode zu beobachtenden Ablenkungen den Werth α nie ganz erreichen. Wird also, wie es bei Magnetometern meist geschieht, eine 1 Meter lange Skale in 5 Meter Abstand vom Spiegel gebraucht, so kann $\alpha = \frac{1}{20}$ gesetzt werden, und ist $T = 1{,}81$ (wie gegenwärtig in Göttingen), so erhält man, da $\tau = 30$ angenommen worden,

$$r = 0{,}009\,799 \cdot \frac{\sqrt{wk}}{l-l'}.$$

In dem schon angeführten Beispiele, wo $W = 2w = 2 . 10^{10}$, ergiebt sich hieraus im *ersten* Falle, nämlich bei einem Multiplikator für welchen $l^0 = 128{,}65$, $l = 219\,490$ und $k = 20 . 10^6 + 1875\,p$, für $p = 100\,000$ und $l' = 10\,000$, $r = 67{,}38$ Millimeter; im *zweiten* Falle, nämlich bei einem Multiplikator für welchen $l^0 = 385{,}95$, $l = 310\,400$ und $k = 20 . 10^6 + 252\,840\,p$, für dieselben Werthe von p und l', $r = 518{,}9$ Millimeter. Doch ist zu bemerken, dass im Falle eines astatischen Nadelsystems hierbei vorausgesetzt worden ist, dass die äussere Nadel so entfernt vom Multiplikator sich befinde, dass seine Wirkung auf dieselbe gegen die auf die umschlossene Nadel verschwinde. Lägen aber beide Nadeln symmetrisch gegen die obere Seite des Multiplikators, so wäre r nahezu in dem Verhältniss von 4 : 3 zu verkleinern und es würde dann im *ersten* Fall $r = 50{,}53$, im *zweiten* $r = 389{,}18$ Millimeter sein sollen.

Sollten nun aber diese gefundenen Halbmesser für die genaue Ausmessung oder bequeme Drehung des Induktors nicht recht passen, so braucht man nur zur Konstruktion des Induktors eine andere Draht-

sorte zu nehmen als zum Multiplikator. Soll z. B. der Halbmesser den Werth μr statt r erhalten, so nehme man einen Draht, dessen Länge und Querschnitt zu denen des Multiplikatordrahts sich verhalten wie $1 : \mu$; es bleiben dann der Widerstand und die Summe der von allen Windungen umschlossenen Kreisflächen, folglich auch die von einem Induktionsstoss hervorgebrachten Wirkungen ganz unverändert.

Mit einem auf diese Weise, allen vorgeschriebenen Regeln gemäss hergestellten, Apparate würden also die *galvanometrischen Beobachtungen* zu machen sein, aus denen (in Verbindung mit der, mit den Instrumenten eines magnetischen Observatoriums ausgeführten und auf Ort und Zeit der galvanometrischen Beobachtungen zurückgeführten, Messung der horizontalen erdmagnetischen Kraft) der gegebene *Etalonwiderstand* seinem absoluten Werthe nach bestimmt werden sollte. — Ein solcher Apparat kann nun aber gegenwärtig, wo der für die Konstruktion maassgebende, im allgemeinen Gebrauche befindliche und zur Vergleichung der Widerstände aller Körper dienende Etalon noch mangelt, nicht' hergestellt werden.

Handelt es sich daher, wie schon bemerkt, hier nicht um die definitive Bestimmung eines solchen *Etalonwiderstands*, sondern nur um Prüfung der dazu erforderlichen *galvanometrischen Beobachtungen*, von denen eine Genauigkeit verlangt wird, welche der der übrigen Beobachtungen wenigstens gleichkommt, so genügen dazu auch Beobachtungen mit einem Apparate, welcher nicht allen vorgeschriebenen Regeln entspricht, wenn nur die Abweichungen entweder geringen Einfluss auf die Genauigkeit haben, oder wenn ihr Einfluss leicht und genau bestimmt werden kann. Es genügen daher zu diesem Zwecke folgende Beobachtungen.

16.

Die folgenden Beobachtungen sind mit einem Apparate gemacht, der von den gegebenen Vorschriften wesentlich nur darin abwich, dass ein schon vorhandener und genau bekannter Induktor benutzt wurde, dessen Widerstand bedeutend grösser war als der des Multiplikators. Der davon herrührende Einfluss auf die Beobachtungen lässt sich leicht bestimmen und wird unten näher betrachtet werden. Diese Abweichung ist daher, wenn es sich blos um Prüfung der in den *galvanometrischen Beobachtungen* erreichbaren Sicherheit und Genauigkeit handelt, von keinem erheblichen Nachtheil und die folgenden damit gemachten Beobachtungen können zu diesem Zwecke recht wohl benutzt werden.

Die folgende Tafel enthält einen Satz solcher nach der *Methode der Zurückwerfung* gemachten Beobachtungen, in fünf Kolumnen geordnet, in der Weise, dass, der Zeit nach, die *erste* Kolumne die

Beobachtungen 1, 5, 9 u. s. w., die *zweite* die Beobachtungen 2, 6, 10 u. s. w., die *dritte* die Beobachtungen 3, 7, 11 u. s. w., die *vierte* die Beobachtungen 4, 8, 12 u. s. w. enthält. Die Beobachtungen der beiden ersten Kolumnen sind die den *negativen* Induktionsstössen zunächst vorangegangenen und nachgefolgten Elongationen der Galvanometernadel; die Beobachtungen der beiden letzten Kolumnen sind die den *positiven* Induktionsstössen zunächst vorangegangenen und gefolgten Elongationen. Die Zahlen sind die im Augenblicke der grössten Ablenkung beobachteten Skalentheile.

1.	2.	3.	4.
661,5	600,9	844,8	904,9
659,6	598,7	842,7	903,0
657,2	596,2	840,0	900,4
654,5	593,5	837,5	897,7
751,7	590,4	834,8	894,8
649,5	588,3	832,6	892,7
647,3	586,2	830,5	890,8
645,4	584,7	828,2	889,0
643,3	582,3	826,7	886,7
641,4	580,4	824,3	884,5
639,2	578,0	822,3	882,6
637,5	576,6	820,3	881,3
635,2	574,8	819,0	879,7
634,2	573,9	817,9	879,3
632,8	573,1	816,1	877,0

Der Ruhestand der Nadel lässt sich aus je vier der Zeit nach auf einander folgenden Beobachtungen für den symmetrisch in der Mitte zwischen diesen Beobachtungen fallenden Augenblick bestimmen. Das Mittel zwischen zwei solchen aufeinander folgenden Ruheständen giebt alsdann den Ruhestand, welcher dem Augenblicke der dazwischen liegenden Elongation entspricht. Auf diese Weise sind die allen einzelnen Elongationsbeobachtungen der vorigen Tafel entsprechenden Ruhestände berechnet und die nach ihrem Abzuge sich ergebenden Elongationsweiten in folgender Tafel zusammengestellt worden: die beiden ersten und die beiden letzten Angaben in dieser Tafel sind mit Zuziehung zweier den Beobachtungen voriger Tafel vorausgehender und zweier nachfolgender, die blos zu diesem Zwecke gemacht worden waren, bestimmt.

Beim ersten Anblick ergiebt sich eine sehr befriedigende Uebereinstimmung unter diesen Beobachtungen, die noch mehr einleuchtet, wenn man beachtet, dass jede kleine Störung, welche die Elongation vor einem Induktionsstoss etwas verkleinert oder vergrössert, eine

Vergrösserung oder Verkleinerung der nächst folgenden Elongation bewirkt. Es geben daher die Mittelwerthe aus den beiden ersten und aus den beiden letzten Kolumnen, worin sich diese entgegengesetzten

1.	2.	3.	4.
— 92,49	— 152,46	+ 92,01	+ 152,63
— 92,14	— 152,54	+ 92,00	+ 152,91
— 92,24	— 152,57	+ 91,89	+ 152,96
— 92,29	— 152,64	+ 92,05	+ 152,99
— 92,29	— 152,89	+ 92,15	+ 152,69
— 92,07	— 152,74	+ 92,10	+ 152,74
— 92,14	— 152,74	+ 92,04	+ 152,76
— 92,16	— 152,35	+ 91,64	+ 153,00
— 92,21	— 152,74	+ 92,19	+ 152,66
— 92,10	— 152,52	+ 91,93	+ 152,70
— 92,05	— 152,76	+ 91,99	+ 152,68
— 92,00	— 152,49	+ 91,66	+ 153,18
— 92,54	— 152,57	+ 91,95	+ 152,89
— 92,36	— 152,47	+ 91,75	+ 153,43
— 92,75	— 151,94	+ 91,49	+ 152,91
— 92,255	— 152,561	+ 91,923	+ 152,875

Einflüsse nahezu ausgleichen, einen noch bestimmteren Prüfstein für die Genauigkeit der Resultate, welche nach dieser Beobachtungsmethode erlangt werden kann. Diese Mittelwerthe sind folgende.

1. 2.	Unterschied vom Mittel.	3. 4.	Unterschied vom Mittel.
— 122,475	+ 0,067	+ 122,320	+ 0,079
— 122,340	— 0,068	+ 122,455	— 0,056
— 122,405	— 0,003	+ 122,425	— 0,026
— 122,465	+ 0,057	+ 122,520	— 0,121
— 122,590	+ 0,182	+ 122,420	— 0,021
— 122,405	— 0,003	+ 122,420	— 0,021
— 122,440	+ 0,032	+ 122,400	— 0,001
— 122,255	— 0,153	+ 122,320	+ 0,079
— 122,475	+ 0,067	+ 122,425	— 0,026
— 122,310	— 0,098	+ 122,315	+ 0,084
— 122,405	— 0,003	+ 122,335	+ 0,064
— 122,245	— 0,163	+ 122,420	— 0,021
— 122,555	+ 0,147	+ 122,420	— 0,021
— 122,415	+ 0,007	+ 122,590	— 0,191
— 122,345	— 0,063	+ 122,200	+ 0,199
— 122,408	+ 0,095	+ 122,399	+ 0,089

Hieraus sieht man, dass der Unterschied der einzelnen Werthe von ihrem Mittel im Mittel weniger als $\frac{1}{10}$ Skalentheil beträgt.

17.

Nach der im vorigen Artikel geprüften Feinheit der Beobachtungsmethode genügt es für die weitere Betrachtung, sich blos an die vier Mittelwerthe der beobachteten Elongationen zu halten, nämlich, den vier Kolumnen entsprechend:

$$- 92{,}255 \qquad - 152{,}561 \qquad + 91{,}923 \qquad + 152{,}875.$$

Es sollte nun hierin die erste der dritten und die zweite der vierten Elongation entgegengesetzt gleich sein. Dass dies nicht ganz genau zutrifft, hat seinen Grund darin, dass in Folge der aus den im vorigen Artikel angeführten Beobachtungen unmittelbar erkennbaren allmähligen Abnahme des Ruhestandes der Galvanometernadel, die einzelnen Induktionsstösse nicht genau in dem Augenblicke, wo die Nadel die Ruhelage passirte, sondern in einem Augenblicke, wo die Nadel einen etwas höheren Skalenpunkt (nämlich denjenigen, welcher kurz vorher Ruhestand gewesen war) passirte, gegeben wurden, woraus sich leicht ergiebt, dass bei gleichförmig sinkendem Ruhestande die erste und die dritte Elongation nahezu um ebenso viel zu klein als die zweite und vierte zu gross gefunden werden musste. Dieses allmählige Sinken des Ruhestandes war eine Folge der elastischen Nachwirkung des erst vor Kurzem aufgehangenen Eisendrahts, welcher die Galvanometernadel trug, und würde mit der Zeit verschwunden sein. Diese Zeit abzuwarten schien nicht nöthig, weil bei der Gleichförmigkeit des Sinkens sich daraus kein nachtheiliger Einfluss für die Messung ergiebt. Auch ist es leicht, diesen Einfluss in Rechnung zu bringen, indem man den beobachteten Elongationen eine kleine Korrektion $\pm x$ beifügt. Wenn man also statt der beobachteten Elongationen

$$-92{,}255 + x \qquad -152{,}561 - x \qquad +91{,}923 + x \qquad +152{,}875 - x$$

und $x = 0{,}1615$ setzt, so erhält man die korrigirten Werthe:

$$- 92{,}0935 \qquad - 152{,}7225 \qquad + 92{,}0845 \qquad + 152{,}7135,$$

welche von der verlangten Symmetrie nicht um $\frac{1}{100}$ Skalentheil abweichen.

Für die weitere Betrachtung, wo nur die Differenz der vierten und zweiten Elongation $= 2a'$ und die der dritten und ersten $= 2b'$ in Rechnung kommen, bedarf es dieser Korrektionen gar nicht, weil diese Differenzen davon unabhängig sind, nämlich:

$$2a' = 305{,}436,$$
$$2b' = 184{,}178.$$

Bezeichnet nun r den Abstand des Spiegels von der Skale, und setzt man

$$a' = r \operatorname{tang} 2\varphi,$$
$$b' = r \operatorname{tang} 2\varphi',$$

so sind φ und φ' die Ablenkungswinkel der Galvanometernadel und können, wenn sie klein sind, den Art. 10 mit a und b bezeichneten Elongationen gleich gesetzt werden, aus denen die Drehungsgeschwindigkeit γ und das logarithmische Dekrement λ berechnet werden sollen. Für grössere Werthe von φ und φ' dagegen wachsen a und b, welche den Drehungsgeschwindigkeiten proportional bleiben sollen, wie die Sinusse der halben Ablenkungswinkel, wonach

$$a = 2 \sin \tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$b = 2 \sin \tfrac{1}{2}\varphi'$$

zu setzen ist. Auch diesen für Nadeln, die ohne Dämpfung schwingen, exakten Ausdrücken[1]) würde streng genommen noch eine kleine Korrektion beizufügen sein, die sich aus der bisher nicht entwickelten Theorie der Nadelschwingungen für grössere Schwingungsbögen unter Einwirkung der Dämpfung ergeben würde, die aber bei so kleinen Schwingungsbögen, wie mit Magnetometernadeln beobachtet werden, vernachlässigt werden darf.

Entwickelt man nun a und b nach Potenzen von a'/r und b'/r, so erhält man

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{a'}{r} - \frac{11}{64} \cdot \frac{a'^3}{r^3} + \ldots,$$
$$b = \frac{1}{2} \cdot \frac{b'}{r} - \frac{11}{64} \cdot \frac{b'^3}{r^3} + \ldots.$$

Bei den im vorigen Artikel beschriebenen Beobachtungen, aus denen $a' = 152{,}718$, $b' = 92{,}089$ in Skalentheilen erhalten wurde, war der Abstand des Spiegels von der Skale $r = 3245$ Skalentheile; folglich war

$$a = 0{,}023\,503,$$
$$b = 0{,}014\,186.$$

18.

Den Art. 16 beschriebenen Galvanometerbeobachtungen sind ferner die Hülfsbeobachtungen bei *geöffneter* Kette, über *Schwingungsdauer*

[1]) Für Nadeln, die ohne Dämpfung schwingen, bezeichnet nämlich nach Art. 4 a das Produkt aus der Schwingungsdauer t in die grösste Schwingungsgeschwindigkeit mit π dividirt. Die grösste Schwingungsgeschwindigkeit ist aber $= \frac{1}{2}\gamma$, wenn γ die ganze durch den Induktionsstoss hervorgebrachte Aenderung bezeichnet, weil ohne Dämpfung die Nadelgeschwindigkeit vor und nach dem Induktionsstoss (bei der Zurückwerfungsmethode) entgegengesetzt gleich sein soll; folglich ist $a = [t/2\pi] \,.\, \gamma$. Eine Nadel aber, deren Schwingungsdauer $= t$ ist, schwingt ebenso wie ein einfaches Pendel von der Länge $l = gt^2/\pi^2$, welches, wenn es im untersten Punkte seiner Bahn die Drehungsgeschwindigkeit $\frac{1}{2}\gamma$ besitzt, bis zur Höhe $\frac{1}{4}\gamma^2 l^2/2g = l \sin \operatorname{vers} \varphi$ aufsteigt, woraus $\frac{1}{2}\gamma = [2\pi/t] \,.\, \sin \frac{1}{2}\varphi$ folgt, also $a = 2 \sin \frac{1}{2}\varphi$.

und *Abnahme der Schwingungsbögen*, beizufügen. Diese Beobachtungen gaben

No. der Schwingung.	Zeit.	Schwingungsbogen.
0.	11^h 34′ 59,15″	464,0
17.	45′ 23,20″	376,3
34.	55′ 47,39″	307,6

Aus diesen Beobachtungen ergiebt sich die auf unendlich kleine Bögen reducirte Schwingungsdauer = 36,7109″ nach Uhrzeit, oder es war, nach Reduktion der Uhrzeit auf mittlere Zeit, die Schwingungsdauer bei *geöffneter* Kette

$$t_0 = 36{,}7061''.$$

Für die Abnahme der Schwingungsbögen bei *geöffneter* Kette ergiebt sich daraus ferner das logarithmische Dekrement

$$\lambda_0 = 0{,}012\,09.$$

Zu diesen Beobachtungsresultaten sind noch die Konstanten der Instrumente, nämlich das Trägheitsmoment der Galvanometernadel K, und, für den Induktor, der Werth von $S = \Sigma\pi r^2$, wenn r den Halbmesser der Induktorwindungen bezeichnet, und endlich noch die durch *magnetische Messung* gefundene horizontale Intensität des Erdmagnetismus zur Zeit und am Orte der Galvanometerbeobachtungen hinzuzufügen, nämlich

$$K = 1\,132\,000\,000,$$
$$S = 39\,216\,930,$$
$$T = 1{,}816\,4.$$

Der Induktor war derselbe, welcher im fünften Bande dieser Abhandlungen beschrieben[1]) und zu Inklinationsmessungen benutzt worden ist, wo auch der Werth von S schon angegeben worden. Der Werth des Trägheitsmoments K und der horizontalen Intensität des Erdmagnetismus T sind aber nach den von Gauss in der Intensitas gegebenen Vorschriften bestimmt worden.

Diese Resultate der Hülfsbeobachtungen, zu denen der galvanometrischen hinzugefügt, geben endlich alle Elemente zur Bestimmung des Widerstands der vom Multiplikator und Induktor gebildeten Kette bei der Temperatur von 17,5 Grad der 100theiligen Skale, bei welcher die Galvanometerbeobachtungen gemacht worden waren, nach *absolutem Werthe*. Denn zuerst ergiebt sich nach der Theorie der Zurückwerfungsmethode aus den angeführten Werthen

$$a = 0{,}023\,503,\ b = 0{,}014\,186,\ t_0 = 36{,}706\,1,\ \lambda_0 = 0{,}012\,09,$$

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. II, p. 323.]

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda_0^2}}{t_0}\left(a\sqrt{\frac{a}{b}} + b\sqrt{\frac{b}{a}}\right) \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{\pi}\log\operatorname{nat}\frac{a}{b}\right)} = 0{,}003\,330\,4,$$

$$\lambda_1 = \log\operatorname{nat}\frac{a}{b} = 0{,}504\,87;$$

sodann erhält man nach Art. 7, wo $S = n\pi r^2$ gesetzt war, mit den angegebenen Werthen von K, S, T den Widerstand der ganzen Kette

$$w = \frac{8S^2T^2}{K\gamma^2 t_0} \cdot (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda_1^2}} = 42\,855 \,.\, 10^6 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}}.$$

19.

Thomson's Standard und andere Etalons.

Giebt es nun auch noch keinen allgemein angenommenen und gebrauchten Widerstands-Etalon, auf welchen das aus den vorhergehenden Beobachtungen abgeleitete Resultat bezogen werden könnte, so giebt es doch verschiedene Etalons, welche durch die mit ihnen gemachten Untersuchungen oder durch die auf sie reducirten Messungen ein besonderes Interesse gewonnen haben. Einen solchen Etalon, welcher als Thomson's *Standard* bezeichnet werden soll, seinem absoluten Widerstandswerthe nach zu bestimmen, war die specielle Veranlassung zu den oben beschriebenen Beobachtungen gewesen. Derselbe lag zu diesem Zwecke in zwei von Professor William Thomson in Glasgow gefälligst mitgetheilten Kopien vor, nämlich die eine in Kupferdraht, dessen Widerstand nach Professor Thomson's Angabe mit jedem Grade der 100-theiligen Skale um $\frac{36}{10000}$ wächst, die andere in Neusilberdraht, dessen Widerstand mit jedem Grade um $\frac{36}{100000}$ wächst. Beide waren für die Temperatur von 16,3 Grad als genau gleich verbürgt.

Mit Rücksicht auf diesen speciellen Zweck war besonders darauf gesehen worden, dass, wenn bei diesen Beobachtungen auch nicht allen im vorigen Abschnitte gestellten Forderungen entsprochen werden konnte, doch wenigstens die Widerstandsgleichheit der aus dem Multiplikator und Induktor gebildeten Kette mit dem Etalon möglichst nahe hergestellt wurde, um das für jene Kette gefundene Resultat mit diesem Etalonwiderstand in die unmittelbarste und genaueste Beziehung zu setzen. Es war diese Gleichheit bis auf $\frac{1}{1850}$, um was der Etalon-Widerstand kleiner war, hergestellt worden, wie sich aus einer, bei 16,6 Grad gemachten, sehr genauen Vergleichung mit der Kupferkopie ergeben hatte.

Hiernach folgt der Widerstand der Kupferkopie von Thomson's

Standard für 17,5 Grad der 100theiligen Skale aus dem Art. 18 gefundenen Resultate

$$= 42\,832\,000 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$$

oder für 0 Grad Temperatur

$$= 40\,293\,000 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}.$$

Ein *anderer Etalon* war ferner der in der Einleitung schon besprochene SIEMENS'sche, welcher einer SIEMENS'schen aus Neusilberdrähten gebildeten Widerstandsskale als Einheit zum Grunde lag. Diese in einem Neusilberdrahte gegebene SIEMENS'sche *Widerstandseinheit* war nach SIEMENS' Angabe bei 15 Grad der 100theiligen Skale dem Widerstande einer Quecksilbersäule von 1 Meter Länge und 1 Quadratmillimeter Querschnitt bei 0 Grad Temperatur genau gleich. Wurde nun dieser Neusilberdraht in die vom Multiplikator und Induktor gebildete Kette eingeschaltet, so ergab sich der Widerstand der Kette in dem Verhältniss von 1 : 1,2395 vergrössert, woraus der Widerstand dieses Neusilberdrahts bei 17,5 Grad der 100theiligen Skale = 10 266 000 Meter/Sekunde, folglich bei 15 Grad, d. i. der SIEMENS'sche Etalonwiderstand selbst, = 10 257 000 Meter/Sekunde erhalten wird. Der aus dieser Vergleichung abgeleiteten Bestimmung des SIEMENS'schen Etalonwiderstands kann jedoch, wie man leicht sieht, nicht ganz gleiche Genauigkeit wie der vorhergehenden des THOMSON'schen Standardwiderstandes zugeschrieben werden, weil der Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf das Verhältniss zweier verschiedener Widerstände viel grösser ist als bei Vergleichung zweier ganz nahe gleicher Widerstände.

Endlich hat SIEMENS seinen Etalonwiderstand auch mit dem JACOBI'schen *Etalonwiderstand* verglichen, dessen absoluter Werth, wie in der Einleitung schon erwähnt worden, nach einer früheren, weniger genauen, Messung = 5 980 000 Meter/Sekunde gefunden worden war. SIEMENS hat gefunden, dass sein Etalonwiderstand zu dem JACOBI'schen sich verhielte wie 1000 : 661,8, woraus der JACOBI'sche Etalonwiderstand = 6 788 000 Meter/Sekunde folgen würde. Doch bemerkt SIEMENS selbst, dass ihm der JACOBI'sche Normal-Etalon nicht zu Gebote gestanden hätte, sondern dass er sich mehrere Kopien desselben verschafft habe, die aber sehr von einander differirt hätten. Hierin dürfte wohl hauptsächlich der Grund der über 12 Procent betragenden Abweichung zu suchen sein, da der Fehler der früheren Messung höchstens auf 2 bis 3 Procent zu veranschlagen sein dürfte. Jedenfalls kann dieser Fall als Beleg dienen, wie wichtig eine zweckmässig eingerichtete Anstalt zur allgemeinen Verbreitung übereinstimmender genau geprüfter Widerstands-Etalons und Skalen sein würde.

20.

Beschränkt man sich blos auf die Betrachtung der Art. 16 angeführten *galvanometrischen Beobachtungen*, so ergiebt sich der mittlere Fehler eines an der Skale gemessenen Abstandes = 0,092 Skalentheil, wonach die Art. 17 betrachteten Abstände

$$2a' = 305{,}436 \pm 0{,}092,$$
$$2b' = 184{,}178 \pm 0{,}092$$

erhalten werden. Hieraus ergiebt sich dann ferner

$$a = 0{,}023\,503\,(1 \pm \tfrac{1}{3320}),$$
$$b = 0{,}014\,186\,(1 \pm \tfrac{1}{2000})$$

und endlich die Art. 18 betrachtete, durch einen Induktionsstoss der Nadel ertheilte Drehungsgeschwindigkeit γ und das logarithmische Dekrement der Schwingungsabnahme λ_1

$$\gamma = 0{,}003\,330\,4\,(1 \pm \tfrac{1}{2554}),$$
$$\lambda_1 = 0{,}504\,87\,\;(1 \pm \tfrac{1}{865}).$$

Könnte nun die Empfindlichkeit des Galvanometers nach den im vorigen Abschnitte entwickelten Vorschriften noch gesteigert werden, so dass der Abstand

$$2a' = 1000 \pm 0{,}92$$

erhalten würde, und könnte zugleich auch die Dämpfung so verstärkt werden, dass $\lambda_1 = 1$ wäre, also

$$2b' = 367{,}9 \pm 092;$$

so würde auf dieselbe Weise der mittlere Fehler von γ

$$= \pm \tfrac{1}{7127}\,\gamma,$$

der mittlere Fehler von λ_1

$$= \pm \tfrac{1}{3753}\,\lambda$$

erhalten werden, was als der höchste Grad der Genauigkeit betrachtet werden kann, mit welcher sich diese Resultate der galvanometrischen Beobachtungen bestimmen lassen, jedoch nur dann, wenn Empfindlichkeit und Dämpfung auf die angegebene Weise regulirt werden. Auch sind Fehler der Skalentheilung sowie der Messung des Abstandes des Spiegels von der Skale hierbei gar nicht in Betracht gezogen, weil sie nicht zu den rein galvanometrischen, sondern zu den Hülfsbeobachtungen zu rechnen sind.

Endlich ergiebt sich aber aus der Beschreibung des Apparats, mit welchem die eben betrachteten Beobachtungen gemacht worden sind, wie leicht die verlangte Empfindlichkeit und Dämpfung wirklich herzustellen wäre. Denn es ist schon Art. 16 erwähnt worden, dass dieser

Apparat von den im vorigen Abschnitt vorgeschriebenen Regeln wesentlich nur darin abwich, dass dabei ein schon vorhandener genau bekannter Induktor benutzt wurde, dessen Widerstand bedeutend, nämlich fast vier Mal, grösser war als der des Multiplikators. Es hätte daher nur der Querschnitt des Induktordrahts in dem Verhältniss von 3 : 8 brauchen vergrössert zu werden, so würde der Widerstand der ganzen Kette in dem Verhältniss von 8 + 2 : 3 + 2 vermindert worden sein, wodurch die Empfindlichkeit sowohl wie die Dämpfung im umgekehrten Verhältniss, nämlich in dem von 1 : 2, vergrössert worden wären.

Es ergiebt sich sogar, dass die Empfindlichkeit sowohl wie die Dämpfung leicht noch weit über die vorgeschriebenen Grenzen hinaus gesteigert werden könnten, wodurch also die über diese Grenzen Art. 9 gegebenen Vorschriften zu wirklicher Anwendung kommen würden.

Es ergiebt sich hieraus schliesslich, dass es nicht an den *galvanometrischen Beobachtungen* liegt, wenn bei Befolgung der vorgeschriebenen Regeln der absolute Werth eines gegebenen Etalonwiderstandes nicht mit grosser Sicherheit und Genauigkeit erhalten würde; denn der aus diesen Beobachtungen allein entspringende Fehler würde nach obigen Angaben nur etwa $\frac{1}{2530}$ des ganzen Widerstandes betragen; im Gegentheil wird es schwer halten, die übrigen Beobachtungen, namentlich die *magnetischen*, zur Bestimmung der Intensität der horizontalen erdmagnetischen Kraft am Orte und zur Zeit der galvanometrischen Beobachtungen, mit entsprechender Genauigkeit auszuführen, woraus also hervorgeht, dass die unvermeidliche, aus der Bestimmung des Erdmagnetismus herrührende, Unsicherheit im *absoluten Werthe des gegebenen Etalonwiderstandes* durch die Unsicherheit der nach den vorgeschriebenen Regeln ausgeführten *galvanometrischen Messung* nicht beträchtlich vergrössert werden würde, wonach also der Hauptzweck dieser Abhandlung, nämlich darzulegen, wie dieses Ziel zu erreichen, als erfüllt betrachtet werden darf.

IV. *Kopirungs-Methoden.*

21.

Aus den beiden vorhergehenden Abschnitten ergiebt sich, dass ein galvanometrischer Apparat zur absoluten Widerstandsmessung in höchster Zweckmässigkeit sich nur für die Messung *eines bestimmten Etalonwiderstandes* herstellen lässt, was auch genügt, weil es bei der Vergleichbarkeit der Widerstände aller Körper untereinander nur der genauen Kenntniss *eines* solchen Etalonwiderstandes nach absolutem Maasse bedarf, um mittelbar zur Kenntniss von den absoluten Wider-

standswerthen aller Körper zu gelangen und alle möglichen Anwendungen davon zu machen.

Für die Wahl und Festsetzung eines solchen *Etalonwiderstandes* gelten aber dieselben Regeln, wie für die Wahl und Festsetzung von *Grundmaassen anderer Grössenarten:* nur solche Grössenarten sind zur Aufstellung von Grundmaassen geeignet, von welchen sich vorhandene Grössen unverändert erhalten, von einem Ort zum anderen beliebig versetzen, und durch eine Methode feinster Kopierung vervielfältigen lassen. Ueberall, wo diesen Bedingungen genügt werden kann, dürfte auch die Feststellung eines solchen *Grundmaasses* wegen der praktischen Bedeutung der dadurch erreichbaren Vereinfachung der Messungen, die zugleich an Feinheit und Genauigkeit gewinnen, als wünschenswerth erscheinen. Wo aber diesen Bedingungen nicht genügt werden kann, ist zwar die Feststellung eines *Maasses* nothwendig, es braucht dies aber kein *Grundmaass* zu sein, sondern kann auch ein *abgeleitetes Maass* sein, nämlich *ein auf die Grundmaasse anderer Grössenarten zurückgeführtes absolutes Maass.* Zum Beispiel gehören Geschwindigkeiten zu denjenigen Grössenarten, die zur Aufstellung eines Grundmaasses nicht geeignet sind, weil sich eine Geschwindigkeit nicht unverändert erhalten, nicht beliebig versetzen und nicht genau kopiren lässt. Dagegen sind gerade Linien und Körpermassen, wie bekannt, zur Aufstellung von Grundmaassen besonders geeignet.

Ob nun *galvanische Widerstände* zur Aufstellung eines *Grundmaasses*, in einem bestimmten Etalon oder Standard, geeignet sind, hängt ebenfalls blos davon ab, ob ein vorhandener Widerstand sich unverändert erhalten, von einem Ort zum anderen beliebig versetzen und durch eine Methode feinster Kopirung vervielfältigen lässt. Haftet nun an einem bestimmten Metalldrahte ein unveränderlicher Widerstand (wie an einem Stabe eine unveränderliche Länge oder an einem Gewichte eine unveränderliche Masse), so leuchtet von selbst ein, dass der vorhandene Widerstand des Drahts sich mit dem Drahte zugleich unverändert erhalten und von einem Ort zum anderen versetzen lässt; es bleibt also nur nachzuweisen übrig, dass er sich auch durch Methoden feinster Kopirung vervielfältigen lasse.

Bedenkt man, dass bei einem *Grundmaasse*, nächst der Unveränderlichkeit für alle Zeiten und Orte, der *allgemeine Gebrauch* desselben das Wichtigste und Wesentlichste ist, und beachtet man die grossen Schwierigkeiten, welche eine solche allgemeine Einführung findet, so könnte es aus diesem Grunde zweckmässig erscheinen, die Zahl solcher *Grundmaasse* möglichst zu beschränken, und den Gebrauch der *abgeleiteten Maasse*, nämlich der auf die Grundmaasse anderer Grössenarten zurückgeführten *absoluten Maasse,* desto mehr auszudehnen; doch wird

man leicht bei näherer Prüfung erkennen, dass, statt *absolute Maasse* an die Stelle von *Grundmaassen* zu setzen, es zweckmässiger ist, die *Grundmaasse in recht genaue Uebereinstimmung mit den absoluten Maassen*, durch die sie möglicher Weise ersetzt werden könnten, zu bringen, schon darum, weil das *absolute Maass* alsdann das *Grundmaass* überall vertreten kann, wo es nicht verbreitet ist.

Das *absolute Maass* gestattet nämlich, wie man am Beispiel des absoluten Widerstandsmaasses sieht, *keine unmittelbare Anwendung*, sondern jede absolute Maassbestimmung wird immer durch bestimmte Gesetze der Abhängigkeit verschiedener an einem Objekte zugleich betrachteter Grössenarten von einander *vermittelt*, und fordert daher eine planmässige *Kombination verschiedener Beobachtungen*, deren Ausführung grössere Mühe und Arbeit verursacht, und ausserdem der Genauigkeit engere Grenzen setzt, als wenn die Resultate auf einfachen Beobachtungen unmittelbar beruhen. Ein *Grundmaass* bei Grössenarten, die dazu geeignet sind, findet dagegen *unmittelbare Anwendung*, verbunden mit grösserer Einfachheit der Messung und grösserer Feinheit der Resultate, wobei besonders hervorzuheben ist, dass die *Freiheit in der Wahl eines solchen Grundmaasses* ausserdem gestattet, eine wirklich vorhandene, *dem absoluten Maasse, oder einer höheren oder niederen Decimaleinheit desselben, nach feinster Prüfung gleiche, oder wenigstens sehr nahe kommende Grösse zum Grundmaasse zu nehmen, und dadurch alle mit dem Gebrauche absoluter Maasse verbundenen Vortheile zu wahren*, welche die Gesetze der Abhängigkeit verschiedener an einem Objekte zugleich betrachteten Grössenarten von einander gewähren.

Zum Beispiel ist das für Widerstände von uns gebrauchte *abgeleitete Maass* das auf die *Grundmasse des Raums, der Zeit und der Masse* zurückgeführte *absolute Maass*, und zwar sind dabei *Millimeter, Sekunde* und *Milligramme* als Grundmaasse für die letzteren Grössenarten angenommen worden. Beharrt man bei diesen letzteren Grundmaassen, so kann die bei Wahl eines *Grundmaasses für Widerstände* vorhandene Freiheit sehr wohl benutzt werden, einen wirklich vorhandenen Widerstand, welcher nach feinster Prüfung *einer höheren Decimaleinheit jenes absoluten Maasses* gleich ist oder ihr wenigstens sehr nahe kommt (was beim Siemens'schen Maasse, welches fast 10^{10} Mal grösser als jenes absolute ist, wirklich näherungsweise Statt findet), zum *Grundmaasse* zu nehmen, wodurch alle mit dem Gebrauch jenes *absoluten Maasses* verbundenen Vortheile auch für den Gebrauch dieses Grundmaasses gewahrt wären.

Nur muss es möglich sein, ein solches Grundmaass auch wirklich zur *allgemeinen oder wenigstens zu einer sehr ausgedehnten Geltung* zu bringen. Die einzige Möglichkeit hierzu ist aber in der *Vervielfältigung*

des Etalons durch Kopirung gegeben, wenn eine Methode vorhanden ist, welche gestattet, alle danach hergestellten Kopien für alle praktischen Zwecke als *vollkommen identisch* zu betrachten. Ohne Zweifel ist also auch für galvanische Widerstände die Aufstellung eines Grundmaasses sehr wünschenswerth, es bedarf aber dazu vor Allem der Prüfung, ob die *Kopirungsmethoden der Widerstände* dem angegebenen Zwecke genügen. Diese Prüfung wird mit Rücksicht auf unsere Untersuchung noch nöthiger, weil die Drahtkette unseres galvanometrischen Apparats selbst keineswegs geeignet ist, zum Grundmaass zu dienen, da sie nicht beliebig von einem Ort zum anderen versetzt werden kann; diese Drahtkette soll daher gleichfalls eine solche *Kopie des Grundmaasses* sein, welche für alle praktischen Zwecke mit dem Grundmaasse als vollkommen identisch betrachtet werden darf, so dass alle für diese Kette gewonnenen Bestimmungen auch für das *Grundmaass* gelten.

22.

Kopirungsmethoden ohne Stromtheilung.

Kopirung beruht auf dem Urtheil über Gleichheit oder Ungleichheit zweier Grössen. Unmittelbar aus der Definition des Widerstandes ergiebt sich nun eine *erste* Methode, über Gleichheit oder Ungleichheit zweier Widerstände zu urtheilen, nämlich nach folgendem Principe: *der Widerstand zweier Leiter ist gleich, wenn durch gleiche elektromotorische Kräfte gleiche Ströme in ihnen erregt werden.* Die Genauigkeit der auf diesem Principe beruhenden Methode ist aber 1. durch die Genauigkeit beschränkt, welche bei Beurtheilung der Gleichheit zweier elektromotorischen Kräfte, die auf zwei verschiedene Leiter wirken, erreicht werden kann; 2. durch die Genauigkeit, mit welcher man die Stromintensitäten in zwei verschiedenen Leitern beobachten und vergleichen kann. Die nähere Prüfung ergiebt leicht, dass hierdurch der Vergleichung der Widerstände viel engere Schranken gesetzt werden, als bei Kopirung von Maass-Etalons zulässig erscheinen.

Eine *zweite* Methode ist die der *Einschaltung* nach folgendem Principe: *wenn zwei Leiter successive in dieselbe Kette eingeschaltet werden, in welcher immer die nämliche elektromotorische Kraft wirkt, so ist der Widerstand der beiden Leiter gleich, wenn die Stromintensitäten gleich sind.* — Hierbei wird, ausser der Definition des Widerstandes, das Ohm'sche Gesetz der Summation der Widerstände von Leitern, welche von demselben Strome durchlaufen werden, zu Hülfe genommen. — Auch nach dieser Methode ist der Genauigkeit der Vergleichung zweier Widerstände eine Grenze durch die in der Beobachtung der Stromintensitäten erreichbare Genauigkeit gesetzt, die auch

bei Anwendung der feinsten Galvanometer den bei Kopirung von Maass-Etalons zu machenden Forderungen im Allgemeinen nicht genügt, wenn sie auch für viele praktische Zwecke ausreicht.

Die *dritte* in den folgenden Artikeln näher zu erörternde Methode endlich ist die der *Stromtheilung*, wobei zwei Fälle unterschieden werden können, nämlich der der *einfachen* und der der *doppelten* Theilung. Die in der Wheatstone'schen *Brücke* oder *Waage* in Ausführung gebrachte Methode beruht auf der *doppelten Stromtheilung*, deren näheren Betrachtung jedoch eine kurze Erörterung der auf *einfacher Stromtheilung* beruhenden Methode vorausgeschickt werden soll.

23.

Kopirungsmethode mit einfacher Stromtheilung.

Zur Bestimmung der nach der Methode der *einfachen Stromtheilung* erreichbaren Genauigkeit in der Vergleichung zweier Widerstände mit einander muss auf das Princip dieser Methode zurückgegangen werden. Dieses Princip ist folgendes: *wenn ein Strom sich in zwei Zweigströme theilt und beide Zweigströme, jeder durch einen Multiplikator, den er durchläuft, auf dieselbe Magnetnadel wirken, aber in entgegengesetzten Richtungen, so ist der Widerstand zweier von diesen Zweigströmen durchlaufenen Leiter gleich, wenn die an der Magnetnadel beobachtete Totalwirkung durch Vertauschung der beiden Leiter keine Aenderung erleidet.* — Die Totalwirkung kann grösser oder kleiner, oder auch Null sein, woraus einleuchtet, dass die nach dieser Methode erreichbare Genauigkeit in der Vergleichung zweier Widerstände von der *Grösse* der beobachteten Totalwirkung ganz unabhängig ist. — Es werden nach dieser Methode ausser dem im vorigen Artikel angeführten Gesetze auch die Ohm'schen Gesetze der *Stromverzweigung* zu Hülfe genommen.

24.

Das im vorigen Artikel angeführte Princip lässt sich auf folgende Weise leicht beweisen. Durch den Leiter, Fig. 3 der Tafel I, c gehe ein von der elektromotorischen Kraft e hervorgebrachter Strom i, welcher sich in zwei Zweigströme i_1 und i' theile, von denen der erstere durch die Leiter, welche die Widerstände a und α, der letztere durch die Leiter, welche die Widerstände b und β besitzen, gehe. a und b seien die Widerstände, welche mit einander verglichen werden sollen, weshalb die Einrichtung getroffen ist, dass die beiden Leiter, welche diese Widerstände besitzen, mit einander vertauscht werden können. Die Leiter mit den Widerständen α, β bilden Multiplikatoren für eine und

dieselbe Magnetnadel, welche aber von dem durch den Leiter α gehenden Zweigstrom in entgegengesetzter Richtung als von dem durch den Leiter β gehenden abgelenkt wird. — Ein Strom im Leiter α von der Intensität $= 1$ erhalte die Nadel in einer Ablenkung $= m$; ein Strom im Leiter β von der Intensität $= 1$ erhalte die Nadel in einer Ablenkung $= -n$. m und n können daher die Empfindlichkeits-Koefficienten der beiden Multiplikatoren genannt werden. — Endlich vereinigen sich die beiden Leiter α, β wieder mit dem Leiter c, wodurch die Kette geschlossen wird.

Hiernach ergeben sich aus den Ohm'schen Gesetzen der Stromtheilung folgende drei Gleichungen:

$$\frac{e}{i} = c + \frac{(a+\alpha)(b+\beta)}{a+\alpha+b+\beta},$$
$$i_1 + i' = i,$$
$$i_1 : i' = (b+\beta) : (a+\alpha),$$

wozu noch die Bestimmung der Totalablenkung der Nadel durch die beiden Zweigströme kommt, welche mit A bezeichnet werden möge, nämlich:

$$A = mi_1 - ni'.$$

Aus diesen vier Gleichungen folgt, wenn i, i_1 und i' eliminirt werden,

$$A = \frac{m(b+\beta) - n(a+\alpha)}{c(a+\alpha+b+\beta) + (a+\alpha)(b+\beta)} \cdot e.$$

Bezeichnet man ferner die Totalablenkung der Nadel nach Vertauschung von a und b mit A', so ist

$$A' = \frac{m(a+\beta) - n(b+\alpha)}{c(a+\alpha+b+\beta) + (b+\alpha)(a+\beta)} \cdot e.$$

Hieraus folgt, wenn die Ablenkung $A = A'$ gefunden wird,

$$(b-a).[(m+n)(a+b+\alpha+\beta)c + m(a+\beta)(b+\beta) + n(a+\alpha)(b+\alpha)] = 0.$$

Da nun aber der zweite in Klammern eingeschlossene Faktor aus einer Summe positiv gegebener Grössen besteht und daher nicht verschwinden kann, so muss der erste Faktor

$$b - a = 0$$

gesetzt werden, woraus folgt, dass wenn die Ablenkung $A = A'$ gefunden wird, die Widerstände a und b gleich sind, was zu beweisen war.

25.

Die Genauigkeit der Vergleichung der beiden Widerstände a und b mit einander ist nach der eben betrachteten Methode von der Grösse

der beobachteten Totalwirkung A ganz unabhängig, und es kann daher A im Allgemeinen einen grösseren oder kleineren Werth haben oder Null sein; die Ausführung einer solchen Vergleichung wird aber sehr erleichtert, wenn A recht klein oder Null ist, woraus für $a = b$ folgt, dass das Verhältniss der Empfindlichkeits-Koefficienten $m : n$ dem Verhältniss der Widerstände $a + \alpha : a + \beta$ in den Zweigströmen nahe gleich sein soll, was sich am besten erreichen lässt, wenn beide Multiplikatoren aus ganz gleichen Drähten, die zusammen so aufgewunden werden, dass sie ganz gleiche Windungen bilden, verfertigt werden. Die Differenzen $m - n$ und $\beta - \alpha$ werden dann, wenn sie nicht ganz verschwinden, wenigstens sehr klein sein. Bezeichnet man nun den kleinsten Werth der Differenz $A - A'$, welcher noch mit Sicherheit beobachtet werden kann, mit $\triangle$ und den zugehörigen Werth der Differenz $b - a$ mit x, so soll der Werth von x/a entwickelt werden, welcher den kleinsten Bruchtheil angiebt, bis auf welchen die Gleichheit der Widerstände a und b nach dieser Methode verbürgt werden kann.

Aus den im vorigen Artikel gefundenen Werthen von A und A' ergiebt sich nun leicht folgende Gleichung:

$$\frac{\Delta}{ex} = \frac{A - A'}{e(b-a)} = \frac{(m+n)[c(a+b+\alpha+\beta)+ab+\alpha\beta+\frac{1}{2}(a+b)(\alpha+\beta)]+\frac{1}{2}(a+b+2\beta)(m-n)(\beta-\alpha)+n(\beta-\alpha)^2}{[c(a+b+\alpha+\beta)+ab+\alpha\beta+\frac{1}{2}(a+b)(\alpha+\beta)]^2-\frac{1}{4}(b-a)^2(\beta-\alpha)^2},$$

wofür, mit Rücksicht darauf, dass die Differenzen $b - a$, $m - n$, $\beta - \alpha$ stets sehr klein sind,

$$\frac{\triangle}{ex} = \frac{m+n}{c(a+b+\alpha+\beta)+ab+\alpha\beta+\frac{1}{2}(a+b)(\alpha+\beta)},$$

oder noch einfacher

$$\frac{\triangle}{ex} = \frac{2m}{(a+\alpha)(a+\alpha+2c)}$$

gesetzt werden kann, woraus erhalten wird

$$\frac{x}{a} = \frac{(a+\alpha)(a+\alpha+2c)}{2mea} \triangle.$$

26.

Nach der gefundenen Bestimmung für die Genauigkeit, welche Widerstandsvergleichungen nach der Methode der einfachen Stromtheilung zukommt, lassen sich leicht Regeln zur zweckmässigen Konstruktion der Apparate und die Grenzen der damit erreichbaren Genauigkeit näher angeben. Im Allgemeinen leuchtet ein, dass auf die Konstruktion des Galvanometers und namentlich des dazu erforderlichen Doppelmultiplikators die im zweiten Abschnitte entwickelten Regeln

Anwendung finden, wonach der Multiplikatorraum als gegeben betrachtet werden kann, d. h. das *Produkt* der Länge in den Querschnitt der Multiplikatordrähte. Da nun nach dem OHM'schen Gesetze das *Verhältniss* von Länge zum Querschnitt dem Widerstande a proportional ist, so ergiebt sich bei nfacher Länge ein n^2facher Werth des Widerstands a. Bei nfacher Länge wird aber auch die Zahl der Multiplikatorwindungen, und dadurch auch die Empfindlichkeit m, n Mal vergrössert. Hiernach können m und a in ihrer Abhängigkeit von n durch die Gleichungen

$$m = n m_0, \quad a = n^2 a_0$$

dargestellt werden. Setzt man diese Werthe von m und a in die Gleichung des vorigen Artikels, so erhält man

$$\frac{x}{a} = \frac{\triangle}{2 m_0 e a} \cdot \frac{a(2c + a) + 2(c + a) a_0 n^2 + a_0^2 n^4}{n}.$$

Man sieht hieraus, dass die Genauigkeit der Widerstandsvergleichung vorzüglich von der Wahl der Multiplikatordrähte abhängt, wodurch der Werth von n bestimmt wird, und dass es einen Werth von n und folglich von a giebt, für welchen jene Genauigkeit am grössten oder der Bruchtheil x/a am kleinsten ist, nämlich

$$n = \sqrt{\frac{a + c}{3 a_0}\left(2\sqrt{1 - \frac{3}{4}\frac{c^2}{(a + c)^2}} - 1\right)},$$

$$a = \frac{1}{3}(a + c)\left(2\sqrt{1 - \frac{3}{4}\frac{c^2}{(a + c)^2}} - 1\right).$$

Ausserdem wächst die Genauigkeit, je kleiner c/a wird, womit zugleich a und x/a sich bestimmten Grenzwerthen nähern, nämlich

$$a = \frac{1}{3} a,$$

$$\frac{x}{a} = \frac{8}{9} \cdot \frac{a}{me} \triangle.$$

Nun ist $[3/4] . me/a$ der Werth, dem sich, für $a = [1/3] . a$, der Werth von $me/[a + a + c]$ desto mehr nähert, je kleiner c/a; $me/[a + a + c]$ ist aber die Ablenkung der Nadel, wenn der durch die Leiter b und β gehende Zweigstrom gelöst wird, und würde leicht gemessen werden können, wenn bei der grossen Empfindlichkeit m die Länge der Skale dazu ausreichte. Die grosse Empfindlichkeit m kann aber durch kleine elektromotorische Kraft e kompensirt werden. Findet man dann z. B. für eine elektromotorische Kraft $\varepsilon = \frac{1}{100} e$ (wenn z. B. ein thermomagnetisches Element für ein GROVE'sches gesetzt wird) die Ablenkung $m\varepsilon/[a + a + c] = 1000 \triangle$, so ist im Grenzfalle $[3/4] . me/a = 100000 \triangle$,

folglich $x/a = [8/9] . [a/me] . \triangle = 1/150000$ der kleinste Bruchtheil, bis auf welchen die Gleichheit der Widerstände a und b verbürgt werden kann.

Es ergiebt sich hieraus, dass die Kopirungsmethode mit einfacher Stromtheilung eine Vervielfältigung von Widerstands-Etalons oder Standards gestattet, welche für alle praktischen Anwendungen als vollkommen identisch betrachtet werden dürfen.

27.

Kopirungsmethode mit doppelter Stromtheilung.

Dasselbe, was nach der vorhergehenden Erörterung durch einfache Stromtheilung geleistet werden kann, kann auch durch doppelte Stromtheilung, nämlich mit der Wheatstone'schen *Brücke oder Waage* erreicht werden.

Die Wheatstone'sche Waage besteht aus einem geschlossenen Leiter, von welchem vier Punkte, Fig. 4 der Tafel I, A, B, C, D, auch kreuzweise verbunden sind. Man bezeichne die Widerstände AB, BC, CD, DA der Reihe nach mit a, b, c, d; ferner mit w den Widerstand des den ersten Punkt A mit dem dritten C verbindenden Leiters, in welchem die elektromotorische Kraft e (einer Säule) wirkt und der daher der ungetheilte Leiter heissen möge; mit v den Widerstand des den zweiten Punkt B mit dem vierten D verbindenden Leiters, welcher die *Brücke* heisst und den Multiplikator eines Galvanometers bildet; i bezeichne die Stromintensität im ungetheilten Leiter, i' bezeichne die Stromintensität in der Brücke. — Fehlte die Brücke, so würde ein Strom im ungetheilten Leiter von A nach C die beiden Zweigströme ABC und ADC bilden und im Ganzen den Widerstand $w' = w + (a+b)(c+d)/[a+b+c+d]$ finden; fehlte der ungetheilte Leiter, so würde ein Strom in der Brücke von B nach D die beiden Zweigströme BAD und BCD bilden und im Ganzen den Widerstand $v' = v + (a+d)(b+c)/[a+b+c+d]$ finden. — Der wirkliche Widerstand endlich, welchen der von e hervorgebrachte Strom in seinem ganzen Kreislaufe findet, werde mit W bezeichnet.

Es ist bekannt, wie in der Theorie der Wheatstone'schen Waage das Verhältniss der Stromintensität in der Brücke i' zur Intensität des ungetheilten Stromes i aus den Verhältnissen der Widerstände a, b, c, d zum Widerstand der Brücke v bestimmt wird, nämlich durch die Gleichung

$$\frac{i'}{i} = \frac{ac - bd}{(a+d)(b+c) + (a+b+c+d)v} = \frac{ac - bd}{(a+b+c+d)v'} .$$

Es geht hieraus hervor, dass, wenn der Strom in der Brücke i' verschwindet, $ac - bd = 0$ oder $a : b = d : c$ ist. Wenn i' nicht verschwindet, soll sein Werth, folglich auch der von $(ac - bd)$, wenigstens sehr klein sein. Dies vorausgesetzt fügen wir zu jener besonderen

Gleichung für die WHEATSTONE'sche Waage noch die allgemeine durch das OHM'sche Gesetz gegebene hinzu, nämlich

$$i = \frac{e}{W},$$

und entwickeln den Gesammtwiderstand W in einer nach Potenzen von $(ac - bd)$ fortschreitenden Reihe, wo aber, bei dem vorausgesetzten kleinen Werthe von $(ac - bd)$ alle Glieder, welche eine höhere Potenz als das Quadrat dieser Grösse enthalten, als verschwindend betrachtet werden dürfen. Man erhält alsdann

$$W = w + \frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d} - \frac{b(c+d)+c(a+b)}{d(b+c)+v(c+d)} \cdot \frac{1}{b}\left(\frac{ac-bd}{a+b+c+d}\right)^2,$$

worin $w + (a+b)(c+d)/[a+b+c+d] = w'$ ist. Hieraus ergiebt sich endlich

$$i' = \frac{ac-bd}{(a+b+c+d)v'} \cdot \frac{e}{W} = \frac{(ac-bd)e}{(a+b+c+d)v'w'}.$$

Wird dann, wie im vorigen Artikel, die von der Einheit der Stromintensität in der Brücke hervorgebrachte Ablenkung der Nadel mit m bezeichnet, so ist die vom Strome i' hervorgebrachte Ablenkung

$$A = mi' = \frac{(ac-bd)me}{(a+b+c+d)v'w'}.$$

Sollen nun die beiden Widerstände a und b mit einander verglichen werden, so setze man ihre jedenfalls sehr kleine Differenz $a - b = x$ und ferner $c - d = \delta$, was ebenfalls für kleine Werthe von A nur einen kleinen Werth hat. Alsdann erhält man

$$A = \frac{a\delta + cx}{2(a+c)} \cdot \frac{me}{v'w'}$$

und wird a und b vertauscht, so erhält man

$$A' = \frac{a\delta - cx}{2(a+c)} \cdot \frac{me}{v'w'};$$

denn der Faktor $me/[(a+b+c+d)w']$ bleibt bei dieser Vertauschung ganz unverändert, wie man sieht, wenn man für w' seinen Werth $w + (a+b)(c+d)/[a+b+c+d]$ setzt; v' bleibt wenigstens für kleine Werthe von x und δ unverändert, denn es verwandelt sich alsdann $v' = v + (a+d)(b+c)/[a+b+c+d] = v + (a+c)/2 - (\delta + x)/2$ in $v + (b+d)(a+c)/[a+b+c+d] = v + (a+c)/2 - (\delta + x)/2$; endlich $(ac - bd) = a\delta + cx$ verwandelt sich in $(bc - ad) = a\delta - cx$. Es ist also

$$A - A' = \frac{mec}{(a+c)v'w'} \cdot x,$$

folglich, wenn $A - A' = \triangle$ den kleinsten Werth der Ablenkungsdifferenz bezeichnet, der noch mit Sicherheit beobachtet werden kann, so erhält man den kleinsten Bruchtheil, bis auf welchen die Gleichheit der Widerstände a und b nach diesen Beobachtungen verbürgt werden kann, nämlich

$$\frac{x}{a} = \frac{(a+c)v'w'}{meac} \cdot \triangle = \frac{(a+c+2v)(2ac+(a+c)w)}{2meac} \cdot \triangle .$$

Dieser Bruchtheil ist desto kleiner, je kleiner die Widerstände der Brücke v und des ungetheilten Leiters w sind, und nähert sich, je kleiner v und w werden, desto mehr dem Werthe

$$\frac{x}{a} = \frac{a+c}{me} \cdot \triangle .$$

Nun ist $me/[a+c]$ der Werth, dem sich $me/[a+c+v+w]$ desto mehr nähert, je kleiner $v+w$ wird; $me/[a+c+v+w]$ ist aber die Ablenkung der Nadel, wenn die durch b und d gehenden Zweigströme gelöst werden, und kann leicht beobachtet und gemessen werden, auch bei grosser Empfindlichkeit m des Galvanometers, wenn die grössere bei den Beobachtungen A und A' gebrauchte elektromotorische Kraft e, wie schon im vorigen Artikel angegeben wurde, mit einer kleineren elektromotorischen Kraft, z. B. $\varepsilon = \frac{1}{100} e$, vertauscht wird. Hat alsdann die Ablenkung $m\varepsilon/[a+c+v+w]$ eine messbare Grösse, z. B. $= 1000 \triangle$, so wird im Grenzfalle $me/[a+c] = 100000 \triangle$, folglich $x/a = 1/100000$ der kleinste Bruchtheil, bis auf welchen die Gleichheit der Widerstände a und b verbürgt werden kann.

Es ergiebt sich hieraus, dass die Kopirungsmethode mit doppelter Stromtheilung eine fast ebenso genaue Prüfung der Gleichheit zweier Widerstände a und b gestattet, wie die mit einfacher Stromtheilung, und daher gleichfalls eine Vervielfältigung von Widerstands-Etalons oder Standards ermöglicht, welche für alle praktischen Anwendungen als vollkommen identisch betrachtet werden dürfen; doch kann in dieser Beziehung der Methode der Doppeltheilung durchaus kein Vorzug vor der Methode der einfachen Theilung eingeräumt werden. — Ein eigenthümlicher Werth kommt der Methode der Doppeltheilung nur dann zu, wenn es sich nicht um Prüfung der *Gleichheit*, sondern um die Bestimmung des unbekannten *Verhältnisses* zweier von einander sehr verschiedenen Widerstände $a:b$ handelt, welches dann, bei verschwindender Ablenkung A, einem bekannten Widerstandsverhältnisse $d:c$ als gleich erkannt wird; wobei jedoch die Genauigkeit des Resultats von der genauen Kenntniss des Widerstandsverhältnisses $d:c$, welches gegeben sein muss, abhängig gemacht wird.

V. *Ueber die allgemeinen Principien der Widerstandsmessung.*

28.

Die Principien der galvanischen Widerstandsmessung waren aus dem Wesen des galvanischen Widerstandes zu entnehmen, welcher eine *Eigenschaft ponderabler Körper*, z. B. eines Kupferdrahts, ist, und mussten daher aus der von dieser Eigenschaft gegebenen Definition abgeleitet werden. Eine solche Definition war nun zuerst auf Grund des Ohm'schen Gesetzes aufgestellt worden, welches die Abhängigkeit der *Stromintensität* in einem ponderablen Körper von den auf die darin enthaltene Elektricität wirkenden *elektrischen Kräften* bestimmt. Den aus dieser Definition abgeleiteten Principien gemäss ist in den ersten Abschnitten dieser Abhandlung die Methode entwickelt worden, wie der Widerstand eines gegebenen Körpers (eines Kupferdrahts) sich am genauesten bestimmen lasse. Im letzten Abschnitte wurde endlich noch erörtert, auf welche Weise die Widerstände anderer Körper mit dem so erforschten Widerstande am genauesten verglichen werden könnten.

Alle diese Untersuchungen knüpften sich an die zuerst aufgestellte Definition vom Leitungswiderstande an, welche sich auf das bekannte, aus zusammengehörigen Messungen *elektromotorischer Kräfte* und *Stromintensitäten* abgeleitete, Ohm'sche Erfahrungsgesetz gründet, dass nämlich bei noch so verschiedenen elektromotorischen Kräften e und noch so verschiedenen Stromintensitäten i, so lange wie der ponderable Körper derselbe bleibt, dem jene Kräfte und diese Ströme angehören, der Quotient e/i immer gleichen Werth hat, während er bei verschiedenen Körpern verschiedene Werthe annimmt, wonach also der für jeden Körper *konstante* Werth des Quotienten e/i eine *Eigenschaft des Körpers* ist, welche zur Unterscheidung desselben von anderen Körpern dienen kann und sein *Leitungswiderstand* genannt wird.

Die hiernach mit dem Namen Widerstand bezeichnete *Eigenschaft eines ponderablen Körpers* muss nun zwar ihre *Ursachen* in der eigenthümlichen Beschaffenheit des ponderablen Körpers selbst haben, an sich also unabhängig von den Kräften sowohl, die auf die in ihm enthaltenen elektrischen Fluida wirken, wie von den Bewegungen sein, in welche diese Fluida dadurch versetzt werden; diese in der Natur des ponderablen Körpers selbst liegenden *Ursachen* sind aber bis jetzt noch nicht erforscht worden. Wir kennen daher blos die *Wirkung* seines Widerstandes *aus der Erfahrung*, und wissen daraus nur, dass dieselbe, *bei gegebener elektromotorischen Kraft, in einer gewissen Stromintensität* besteht.

Ist nun aber der Widerstand an sich eine im Wesen des ponderablen Körpers selbst begründete Eigenschaft, so können auch noch *andere Wirkungen* existiren, die sich erfahrungsmässig nachweisen lassen; z. B. könnte der Fall Statt finden, dass eine solche erfahrungsmässig nachweisbare Wirkung vorhanden wäre bei jedem *gegebenen* Strome, der durch den Körper geht, gleichgültig woher er rühre oder durch welche Kräfte er hervorgebracht sei. Eine solche wirklich vorhandene Wirkung, die bei jedem *gegebenen* durch einen Körper gehenden Strom Statt findet, bezeichnet man mit dem Namen *Stromarbeit*, und es fragt sich nur, wie diese Wirkung beobachtet und ihre Abhängigkeit vom Leitungswiderstande des Körpers nachgewiesen werden könne.

Ein Strom erzeugt nun, wie die Erfahrung lehrt, in dem Leitungsdrahte, durch den er geht, *Wärme*, und Wärme ist, nach der mechanischen Wärmetheorie, mit *Arbeit* äquivalente lebendige Kraft. Darf man hiernach die durch einen Strom erzeugte Wärme als *Stromarbeit* betrachten, so ist diese Stromarbeit messbar, ebenso wie der Strom, von dem sie hervorgebracht wird. Auf diese zusammengehörigen Messungen der *Intensität der Ströme* und der von ihnen erzeugten *Wärme* ist endlich von Joule und Lenz ein *Erfahrungsgesetz* auf gleiche Weise gegründet worden, wie das Ohm'sche Gesetz auf die zusammengehörigen Messungen von *elektromotorischen Kräften* und *Stromintensitäten*, nämlich das Gesetz, dass bei noch so verschiedenen Stromintensitäten i, und noch so verschiedenen Wärmeerzeugungen A, so lange der ponderable Körper derselbe bleibt, dem jene Ströme und diese Wärmeerzeugungen angehören, der Quotient A/i^2 immer gleichen Werth hat, der daher ebenfalls, als eine *Eigenschaft des ponderablen Körpers*, zur Unterscheidung desselben von anderen Körpern dienen kann, für welche dieser Quotient andere Werthe hat.

Dürfte nun diese *zweite* Eigenschaft mit jener *ersteren*, welche *Widerstand* genannt wurde, als identisch betrachtet werden (die Erfahrung lehrt wirklich die Proportionalität beider Quotienten), so erhielte man dadurch eine *zweite Definition des Widerstandes*, aus welcher sich ganz neue, von den bisher betrachteten ganz unabhängige Principien für die Widerstandsmessung ergeben würden. Die Entwickelung einer auf diesen neuen Principien beruhenden Methode der Widerstandsmessung würde sich zunächst mit Forschungen zu beschäftigen haben, welche *erstens* die Genauigkeit der dabei in Anwendung zu bringenden Wärmemessungsmethoden, *zweitens* die Aequivalenzbestimmung der Wärme mit Arbeit, und *drittens* die Prüfung der Voraussetzung, dass alle Stromarbeit in Wärme umgesetzt werde, beträfen. Ehe jedoch auf dieses neue weite Forschungsgebiet eingegangen wird, bedarf es noch einer

näheren Erörterung dessen, was unabhängig von der Betrachtung der Wärme, blos auf Grund der bekannten allgemeinen elektrischen Gesetze, geleistet werden kann.

29.

Stromarbeit nach elektrischen Gesetzen.

Von *Arbeit* ist nur die Rede, wenn Angriffspunkte von Kräften sich bewegen. Die Arbeit A eines solchen Punktes ist das Produkt der Komponente der auf ihn wirkenden Kraft, nach der Richtung seiner Bewegung, in den von ihm zurückgelegten Weg. Jedoch kann Arbeit in doppeltem Sinne genommen werden, es bedeutet nämlich entweder das Arbeiten selbst oder das Gearbeitete. Nach der gegebenen Definition ist A die Arbeit im letzteren Sinne, während Arbeit im ersteren Sinne durch den Differentialquotienten von A in Beziehung auf die Zeit, d. i. durch dA/dt ausgedrückt wird.

Bei einem galvanischen Strome i in einem Leiterelemente α sind nun aber alle Theilchen der in α enthaltenen elektrischen Fluida Angriffspunkte der elektromotorischen Kräfte, und diese Angriffspunkte bewegen sich in der Richtung des Elements α theils vorwärts theils rückwärts. Die Arbeit A oder dA/dt aller dieser Angriffspunkte ist die Arbeit des galvanischen Stroms i im Leiterelemente α. Dass die bewegten Angriffspunkte der Kräfte in diesem Falle keine ponderable Masse besitzen, ist für die Arbeit selbst, nach der gegebenen Definition, ohne alle Bedeutung.

Die im Elemente α enthaltene Menge *positiver* Elektricität werde mit $+\alpha\varepsilon$ bezeichnet, und die nach elektrischem Gesetze damit proportionale darauf wirkende, in der Richtung α vorwärts gerichtete, Kraft werde mit $+f$ bezeichnet, wo f der Zahlenwerth ist, welcher angiebt, wie oft darin diejenige Kraft, welche der ponderablen Masseneinheit in der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt, enthalten ist. — Die im Elemente α enthaltene Menge *negativer* Elektricität werde mit $-\alpha\varepsilon$, und die darauf wirkende, in der Richtung α rückwärts gerichtete, Kraft mit $-f$ bezeichnet. — Die Geschwindigkeit, mit welcher sich diese elektrischen Massen in der Richtung α vorwärts und rückwärts bewegen, soll mit $\pm u$ bezeichnet werden. Nach der gegebenen Definition ist dann die Arbeit der *positiven* Elektricität im Elemente α, während der Zeit t,

$$A' = (+f) \cdot (+ut) = +fut;$$

die Arbeit der *negativen* Elektricität im Elemente α während derselben Zeit,

$$A'' = (-f) \cdot (-ut) = +fut;$$

folglich die ganze Arbeit des galvanischen Stroms im Elemente a, während der Zeit t,

$$A = 2fut.$$

Für Arbeit, im Sinne des Arbeitens genommen, erhält man aber

$$\frac{dA}{dt} = 2fu.$$

$2f$ nennt man die auf die Elektricität im Elemente a wirkende *absolute Scheidungskraft*, u die *absolute Stromgeschwindigkeit*, die aber beide unmittelbar weder beobachtet noch gemessen werden können.

Beobachtet und gemessen werden dagegen die auf a wirkende sogenannte *elektromotorische Kraft* e und die *Stromintensität* i, nach den früher festgesetzten absoluten Maassen.

Soll also die Stromarbeit in a bestimmt werden, so müssen die Beziehungen zwischen der Scheidungskraft $2f$ und elektromotorischen Kraft e, ferner zwischen der Stromgeschwindigkeit u und der Stromintensität i gegeben sein, wovon schon Art. 1 gehandelt worden ist. Es ist nämlich, wie dort angeführt worden (wo nur f die hier mit $2f$ bezeichnete absolute Scheidungskraft bedeutete),

$$\frac{i}{u} = \frac{\varepsilon}{c}\sqrt{8},$$

$$\frac{e}{2f} = \frac{c}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{8}},$$

worin c eine aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung bekannte *konstante Geschwindigkeit* ist, nämlich $c = 439450 . 10^6$ Millimeter/Sekunde.

Hieraus ergiebt sich $2fu = ei$; folglich ist der *Widerstand nach der zweiten Definition*, nämlich der Quotient der Stromarbeit dA/dt dividirt durch das Quadrat der Stromintensität,

$$\frac{1}{i^2} \cdot \frac{dA}{dt} = \frac{2fu}{i^2} = \frac{e}{i},$$

identisch mit dem *Widerstande nach der ersten Definition*, nämlich mit dem Quotienten der elektromotorischen Kraft e dividirt durch die Stromintensität i,

$$\frac{e}{i} = w.$$

Es ist also die *Stromarbeit* in einem Stromleiter $dA/dt = wi^2$, wo i die Stromintensität und w den Widerstand des Leiters nach den früher festgesetzten absoluten Maassen bezeichnen. Umgekehrt kann der *Widerstand eines Stromleiters* nach absolutem Maasse als die *Arbeit der Stromeinheit* im Leiter definirt werden. Können also auf irgend eine

Weise Stromarbeit wi^2 und Stromintensität i unabhängig von einander beobachtet und nach den festgesetzten absoluten Maassen gemessen werden, so findet man aus diesen beiden Messungen den *Widerstand* nach absolutem Maasse $w = wi^2/i^2$, ohne dass es der Kenntniss der *elektromotorischen Kraft* e bedarf, durch welche der Strom hervorgebracht wurde. Es wird also durch diese Principien eine wesentlich neue Methode der absoluten Widerstandsmessung gewonnen.

Es ist schon bemerkt worden, wie die Beobachtung und Messung der von einem Strome in einem Leiter erzeugten Wärme benutzt werden kann, um die Stromarbeit unabhängig von der Stromintensität zu bestimmen; doch bietet sich noch ein anderer Weg dar, wo es nicht nöthig ist, die Voraussetzungen der mechanischen Wärmetheorie zu Hülfe zu nehmen, sondern wo das elektrische Grundgesetz genügt, wonach messbare *Arbeit ponderabler Körper* in Stromarbeit umgesetzt werden kann, so dass Stromarbeit durch Messung der Arbeit bewegter ponderabler Körper sich bestimmen lässt. Doch möge der näheren Erörterung dieser Methode, die Stromarbeit zu messen, eine kurze Betrachtung über das *Maximum der Stromarbeit* vorausgeschickt werden, die sich aus der nach elektrischen Gesetzen gegebenen Bestimmung der Stromarbeit unmittelbar ergiebt.

30.

Maximum der Stromarbeit.

Es sei eine Voltaische Säule oder irgend ein anderer Elektromotor gegeben, welcher in dem Leiter, durch den er geschlossen wird, nach Verschiedenheit desselben bald eine grössere, bald eine kleinere Stromarbeit verrichtet; es wird derjenige Leiter gesucht, für welchen diese Stromarbeit ein Maximum ist.

Bezeichnet man den Widerstand des Leiters mit w und die Stromintensität mit i, so ist die Stromarbeit in diesem Leiter nach elektrischen Gesetzen, wie im vorigen Artikel gezeigt wurde, $= wi^2$. Nach den Ohm'schen Gesetzen ist aber, wenn e die elektromotorische Kraft und w' den Widerstand des gegebenen Elektromotors bezeichnet, die Stromintensität $i = e/(w' + w)$, folglich ist $wi^2 = e^2 w/(w' + w)^2$. Hiernach wird derjenige Leiter gefunden, für welchen die Stromarbeit ein Maximum ist, wenn für einen veränderlichen Werth von w

$$\frac{e^2 w}{(w' + w)^2} = \text{Maximum}$$

gesetzt wird, woraus $[(w' + w)^2 e^2 - 2 e^2 w (w' + w)]/[w' + w]^4 = 0$, d. i. $w = w'$ folgt. Das heisst also, die Stromarbeit im Leiter ist am grössten,

wenn der Widerstand des Leiters dem gegebenen Widerstande des Elektromotors gleich ist; dieser grösste Werth selbst ist aber $= e^2/4w'$, während die ganze Stromarbeit, im Leiter und im Elektromotor zusammen genommen, $= e^2/2w'$, also doppelt so gross ist. Wäre $w > w'$, so würde die auf den Leiter übertragene Arbeit von der ganzen Stromarbeit zwar mehr als die Hälfte betragen, dennoch aber, bei verminderter ganzer Stromarbeit, kleiner sein als wenn $w = w'$ ist.

Das *Maximum der ganzen Stromarbeit* findet aber Statt, wenn gar kein Leiter zum Schluss der Kette gebraucht wird, folglich gar keine Uebertragung von Stromarbeit an einen solchen Leiter möglich ist, sondern der Elektromotor in sich selbst geschlossen wird. Dieser grösste Werth der ganzen Stromarbeit ist nämlich $= e^2/w'$, d. i. vier Mal grösser als die auf andere Leiter übertragbare Stromarbeit. Es steht hiermit die starke Erwärmung in sich geschlossener Säulen in Zusammenhang, zumal wenn diese Säulen einen im Verhältniss zu ihrer elektromotorischen Kraft recht geringen Widerstand besitzen, wie dies z. B. bei Grove'schen Säulen der Fall ist.

Es leuchtet übrigens leicht ein, dass auch das schon früher für Galvanometer aufgestellte Gesetz, dass nämlich ihre Empfindlichkeit, bei beliebig gegebener Grösse und Gestalt ihres Multiplikators, stets dann am grössten sei, wenn der Widerstand des Multiplikatordrahts dem Widerstand der übrigen Kette gleich ist, als einzelner Fall oder specielle Anwendung des für das Maximum der übertragenen Stromarbeit an Leiter gefundenen allgemeineren Gesetzes betrachtet werden kann.

31.

Umsetzung der Arbeit bewegter ponderabler Körper in Stromarbeit durch elektrische Wechselwirkung.

Wird ein geschlossener Leiter gegen ein Solenoid, d. i. gegen einen anderen geschlossenen Leiter, auf welchen eine gegebene elektromotorische Kraft e wirkt, bewegt, so ergeben sich aus dem Grundgesetz der elektrischen Wirkung theils elektromotorische Kräfte, welche die elektrischen Fluida in ihren ponderablen Leitern bewegen (Induktionskräfte nach Faraday), theils Kräfte, welche die elektrischen Fluida mit ihren ponderablen Leitern bewegen (elektrodynamische Kräfte nach Ampère).

Die *ersteren* oder die Induktionskräfte nach Faraday sind

1. die auf den *geschlossenen Leiter* nach dem Gesetz der *Volta-Induktion in Folge der Bewegung* des geschlossenen Leiters gegen das Solenoid wirkende elektromotorische Kraft ε';

2. die auf den *geschlossenen Leiter* nach dem Gesetz der *Volta-*

Induktion in Folge der Stromänderung im Solenoid wirkende elektromotorische Kraft η';

3. die auf das *Solenoid* nach dem Gesetz der *Volta-Induktion in Folge der Bewegung* des geschlossenen Leiters gegen das Solenoid wirkende elektromotorische Kraft ε;

4. die auf das *Solenoid* nach dem Gesetz der *Volta-Induktion in Folge der Stromänderung* im geschlossenen Leiter wirkende elektromotorische Kraft η.

Die *letzteren*, oder die elektrodynamischen Kräfte nach AMPÈRE, sind die von allen Stromelementen des Solenoids auf alle Stromelemente des geschlossenen Leiters ausgeübten Anziehungs- oder Abstossungskräfte.

Nach dieser Uebersicht hat man *erstens* die Stromarbeit dA'/dt des von den elektromotorischen Kräften $(\varepsilon' + \eta')$ im *geschlossenen Leiter* erregten Stromes i', *zweitens* die Stromarbeit dA''/dt des von den elektromotorischen Kräften $(\varepsilon + \eta)$ im *Solenoid* erregten Stromes i'', *drittens* endlich die von den bewegten *ponderablen* Theilchen des geschlossenen Leiters, auf welche die von den Stromelementen des Solenoids ausgeübten Anziehungs- und Abstossungskräfte wirken, vollbrachte Arbeit dA'''/dt, zu unterscheiden.

Bezeichnet man den Widerstand des *geschlossenen Leiters* mit w', so ist

$$\frac{dA'}{dt} = w'i'^2 = \frac{(\varepsilon' + \eta')^2}{w'};$$

bezeichnet man den Widerstand des *Solenoids* mit w und ist e die *im Solenoid gegebene konstante elektromotorische Kraft*, und $i = e/w$ die Intensität des von dieser Kraft erregten Stromes, so ist

$$\frac{dA''}{dt} = w(i + i'')^2 - wi^2 = \frac{(e + \varepsilon + \eta)^2 - e^2}{w};$$

bezeichnet man endlich die Summe der Komponenten aller auf ein bewegtes *ponderables* Theilchen des geschlossenen Leiters von allen Stromelementen des Solenoids ausgeübten Anziehungs- und Abstossungskräfte, nach der Richtung der Bewegung, mit f, und die Geschwindigkeit dieser Bewegung mit v, so ist

$$\frac{dA'''}{dt} = \Sigma f v.$$

Substituirt man nun hierin die aus dem allgemeinen elektrischen Grundgesetze bekannten Werthe sowohl der elektromotorischen Kräfte ε, η, ε', η', wie auch der elektrodynamischen Kräfte f, so soll bewiesen werden, dass

$$\int\left(\frac{dA'}{dt} + \frac{dA''}{dt} + \frac{dA'''}{dt}\right)dt = 0,$$

wenn die Integration auf den ganzen Zeitraum erstreckt wird, nach welchem alle ponderablen Theilchen des geschlossenen Leiters mit unveränderter Geschwindigkeit wieder in ihre frühere Lage zurückkehren.

Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung des einfachen Falls, wo das Solenoid sowohl wie der geschlossene Leiter *Kreise* sind, deren Halbmesser mit r und r' bezeichnet werden mögen. Der Abstand der beiden Kreismittelpunkte von einander sei R und sei so gross, dass r und r' dagegen als verschwindend betrachtet werden dürfen. Die Verbindungslinie R stehe senkrecht auf der Solenoidebene, und der geschlossene Leiter drehe sich um seinen mit R rechtwinkeligen Durchmesser, und zwar mit gleichförmiger Geschwindigkeit $d\alpha/dt = \gamma$, wo α den Winkel bezeichnet, welchen das auf die Ebene des geschlossenen Leiters errichtete Perpendikel mit R bildet. Setzt man dann $\pi^2 r^2 r'^2/R^3 = a$, so lassen sich aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung leicht folgende Ausdrücke für die elektromotorischen Kräfte ableiten:

$$\varepsilon' = -2a\gamma \frac{e+\varepsilon+\eta}{w} \cdot \sin\alpha,$$

$$\eta' = -2a(1-\cos\alpha)\frac{d\varepsilon + d\eta}{w\,dt},$$

$$\varepsilon = -2a\gamma\frac{\varepsilon'+\eta'}{w'} \cdot \frac{\sin\alpha}{1+3\cos\alpha^2},$$

$$\eta = -2a\sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(\tfrac{\pi}{3} - \text{arc tang}\,[\cos\alpha\,.\,\sqrt{3}]\right)\frac{d\varepsilon'+d\eta'}{w'dt}.$$

Entwickelt man nun $(\varepsilon'+\eta')$ und $(\varepsilon+\eta)$ in Reihen nach wachsenden Potenzen von a, so erhält man die ersten Glieder dieser Reihen, gegen welche alle folgenden verschwinden,

$$\varepsilon'+\eta' = -2a\gamma\frac{e}{w} \cdot \sin\alpha,$$

$$\varepsilon+\eta = 4a^2\gamma^2\frac{e}{ww'}\left(\frac{\sin\alpha^2}{1+3\cos\alpha^2} + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(\tfrac{\pi}{3} - \text{arc tang}\,[\cos\alpha\,.\,\sqrt{3}]\right)\cos\alpha\right),$$

und hieraus, ebenso entwickelt,

$$\frac{dA'}{dt} = 4a^2\gamma^2 \cdot \frac{e^2}{w^2w'} \cdot \sin\alpha^2,$$

$$\frac{dA''}{dt} = 8a^2\gamma^2 \cdot \frac{e^2}{w^2w'} \cdot \left(\frac{\sin\alpha^2}{1+3\cos\alpha^2} + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(\tfrac{\pi}{3} - \text{arc tang}\,[\cos\alpha\,.\,\sqrt{3}]\right)\cos\alpha\right),$$

oder, da der Differentialquotient $\dfrac{d\,[\sin\alpha\,.\,\text{arc tang}\,(\cos\alpha\,.\,\sqrt{3})]}{d\alpha} =$ $\cos\alpha\,.\,\text{arc tang}\,(\cos\alpha\,.\,\sqrt{3}) - \dfrac{\sin\alpha^2\,.\,\sqrt{3}}{1+3\cos\alpha^2}$ ist,

$$\frac{dA''}{dt} = 8a^2\gamma^2 \cdot \frac{e^2}{w^2w'} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(\tfrac{\pi}{3}\cos\alpha - \frac{d\,[\sin\alpha\;\text{arc tang}\,(\cos\alpha\,.\,\sqrt{3})]}{d\alpha}\right).$$

Bezeichnet man endlich den Abstand irgend eines ponderablen Theilchens des geschlossenen Leiters von seiner Drehungsaxe mit ϱ, so ist das vom Solenoid auf den geschlossenen Leiter ausgeübte Drehungsmoment $D = \Sigma f\varrho$, und die Geschwindigkeit, mit welcher sich das ponderable Theilchen in seiner Kreisbahn (deren Tangente mit der Richtung der Kraft f zusammenfällt) bewegt, $v = \varrho\gamma$; folglich ist bei *konstanter Drehungsgeschwindigkeit* γ

$$\frac{dA'''}{dt} = \Sigma f v = \Sigma f\varrho\gamma = \gamma\Sigma f\varrho = \gamma D.$$

Das vom Solenoid auf den geschlossenen Leiter ausgeübte Drehungsmoment D ist aber nach dem AMPÈRE'schen Gesetze

$$D = 2a\gamma \sin a \cdot \frac{e + \varepsilon + \eta}{w} \cdot \frac{\varepsilon' + \eta'}{w'},$$

und setzt man hier die gefundenen Werthe von $(\varepsilon + \eta)$ und $(\varepsilon' + \eta')$ ein, und entwickelt nach Potenzen von a, so erhält man das erste Glied, gegen welches die anderen verschwinden,

$$D = -4a^2\gamma \cdot \frac{e^2}{w^2 w'} \cdot \sin a^2,$$

folglich

$$\frac{dA'''}{dt} = -4a^2\gamma^2 \cdot \frac{e^2}{w^2 w'} \cdot \sin a^2 = -\frac{dA'}{dt}.$$

Für dA''/dt ergiebt sich der Integralwerth $\int [dA''/dt] \,.\, dt$ für die Zeit einer ganzen Umdrehung des geschlossenen Leiters, d. h. für die Zeit, nach welcher alle ponderablen Theilchen mit unveränderter Geschwindigkeit wieder in ihre frühere Lage zurückkehren, bei *konstanter* Drehungsgeschwindigkeit $da/dt = \gamma$,

$$\int \frac{dA''}{dt} dt = \int 8a^2\gamma \cdot \frac{e^2}{w^2 w'} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{3}} \left(\tfrac{\pi}{3} \cos a - \frac{d[\sin a \,.\, \operatorname{arctang}(\cos a \,.\, \sqrt{3})]}{da}\right) da,$$

was, zwischen den Grenzen a und $a + 2\pi$ genommen, $= 0$ ist. Da nun $dA'/dt + dA'''/dt = 0$, folglich auch $\int (dA'/dt + dA'''/dt)\, dt = 0$ war, so ergiebt sich hieraus, zwischen den angegebenen Grenzen,

$$\int \left(\frac{dA'}{dt} + \frac{dA''}{dt} + \frac{dA'''}{dt}\right) dt = 0,$$

was zu beweisen war.

Man ersieht hieraus, in Beziehung auf die *Arbeit der ponderablen Theilchen* des geschlossenen Leiters, dass in jedem Augenblicke dt ein Arbeitsverlust, durch die von der Induktion hervorgebrachte *Dämpfung*,

$$\frac{dA'''}{dt} dt = -4a^2\gamma^2 \cdot \frac{e^2}{w^2 w'} \cdot \sin a^2\, dt,$$

Statt findet, welcher durch eine auf den geschlossenen Leiter wirkende *Triebkraft* wieder ersetzt werden muss, wenn die Drehungsgeschwindigkeit γ angenommener Weise unverändert bleiben soll. Dagegen findet in dem nämlichen Augenblicke dt ein Gewinn an *Stromarbeit im geschlossenen Leiter* Statt, nämlich

$$\frac{dA'}{dt}\,dt = +\,4a^2\gamma^2\cdot\frac{e^2}{w^2w'}\cdot\sin\alpha^2\,dt$$

von gleichem Betrage, woraus also folgt, dass hierbei durch Vermittelung der elektrischen Wechselwirkungen eine reine Umsetzung von *Arbeit ponderabler Körper* in *Stromarbeit* Statt gefunden hat.

Ergäbe sich also aus der Beobachtung, dass die Drehungsgeschwindigkeit γ wirklich ganz unverändert bliebe, und würden dabei die *Triebkräfte* gemessen, welche auf den sich drehenden geschlossenen Leiter wirken müssten, um diese Drehungsgeschwindigkeit unveränderlich zu erhalten, sowohl bei *geöffnetem* Solenoid (wodurch die zur Ueberwindung des Widerstandes der Luft und der Reibung erforderliche Triebkraft bestimmt wird), als auch bei *geschlossenem* Solenoid (wodurch die zur Ueberwindung der elektrischen Dämpfung erforderliche Triebkraft zusammen mit der zur Ueberwindung des Widerstandes der Luft und der Reibung erforderlichen, bestimmt wird), so gäbe die Differenz der beiden gemessenen Triebkräfte, mit der ebenfalls leicht zu messenden Drehungsgeschwindigkeit γ multiplicirt, den Werth von

$$-\frac{dA'''}{dt} = \frac{dA'}{dt},$$

d. i. den Werth der *Stromarbeit im geschlossenen Leiter*, welche der darin inducirte Strom i' in der Zeiteinheit verrichtete.

Würde endlich mit dieser Messung der *Stromarbeit* dA'/dt die Messung der *Stromintensität* i' noch verbunden, so ergäbe sich der *Widerstand des geschlossenen Leiters*, nach absolutem Werthe,

$$w' = \frac{1}{i'^2}\cdot\frac{dA'}{dt}.$$

32.

Bestimmung der Stromarbeit durch Vermittelung von Wärmemessung, nach Versuchen von Becquerel *und* Lenz.

Soll der Widerstand eines Leiters nach absolutem Maasse bestimmt werden, aber nicht nach der früher angewandten Methode, durch Messung der *elektromotorischen Kraft* und der *Stromintensität*, sondern nach

der zuletzt angegebenen, durch Messung der *Stromarbeit* und der *Stromintensität*, so stehen im Allgemeinen, wie gezeigt worden, zwei Wege offen, nach Verschiedenheit der Methode, nach welcher die *Stromarbeit* gemessen wird. Die *Stromarbeit* kann nämlich gemessen werden *erstens* durch Messung der *Arbeit bewegter ponderabler Körper*, welche in Stromarbeit umgesetzt wird, wovon im vorigen Artikel gehandelt wurde, *zweitens*, durch Messung der *Wärme*, in welche die Stromarbeit umgesetzt wird.

Die *erstere Methode* hatte darum ein besonderes Interesse, weil sie blos auf die bekannten, der reinen Elektricitätslehre angehörenden, Gesetze gebaut war. Die Art und Weise ihrer Ausführung ist nun zwar im vorigen Artikel an einem einfachen Beispiele erläutert worden, man würde aber damit noch in Wirklichkeit zu keinen brauchbaren Resultaten gelangen. Es müssten zuvor wenigstens die günstigsten Verhältnisse für die nach dieser Methode erforderlichen Beobachtungen näher erörtert werden, worauf hier jedoch nicht eingegangen werden soll, weil man leicht im Voraus übersieht, dass auch dann unter den stets vom Widerstand der Luft und von der Reibung fester Körper aneinander abhängigen Verhältnissen, unter denen sich alle *ponderablen Körper*, die wir beobachten, bewegen, die Messung der von ihnen verrichteten Arbeit, oder der zur Erhaltung ihrer Bewegung nothwendigen Triebkraft, auch unter den sonst günstigsten Verhältnissen nicht genau genug ausgeführt werden könnte.

Die *letztere Methode*, bei welcher die Gesetze der mechanischen Wärmetheorie zu Hülfe genommen werden müssen, scheint daher praktisch die einzige zu sein, von welcher so genaue Bestimmungen der *Stromarbeit* erwartet werden dürfen, wie nöthig wären, um aus *Stromarbeit* und *Stromintensität* einen Leitungswiderstand ebenso genau wie aus *elektromotorischer Kraft* und *Stromintensität* zu bestimmen. Es ist daher von Interesse, näher zu betrachten, was auf diesem Wege in neuerer Zeit durch die zahlreichen, namentlich von Becquerel und Lenz, darüber angestellten Versuche geleistet worden ist.

Edmond Becquerel führt in seiner Abhandlung: Des lois du dégagement de la chaleur pendant le passage des courants électriques à travers les corps solides et liquides (Annales de chimie et de physique 1843 tome IX) an, dass nach seinen Versuchen ein Strom, welcher, wenn er durch Wasser geleitet würde, 3,383 Kubikcentimeter Knallgas in jeder Minute, bei 0^{0} Temperatur und 0,76 Meter Barometerstand, erzeugen würde, in einem Platindrahte von 44 Centimeter Länge und 0,422 Gramm Gewicht, durch den er geht, in jeder Minute so viel Wärme erzeugt, als 2,18523 Gramm Wasser zur Erhöhung ihrer Temperatur um 1 Grad brauchen.

Nimmt man zu diesen Angaben die von Joule, nach der mechanischen Wärmetheorie, gefundene Bestimmung noch zu Hülfe, wonach die Wärmemenge, welche 1 Kilogramm Wasser von 0^0 auf 1^0 zu erwärmen vermag, wenn sie in mechanische Arbeit verwandelt wird, eine Arbeitsgrösse von 423,55 Kilogramm-Metern giebt, so findet man, dass die *in jeder Minute* in dem beschriebenen Platindrahte durch den angegebenen Strom erzeugte Wärme, wenn sie in mechanische Arbeit verwandelt wird, eine Arbeitsgrösse von 2,185 23 . 0,423 55 Kilogramm-Metern giebt, also die *in jeder Sekunde* erzeugte Wärme den 60. Theil hiervon. Hieraus ergiebt sich nach *absolutem Arbeitsmaasse*, welches von uns auf Millimeter, Milligramm und Sekunde als Grundmaassen der Länge, der Masse und der Zeit zurückgeführt wird (wonach die Schwere $g = 9\,811$ Millimeter/Sekunde^2 zu setzen ist), die *Stromarbeit*

$$wi^2 = \tfrac{1}{60} \,.\, 9\,811 \,.\, 2{,}185\,23 \,.\, 0{,}423\,55 \,.\, 10^9 = 151\,340 \,.\, 10^6.$$

Was ferner die *Stromintensität* betrifft, nehmen wir die Angabe zu Hülfe, wonach die Intensität eines Stroms, welcher 1 Milligramm Wasser in einer Sekunde zerlegt, $106\frac{2}{3}$ Mal grösser als das absolute Intensitätsmaass ist (siehe Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaften der Wissenschaften Bd. 3, S. 224).[1] Rechnet man nun, dass 1 Milligramm Wasser zersetzt, 1,856 8 Kubikcentimeter Knallgas bei 0^0 Temperatur und 0,76 Meter Barometerstand giebt, so ist die Intensität des beschriebenen Stroms, welcher *in jeder Minute* 3,383 Kubikcentimeter Knallgas erzeugt, nach absolutem Maasse,

$$i = \frac{1}{60} \cdot \frac{3{,}383}{1{,}856\,8} \cdot 106\tfrac{2}{3} = 3{,}239\,1.$$

Aus diesen Bestimmungen ergiebt sich endlich der *Widerstand des beschriebenen Platindrahts nach absolutem Maasse*

$$w = \frac{wi^2}{i^2} = \frac{151\,340 \,.\, 10^6}{3{,}239\,1^2} = 14\,425 \,.\, 10^6.$$

Dieser Widerstand, mit der Masse eines Millimeter langen Stücks des Drahts $= \frac{422}{440}$ multiplicirt und mit der in Millimetern ausgedrückten Länge des Drahts $= 440$ dividirt, giebt nach den Ohm'schen Gesetzen den Widerstand eines Platindrahts von 1 Millimeter Länge und 1 Milligramm Masse, d. i. den *specifischen Widerstand des Platins*

$$p = 31\,443\,000.$$

Lenz, in seiner Abhandlung: *Ueber die Gesetze der Wärmeentwickelung durch den galvanischen Strom* (Poggendorff's Annalen 1843—44, Bd. 59, 61) giebt die Zeit zur Erwärmung von 1 Gramm Wasser auf 1^0 R. durch einen Draht vom Widerstande $= 1$, durch welchen ein

[1] [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 614.]

Strom = 1 geht, zu $57\frac{1}{2}$ Minuten (durch einen Druckfehler, wie es scheint, ist $5\frac{3}{4}$ Sekunden angegeben) an, wobei einem Kupferdrahte von 6,358 Fuss Länge und 0,0336 Zoll engl. Durchmesser, bei der Temperatur 15^0, *die Einheit des Widerstands*, und einem Strome, dessen elektrolytische Aktion = 41,16 Kubikcentimeter Knallgas in der Stunde, bei 0^0 Temperatur und 760 Millimeter Barometerdruck, die *Einheit der Intensität* zugeschrieben worden ist.

Nach der mechanischen Wärmetheorie giebt nun, der schon angeführten Joule'schen Bestimmung gemäss, die in jeder Sekunde im beschriebenen Kupferdrahte von der angenommenen Stromeinheit erzeugte Wärme, wenn sie in mechanische Arbeit verwandelt wird, eine *Arbeitsgrösse* = [5/4] . [1/(60 . 57,5)] . 0,42355 Kilogramm-Meter, d. i. nach *absolutem* (auf Millimeter, Milligramm und Sekunde als Grundmaassen der Länge, Masse und Zeit zurückgeführten) *Arbeitsmaasse*, die *Stromarbeit*

$$wi^2 = 9811 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{60 \,.\, 57,5} \cdot 0,42355 \,.\, 10^9 = 1506 \,.\, 10^6.$$

Für die *angenommene Stromeinheit* ferner, deren elektrolytische Aktion in der Stunde 41,16 Kubikcentimetern Knallgas entsprach, findet man nach Reduktion auf *absolutes Maass* den Werth

$$i = \frac{1}{3600} \cdot \frac{41,16}{1,8568} \,.\, 106\tfrac{2}{3} = 0,65683.$$

Aus diesen Bestimmungen ergiebt sich endlich der *Widerstand des beschriebenen Kupferdrahts nach absolutem Maasse*

$$w = \frac{wi^2}{i^2} = \frac{1506 \,.\, 10^6}{0,65683^2} = 3490 \,.\, 10^6.$$

Rechnet man die Masse des beschriebenen, 6,358 Fuss engl. = 1938 Millimeter langen Kupferdrahts, indem man die Dichtigkeit des Kupfers = 8,921 annimmt, zu 9889 Milligramm, so ergiebt sich nach den Ohm'schen Gesetzen durch Multiplikation des gefundenen Widerstands w mit der Masse eines 1 Millimeter langen Stücks, $= \frac{9889}{1938}$, und Division mit der in Millimetern ausgedrückten Länge des Drahts, = 1938, der Widerstand eines Kupferdrahts von 1 Millimeter Länge und 1 Milligramm Masse, d. i. der *specifische Widerstand des Kupfers*

$$\varkappa = 9190000.$$

Dieses Resultat, mit dem aus Becquerel's Versuchen abgeleiteten verglichen, ergäbe, dass der specifische Widerstand des Kupfers etwa $3\frac{1}{2}$ Mal kleiner als der des Platins wäre, während aus zahlreichen direkten Vergleichungen bekannt ist, dass er noch viel kleiner ist, nämlich nach Arndtsen's Versuchen, wenn man die für gleiche Draht-

längen *von gleichem Querschnitt* gemachten Angaben auf gleiche Drahtlängen *von gleicher Masse* reducirt, und dabei das Dichtigkeitsverhältniss von Kupfer zu Platin wie 1 : 2,244 annimmt, 15,22 Mal kleiner, und nach Matthiessen's Versuchen 15,93 Mal kleiner, im Mittel also 15,575 Mal kleiner. Hiernach würde aus Becquerel's Versuchen der specifische Widerstand des Kupfers

$$\varkappa = \frac{p}{15{,}575} = 2\,018\,800$$

berechnet werden, was dem Mittel aus den auf anderen Wegen für verschiedene Kupfersorten bisher gefundenen Werthen ziemlich nahe kommt, aber von dem aus den Lenz'schen Versuchen abgeleiteten Werthe $4\frac{1}{2}$ Mal an Grösse übertroffen wird.

Indessen bemerkt Lenz selbst a. a. O. in Beziehung auf die *absolute* Grösse des aus seinen Versuchen abgeleiteten Resultats: „dieses Resultat ist ein blos angenähertes, und kann nur zu ganz rohen Ueberschlägen dienen, denn weder die absolute Quantität des Spiritus noch seine Wärmekapacität sind mit Sicherheit bestimmt worden. Meine gegenwärtigen Versuche hatten keinen anderen Zweck, als das Gesetz der Erwärmung von Metalldrähten zu bestimmen; für die genaue Bestimmung des absoluten Werths dieser Erwärmung denke ich noch besondere Versuche anzustellen".

Es ist daher sehr wahrscheinlich, dass bei der von Lenz sonst in allen Beziehungen auf diese Versuche verwandten Sorgfalt, blos weil die Aufmerksamkeit auf *absolute* Werthbestimmungen weniger gerichtet war, irgend eine zufällige für die allein bezweckte Begründung der Gesetze einflusslose Verwechselung bei Werthangabe der Reduktionskoefficienten Statt gefunden hat, welche an obiger grossen Abweichung im *absoluten* Werthe Schuld ist; denn die genauere Prüfung der Versuche zeigt offenbar, dass die Bestimmung des Widerstands eines Körpers nach dieser Methode wohl ausführbar ist, was auch durch die gute Uebereinstimmung des aus Becquerel's Versuchen abgeleiteten Resultats mit den auf anderem Wege gefundenen bestätigt zu werden scheint; es müssten aber doch, um ganz zuverlässige und genaue Resultate auf diesem Wege zu erlangen, die *Wärmemessungsmethoden* noch sehr vervollkommnet und schärfere Bestimmungen über *Aequivalenz von Wärme und Arbeit*, als man bisher besitzt, gewonnen werden, und selbst dann würde doch die absolute Widerstandsmessung eines *Leitungsdrahts* nach dieser Methode die Genauigkeit des durch gemessene elektromotorische Kraft und Stromintensität zu erlangenden Resultats nicht erreichen.

Theilt man aber die galvanischen Leiter in *metallische, durch den Strom nicht zersetzbare*, und in *feuchte zersetzbare*, so ergiebt sich, dass

bei feuchten zersetzbaren Leitern, z. B. beim *Wasser*, ein umgekehrtes Verhältniss wie bei *Leitungsdrähten* Statt findet, dass nämlich eine Widerstandsbestimmung feuchter Leiter durch gemessene elektromotorische Kraft und Stromintensität *direkt* fast unausführbar ist, wozu noch kommt, dass sogar eine *indirekte* Bestimmung durch Vergleichung des unbekannten Widerstands des feuchten Leiters mit dem bekannten Widerstande eines Leitungsdrahts, wegen der sogenannten *Polarisation* der den feuchten Leiter berührenden Metalloberfläche, grosse Schwierigkeiten findet. Es ist bekannt, dass daher bei aller aufgewandten Mühe und Sorgfalt die Widerstandsverhältnisse feuchter Leiter noch immer nur sehr mangelhaft erforscht sind. Die grösste Bedeutung gewinnt aus diesen Gründen für diese Forschungen die *andere Methode der Widerstandsmessung*, nämlich durch gemessene Stromarbeit (Wärme) und gemessene Stromintensität, weil sie, auf *feuchte Leiter* angewendet, ebenso grosse Vorzüge vor der ersteren besitzt, wie die *erstere*, auf *Leitungsdrähte* angewendet, vor der zweiten besass. Diese Vorzüge beruhen nicht allein auf den bei feuchten Leitern (Wasser) anwendbaren vollkommeneren Wärmemessungsmethoden, sondern vorzugsweise auf der Unabhängigkeit der ganzen Messung von der Betrachtung der *elektromotorischen Kraft*, die bei allen Ketten, wo feuchte Leiter eingeschaltet sind, immer als veränderlich betrachtet werden muss, weil die Einflüsse der Polarisation sich wohl vermindern, aber nicht ganz beseitigen lassen. Die *elektromotorische Kraft* ist aber bei so unregelmässigen Veränderungen keiner genauen Bestimmung fähig.

Diese ebenso wichtige wie interessante Anwendung, welche diese zweite Methode auf absolute Widerstandsmessung *feuchter zersetzbarer Leiter* findet, soll, da sie in keinem engeren Zusammenhange mit dem Gegenstande dieser Abhandlung steht, einer besonderen Erörterung vorbehalten bleiben.

33.

Ueber die Umsetzung der Stromarbeit in Wärme.

Die Stromarbeit ist an die Bewegung der elektrischen Fluida geknüpft; die Wärme ist, nach der mechanischen Wärmetheorie, ebenfalls an die Bewegung eines Körpers gebunden, den man aber von den elektrischen Fluidis zu unterscheiden pflegt. Eine nähere Einsicht in die Art und Weise, wie Stromarbeit in Wärme umgesetzt werde, fordert daher zunächst, dass die Bewegungen der elektrischen Fluida bis zu Ende genau verfolgt werden, um die Verhältnisse kennen zu lernen, unter welchen der Uebergang der Bewegung der elektrischen Fluida in die Bewegung eines anderen Mediums Statt finde. Hierbei dürfte

die ideale Annahme von der Superposition mehrerer im Raume des Leiters stetig und gleichförmig vertheilter Substanzen, nämlich der ponderablen Substanz des Leiters, der beiden elektrischen Fluida und ausserdem noch die eines sogenannten Wärmemediums, so angemessen sie für viele andere Zwecke sein möge, wo es sich um Fernwirkungen handelt, nicht zulässig erscheinen, vielmehr leuchtet hierbei leicht die Nothwendigkeit ein, die ponderable Substanz des Leiters in einzelnen Molekulen koncentrirt anzunehmen, die von elektrischen Theilchen umgeben sind, welche sich im Falle eines Stroms von einem Molekule zum anderen fortbewegen. Die Trennung eines elektrischen Theilchens von einem Molekule muss dann, der verschiedenen Grösse der elektromotorischen Kraft gemäss, von welcher der Strom hervorgebracht wird, bald langsamer bald schneller erfolgen, wovon die Zahl der in einer gewissen Zeit sich vom Molekule trennenden elektrischen Theilchen abhängt. Die Arbeit jedes elektrischen Theilchens bei der Trennungsbewegung, in Folge der von dem Molekule darauf ausgeübten Kräfte, möge nun von der Schnelligkeit der Trennung abhängig sein oder nicht; stets wird eine entgegengesetzt gleiche Arbeit von demselben Theilchen bei seiner Vereinigungsbewegung mit dem folgenden Molekule verrichtet werden, so dass diese beiden Arbeitsgrössen einander kompensiren. Sobald aber das elektrische Theilchen von dem ersteren Molekule getrennt ist, wird es, getrieben von der elektromotorischen Kraft f, den Zwischenraum a bis zum zweiten Molekule durchlaufen und dabei also die Arbeit fa verrichten. Die Summe aller dieser Arbeitsgrössen, Σfa, bildet die ganze Stromarbeit im Leiter. Jedes elektrische Theilchen tritt daher mit einer um den mit fa äquivalenten Werth vergrösserten lebendigen Kraft in das Bereich des folgenden Molekuls ein, als es aus dem Bereich des vorhergehenden Molekuls ausgetreten war, wodurch also der Werth der lebendigen Kräfte im Bereich aller Molekule zusammen genommen um einen mit der ganzen Stromarbeit äquivalenten Betrag vergrössert werden muss. Eine solche der Stromarbeit äquivalente Vergrösserung der lebendigen Kräfte in allen Molekulen zusammen genommen ist nun aber, nach der mechanischen Wärmetheorie, auch die vom Strome im Leiter erzeugte Wärme, und es fragt sich nur, ob sie mit jener ganz identisch ist, d. h. ob sie in der fortdauernden Bewegung jener elektrischen Theilchen selbst besteht, oder ob die jedem Molekule zugeführte Bewegung von den elektrischen Theilchen, welche sie mitbrachten, auf andere Körpertheilchen, z. B. auf die im Bereiche desselben Molekuls befindlichen Theilchen eines besonderen Mediums übertragen werde und erst nach dieser Uebertragung als Wärme hervortrete, wo dann die Gesetze der Uebertragung zu erforschen und nähere Rechenschaft darüber zu geben sein würde, warum dieselbe lebendige Kraft erst dann als

Wärme hervortritt, wenn sie an die Theilchen des Wärmemediums, statt an elektrische Theilchen, geknüpft ist.

Man sieht leicht ein, dass die Behauptung einer solchen Uebertragung der von elektrischen Theilchen mitgebrachten lebendigen Kraft auf die Theilchen eines anderen im Bereiche des Molekuls befindlichen Mediums nicht unerhebliche Schwierigkeiten findet, vorzüglich darum, weil danach konsequenter Weise jene Fortdauer einer Bewegung der elektrischen Theilchen im Bereiche eines solchen ponderablen Molekuls abgeleugnet werden müsste. Wenn die elektrischen Theilchen, welche die Stromarbeit mit sich führen, beim Eintritt in das Bereich eines ponderablen Molekuls die mitgebrachte Stromarbeit sofort, und zwar nicht blos theilweise, sondern ganz und gar, an andere materielle Theilchen (an die Theilchen des Wärmemediums) abtreten müssen, so muss aus gleichem Grunde überhaupt jede den elektrischen Theilchen im Bereiche ponderabler Molekule ertheilte Bewegung, gleichgültig woher sie rühren möge, ihnen sofort wieder entzogen werden, so dass gar keine *beharrende Bewegung elektrischer Theilchen* im Bereiche ponderabler Molekule möglich wäre. Sogar die Möglichkeit des elektrischen Stroms im ponderablen Körper würde dadurch zweifelhaft werden; denn ein elektrisches Theilchen, wenn es auch von noch so grossen elektromotorischen Kräften getrieben würde, könnte in eine grössere Bewegung gar nicht gerathen, wenn jede Bewegung im Entstehen sofort von ihm an die Theilchen des Wärmemediums übertragen würde.

Es leuchtet hieraus ein, dass die Behauptung der Uebertragung aller Stromarbeit auf das Wärmemedium ponderabler Molekule vor Allem mit der Behauptung von der Existenz *beharrlicher elektrischer Molekularströme*, wie sie zuerst von Ampère aufgestellt worden, in totalem Widerspruch steht. Wer also mit Ampère die wirkliche Existenz zweier magnetischen Fluida leugnet und dadurch zur Behauptung *beharrlicher elektrischer Molekularströme* genöthigt wird, darf jene Uebertragung nicht zugeben, und er braucht sie um so weniger zuzugeben, weil gar nichts angeführt werden kann, was durch eine solche Uebertragung gewonnen würde. Wenigstens nach der mechanischen Wärmetheorie leuchtet ein, dass in Beziehung auf die Wärme principiell *unmittelbar* gar nichts anderes als die in den Molekulen vorhandene lebendige Kraft in Betracht kommt, für welche die Beschaffenheit ihres materiellen Trägers indifferent ist. Nur *mittelbar* könnte nach der mechanischen Wärmetheorie die Beschaffenheit des materiellen Trägers der das Wesen der Wärme bildenden lebendigen Kraft in Betracht kommen, nämlich in sofern, als die Kräfte der Wechselwirkung der Theilchen dieses Trägers, theils unter einander theils mit anderen Theilchen, und folglich die Uebertragungs- oder Fortpflanzungsgesetze (die Gesetze der

Wärmestrahlung, der Temperaturmittheilung und der Temperaturausgleichung unter verschiedenen ponderablen Molekulen), davon abhängig wären.

Ist auch der *Wärmeäther im leeren Raume* durch die ihm, gleich dem Lichtäther, zugeschriebenen Gesetze der Wellenfortpflanzung wenigstens indirekt definirt, und kann von seiner Existenz und Verbreitung, auch im Innern der ponderablen Körper, in den leeren Räumen zwischen den Molekulen, ohne die ganze Wellentheorie der strahlenden Wärme zu verwerfen, nicht abstrahirt werden, so findet doch zwischen den ponderablen Körpermolekulen (mit Allem, was in ihrem Bereiche liegt und dazu gehört) und jenem Aether keine weitere Beziehung Statt, als dass *einerseits* die Wellenerregung im Aether (die Wärmestrahlung), *andererseits* die Wellendämpfung (die Wärmeabsorption) von den ponderablen Molekulen ausgehen muss, wozu aber in den Molekulen ebensowenig ein besonderes Wärmemedium nöthig ist, wie im Metall der Glocke, welche Schallwellen durch das Luftmedium aussendet, Luft enthalten zu sein braucht.

Alle diese Betrachtungen lassen sich auf folgende Weise kurz zusammenfassen. Da eine Temperaturerhöhung der ponderablen Molekule nach der mechanischen Wärmetheorie eine Zunahme der lebendigen Kraft in den Molekulen fordert, da diese Zunahme der lebendigen Kraft durch die mit grösserer Geschwindigkeit in das Bereich der Molekule eintretenden, mit geringerer Geschwindigkeit wieder austretenden elektrischen Theilchen, welche den Strom bilden, gegeben ist, da ferner diese Zunahme an lebendiger Kraft *nach der Theorie beharrlicher elektrischer Molekularströme*, während die Theilchen im Bereich der Molekule sich befinden, ungeschwächt *beharrt*, so scheint von einer *Umsetzung* von Stromarbeit in Wärme gar nicht die Rede sein zu können, sondern die in den Molekulen angesammelte *Stromarbeit* scheint danach selbst als die in den Molekulen enthaltene *Wärme* betrachtet werden zu müssen.

Es leuchtet freilich ein, dass alsdann die Gesetze der unter dem Namen *Wärmestrahlung* und *Wärmeabsorption* zusammengefassten Beziehungen zwischen der um die einzelnen Molekule in beharrlicher Molekularströmung befindlichen Elektricität und dem im umgebenden Raume befindlichen Wärmeäther noch einer näheren, auf der Natur beider Medien beruhenden, Begründung bedürfen; einer ebensolchen Begründung würden aber jene Gesetze auch bedürfen, wenn man das sogenannte Wärmemedium an die Stelle der Elektricität setzte. Während nun im letzteren Falle eine solche Begründung gar nicht einmal versucht worden ist, so kann man doch, was den ersteren Fall betrifft, die scharfsinnige, von C. Neumann ausgeführte Untersuchung: *Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarisationis per vires electricas*

vel magneticas declinetur. Halis Saxonum, 1858, als einen solchen ersten Versuch anführen; denn es leuchtet ein, dass das, was NEUMANN von den Beziehungen zwischen beharrlichen elektrischen Molekularströmen und Lichtäther sagt, in ähnlicher Weise auch auf die Beziehungen zwischen beharrlichen elektrischen Molekularströmen und Wärmeäther Anwendung finden werde.

Zwar hat NEUMANN nach seinen Prämissen gefunden, dass keine Einwirkung elektrischer Molekularströme auf *ruhende Aethertheilchen* Statt finden könne; es ist aber dabei zu beachten, dass diese Prämissen, dem Zwecke der NEUMANN'schen Untersuchung gemäss, welcher auf die Einwirkung der Molekularströme auf die schon vorhandenen mitten zwischen den Molekulen durch den Aether fortgepflanzten Wellenzüge beschränkt war, sich zwar auf Wirkungen der Molekularströme in sehr kleinen Entfernungen bezogen, doch aber noch immer die Zulassung einer *idealen* Vorstellung von den Molekularströmen gestatteten, wonach dieselben als eine *Superposition entgegengesetzt gleicher Ströme positiver und negativer Elektricität* betrachtet werden, was aber offenbar nicht gestattet ist, wenn es sich um die Erregung neuer Wellenzüge durch die elektrischen Molekularströme handelt, welche nur in der an die Molekularströme *unmittelbar angrenzenden Aetherschicht* Statt finden kann. Für diese Aetherschicht dürfen die in entgegengesetzter Richtung sich bewegenden positiven und negativen elektrischen Theilchen nicht mehr als zusammenfallend betrachtet werden. Denkt man sich dann also z. B. das negative Fluidum mit dem Molekule als fest verbunden, und das positive Fluidum allein in Molekularströmung begriffen, oder umgekehrt (eine Vorstellungsweise, welche sich dadurch empfiehlt, dass sie mit der Beharrung der Molekularströme ohne elektromotorische Kräfte bestehen kann), so leuchtet ein, dass die Verschiedenheit in Lage und Verhalten beider elektrischen Fluida im Bereiche des Molekuls zwar schon bei sehr geringen Entfernungen (wie sie NEUMANN betrachtet) nicht mehr beachtet zu werden braucht, worauf die Zulässigkeit jener *idealen* Vorstellung von den Molekularströmen beruht, dass sie doch aber für die *unmittelbar angrenzende Aetherschicht* von Bedeutung sein kann, zumal wenn das in Molekularströmung befindliche elektrische Fluidum *nicht stetig und gleichförmig* um das Molekule vertheilt wäre.

Findet dann aber wirklich eine Störung des Gleichgewichts in der *unmittelbar angrenzenden Aetherschicht*, folglich eine Erregung von Aetherwellen, Statt, so leuchtet ein, dass dieselbe mit jedem Umlauf der Elektricität um das Molekul sich wiederholen, also die *Wellendauer* mit der *Umlaufszeit der elektrischen Theilchen* im Molekularstrome übereinstimmen muss. Bei *leuchtenden Molekulen* ist aber die Wellendauer der von ihnen ausgesandten Wellenzüge aus optischen Versuchen

Bayerische Staatsbibliothek München

genau bekannt; es würde also, wenn die angenommene Relation zwischen elektrischen Molekularströmen und dem Lichtäther, nach Neumann's Idee, sich bestätigte, hiernach möglich werden, aus optischen Versuchen über das Verhalten der die Molekularströme bildenden Elektricität nähere Auskunft zu erhalten. — Jedenfalls ist die Neumann'sche Untersuchung schon in ihrer ersten Entwicklung für die Optik, *zur Erklärung der Drehung der Polarisationsebene durch galvanische und magnetische Kräfte*, so erfolgreich gewesen, dass man hoffen darf, dass die weitere Verfolgung und Ausbildung der Theorie beharrlicher elektrischer Molekularströme in ihren Beziehungen zum Licht- oder Wärmeäther und seiner Wellenbewegung zu noch vielen anderen, den so wichtigen und noch so wenig erforschten Zusammenhang zwischen *Elektricität, Wärme* und *Licht* betreffenden, Aufschlüssen führen werde.

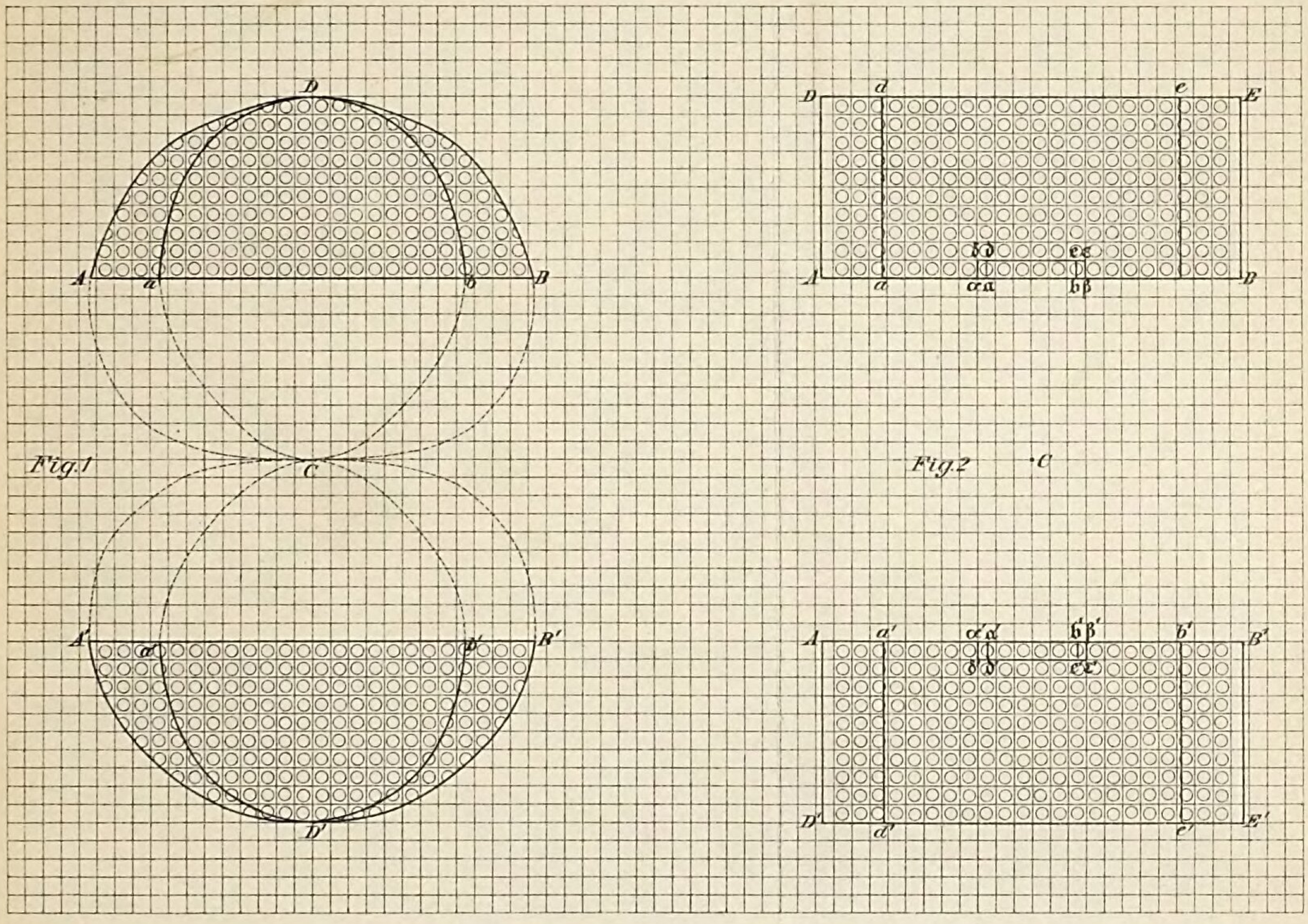


Fig. 1 Fig. 2

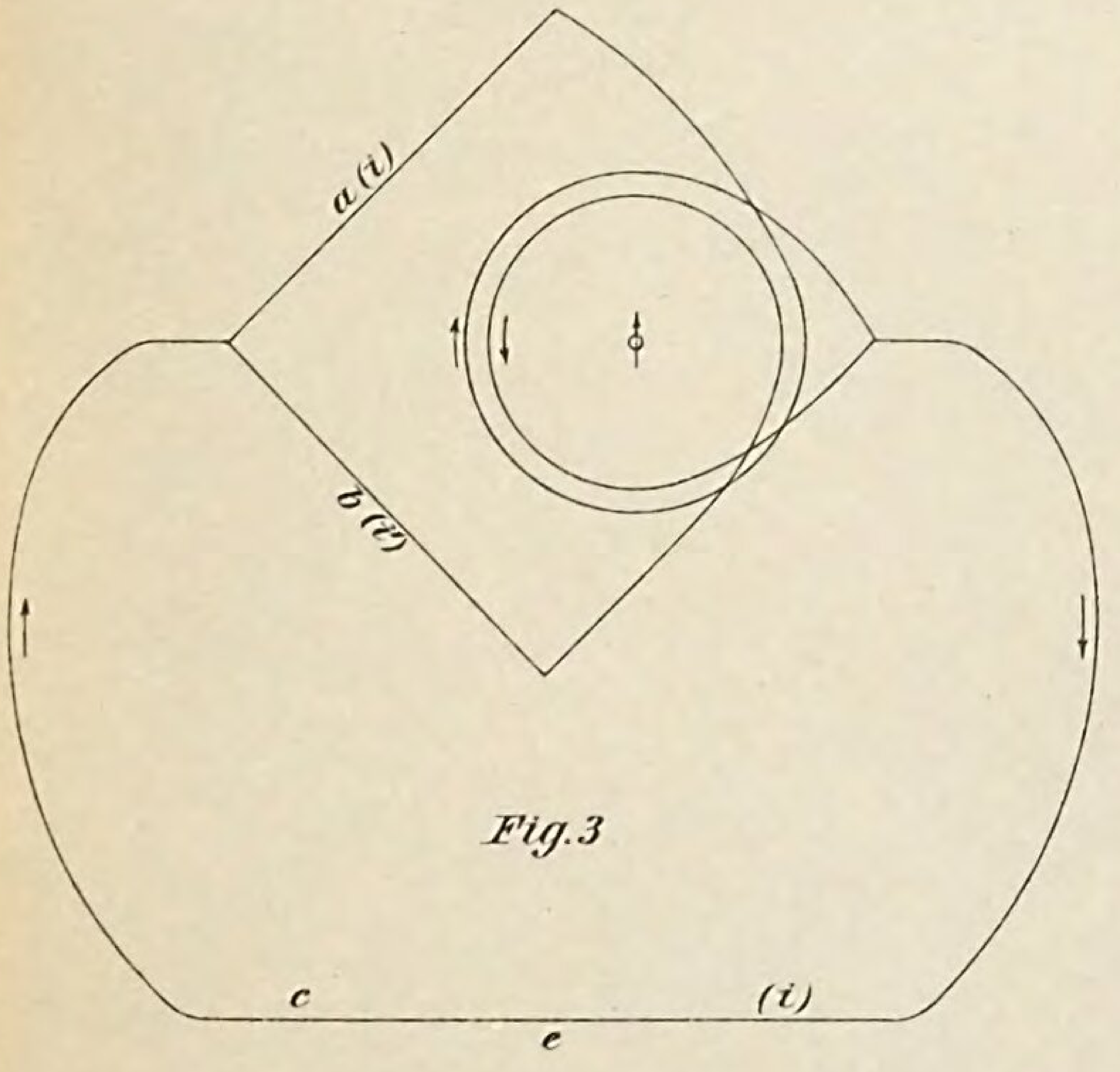


Fig. 3

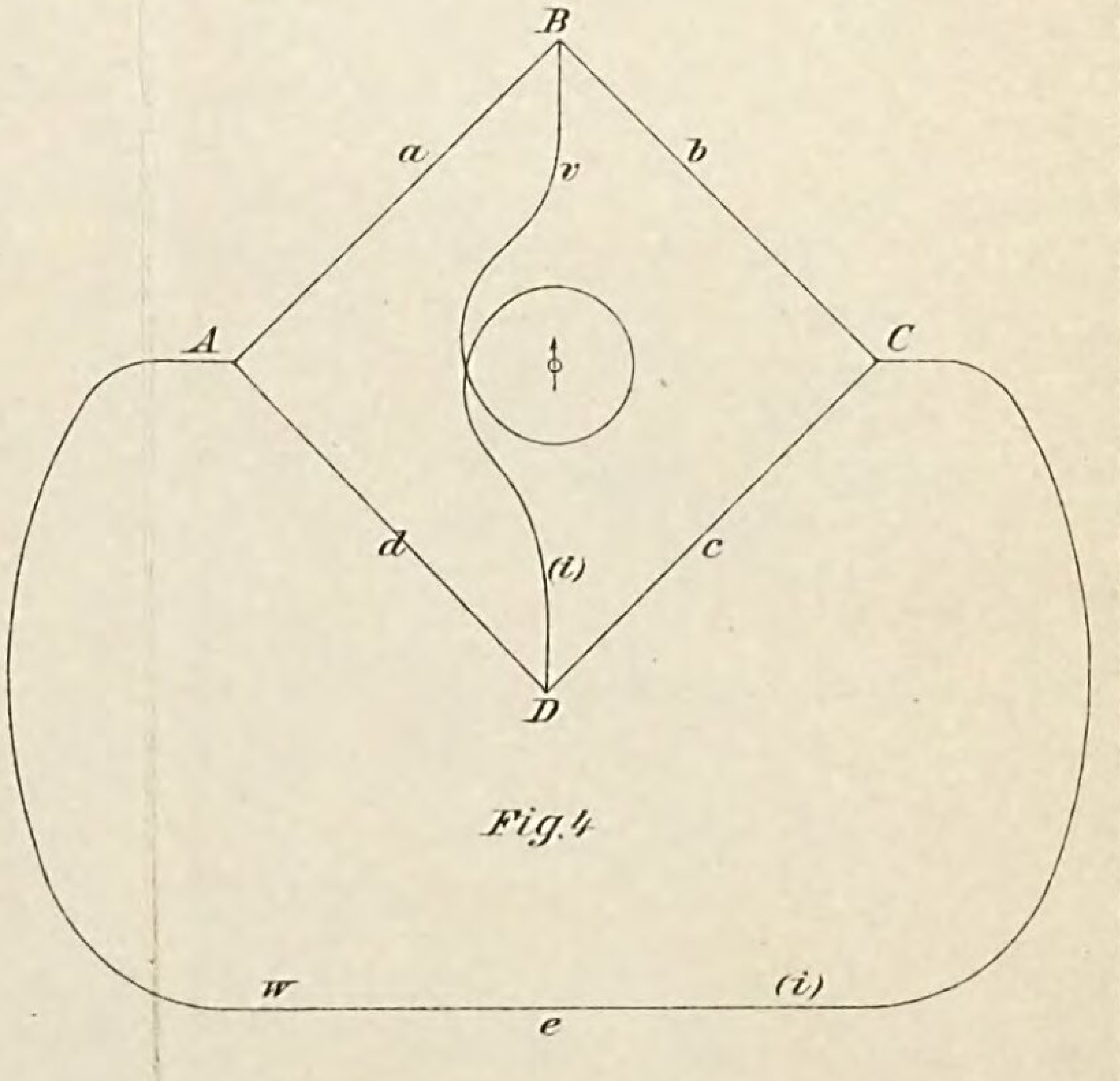


Fig. 4

IV.

Wilhelm Weber, Ueber die Abhandlung „Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen".

Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse, Bd. 15, Leipzig 1863, p. 10—17.]

An die Aufgabe, die *Kräfte* näher zu erforschen, welche von elektrischen Theilchen unter einander ausgeübt werden, oder welche von anderen Körpern aus auf sie wirken, die der Hauptgegenstand der vorhergehenden Abhandlungen über elektrodynamische Maassbestimmungen gewesen ist, knüpft sich eine zweite Aufgabe, nämlich die genauere Erforschung der *Bewegungen,* welche die elektrischen Theilchen, getrieben von allen diesen Kräften, machen, oder die Entwicklung der aus den Gesetzen jener Kräfte abgeleiteten *Bewegungsgesetze der Elektricität*, eng an; denn die Kenntniss jener Kräfte soll vor Allem dazu dienen, eine genauere Kenntniss von diesen Bewegungen zu gewinnen, als auf dem Wege direkter Beobachtung möglich ist.

Diese zweite vielumfassende Aufgabe der Elektrodynamik hat noch wenig Bearbeitung gefunden, und es lässt sich mit Recht nach dem Grunde fragen, woher es komme, dass auf die durch die Kenntniss der Kräfte gegebene Grundlage weiter zu bauen bisher kaum versucht worden ist. Offenbar liegt der Grund darin, dass die Grundlage selbst noch nicht für ganz vollendet und gesichert erachtet wurde. Es konnte nämlich noch in Zweifel gezogen werden, ob alle auf elektrische Massen wirkenden Kräfte wirklich schon bekannt wären, oder ob nicht vielleicht ausser den bekannten, *in allen Entfernungen* wirkenden, elektrischen Kräften, irgend welche noch unbekannte, auf unmessbar kleine Wirkungssphären beschränkte, *elektrische Molekularkräfte* mitwirkten, die vorher erforscht werden müssten, ehe man die davon abhängigen Bewegungsgesetze elektrischer Massen zu entwickeln versuchen könnte. Auch die Zulässigkeit des *Widerstandsgesetzes der ponderablen Leiter* konnte,

wenigstens wenn dasselbe auf Entwicklung der Gesetze *ungleichförmiger* und *schnell wechselnder* Bewegungen angewendet werden sollte, in Zweifel gezogen werden; denn dieses von Ohm zuerst aufgestellte Gesetz kann nur für *beharrliche* Ströme als sicher begründet angesehen werden.

Der einzige, in etwas umfassenderer Weise gemachte, Versuch zur Lösung dieser zweiten Aufgabe ist von Kirchhoff in Poggendorff's Annalen 1857, Bd. 100 und 102 mitgetheilt worden, ist aber, wie Kirchhoff selbst angiebt, blos auf sehr dünne Leitungsdrähte und auf die Annahme einer allgemeineren Geltung des Ohm'schen Gesetzes, als bewiesen ist, nämlich seiner Geltung auch für ungleichförmige und schnell wechselnde Strömungen, beschränkt. Auch gestattet die Entwicklung der Gesetze, soweit sie bisher geführt ist, noch keine genauere Prüfung an der Erfahrung.

Insbesondere lassen sich noch gegen die gegebene Enwicklung folgende zwei Bedenken anführen, nämlich *erstens*, dass, wenn die auf die Feinheit des Leitungsdrahts dabei gegründeten Forderungen auch nur näherungsweise erfüllt werden sollten, der Draht viel feiner sein müsste als alle vorhandenen oder mit vorhandenen Mitteln darstellbaren Drähte sind; *zweitens* dass, auch abgesehen hiervon, die von der allgemeineren Geltung des Ohm'schen Gesetzes gemachte Annahme mit einer solchen Feinheit des Leitungsdrahts gar nicht vereinbar sein würde; denn je feiner der Draht, desto mehr müssen bei ungleichförmigen und schnell wechselnden Strömungen die Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze hervortreten.

Es ist daher versucht worden, die Bewegungsgesetze der Elektricität in *geschlossenen* Leitern unabhängig von diesen mehr oder weniger unerfüllbaren und zweifelhaften Annahmen zu begründen und dieselben wenigstens für den einfachsten Fall, wo der geschlossene Leiter einen *Kreis* bildet, so weit zu entwickeln als nöthig ist, um die Prüfung der Theorie an der Erfahrung möglich zu machen.

Es hat sich daraus ergeben, dass nach jeder Störung des Gleichgewichts der Elektricität in einem geschlossenen Leiter zwar *Fortpflanzungen* elektrischer Bewegungen mit angebbaren *Geschwindigkeiten* Statt finden, die als *elektrische Wellen* bezeichnet werden können; doch sind solche *elektrische Wellen* von *Luft-* und *Aetherwellen*, durch welche Schall und Licht fortgepflanzt werden, wesentlich verschieden, wie z. B. daraus erhellt, dass ihre Geschwindigkeit von der *Länge der Bahn*, die sie zu durchlaufen haben (von der Länge des geschlossenen Leitungsdrahts) abhängt, was den Fortpflanzungsgesetzen anderer Wellen ganz widerspricht. Ebenso hat die *Wellenlänge* in jedem Wellenzuge, dem eine bestimmte *Fortpflanzungsgeschwindigkeit* zukommt, ein bestimmtes Verhältniss zur Länge der Bahn: sie bildet nämlich stets von der ganzen

Länge des geschlossenen Leitungsdrahts einen *aliquoten Theil*, wie es bei denjenigen Luftwellen angenommen zu werden pflegt, welche in Orgelpfeifen durch ihre Begegnung stehende Schwingungen erzeugen. Die Gesetze der Zerlegbarkeit jeder Bewegung in Wellenzüge von der angegebenen Art, wie sie für die Luft gelten, finden aber auf die Elektricität darum keine gleiche Anwendung, weil hier für Wellenzüge von verschiedener Wellenlänge verschiedene *Fortpflanzungsgeschwindigkeiten* gelten.

Die Frage über die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit* elektrischer Bewegungen in Leitungsdrähten lässt sich danach überhaupt nicht so einfach beantworten und noch weniger durch eine Messung, wie sie Wheatstone auszuführen versucht hat, entscheiden, wie daraus einleuchtet, dass sehr verschiedene Geschwindigkeiten bei diesen Fortpflanzungen zu unterscheiden sind, und dass zumal bei *längeren Leitungsdrähten*, wie der Wheatstone'sche oder die zu Telegraphen gebrauchten, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der grösseren Wellen, welche bei kürzeren Drähten der des Lichts nahe kommt oder sie noch übersteigt, sogar bis auf Null herabsinken kann, und dass darüber hinaus, wo der Ausdruck der Fortpflanzungsgeschwindigkeit imaginär wird, von Fortpflanzung der Bewegung durch Wellen gar nicht mehr im gewöhnlichen Sinne die Rede sein kann, sondern blos von einer asymptotischen Annäherung der Bewegung an ein bestimmtes Gleichgewicht, die als reine *Dämpfung* oder *Absorption* betrachtet werden kann, und die bei der Wichtigkeit, die sie für längere Leitungsdrähte, namentlich für Telegraphendrähte, hat, noch nähere Untersuchung verdient.

Besondere Beachtung verdient der Umstand, dass, wenn der Ausdruck der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die grösseren Wellenzüge imaginär wird (wo für diesen Theil der Bewegung, wie schon Thomson und Kirchhoff bemerkt haben, ähnliche Gesetze wie für die geleitete Wärme eintreten können), ein anderer Theil der Bewegung stets übrig bleibt, welcher Züge kleinerer Wellen bildet, für die der Ausdruck der Fortpflanzungsgeschwindigkeit reell bleibt. Es finden also in einem solchen Leitungsdrahte nach jeder Störung des Gleichgewichts zwar Wellenzüge mit bestimmten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten Statt, aber sie bilden keine reine Wellenbewegung, sondern sind gemischt mit Bewegungen, die anderen, namentlich den der geleiteten Wärme analogen, Gesetzen unterworfen sind.

Beachtet man nun alle Verhältnisse, welche aus einer solchen Vermischung von Bewegungen hervorgehen, deren Aenderungen ganz verschiedenen Gesetzen folgen, so leuchtet von selbst ein, dass die von Wheatstone beobachtete *Ungleichzeitigkeit der Funken* an sehr entfernten Unterbrechungsstellen eines langen Leitungsdrahts durchaus keinen

Schluss auf eine bestimmte Fortpflanzungsgeschwindigkeit gestattet, dass überhaupt die WHEATSTONE'sche Beobachtungsmethode, so sinnreich sie auch ist, doch zu vorliegendem Zwecke gar nicht geeignet ist, und dass es schwerlich gelingen wird, andere Methoden zu finden, um die Gesetze aller Bewegungsänderungen der Elektricität in einem Leiter nach gestörtem Gleichgewichte *rein erfahrungsmässig* zu begründen. Der Zweck der Beobachtung scheint vielmehr darauf beschränkt werden zu müssen, die aus unserer anderweitig erlangten Kenntniss von der Elektricität abgeleiteten Gesetze zu *prüfen,* wozu es also nöthig ist, diese Ableitung den Beobachtungen vorauszuschicken, um so mehr, als die abgeleiteten und zu prüfenden Gesetze selbst zum *Leitfaden* dienen müssen, um die zur Prüfung am zweckmässigsten anzuwendenden Beobachtungsmethoden zu finden.

Eine solche Prüfung, wenn sie genau sein soll, wird immer feine Messungen erfordern. Beachtet man nun, dass die feinsten Messungen in der Physik entweder *Gleichgewichtserscheinungen*, oder *beharrliche Bewegungen*, oder *periodisch wiederkehrende Bewegungen* (Schwingungen) betreffen, so liegt es sehr nahe, auch zu Prüfung der Bewegungsgesetze der Elektricität in Leitern, abgesehen von konstanten Strömen, eine Prüfungsmethode auf die Beobachtung *periodisch regelmässig wiederkehrender Bewegungen*, oder *Schwingungen,* der Elektricität in Leitern zu begründen, vorausgesetzt, dass sich Mittel zu feiner Ausführung solcher Beobachtungen finden lassen.

Periodisch regelmässig wiederkehrende Bewegungen der Elektricität können aber in einem Leiter nicht von selbst, sondern nur durch immer erneute Anregung zu Stande kommen, und es bietet sich zu ihrer *Hervorbringung* die einfachste und für feinere Beobachtungen und Messungen zweckmässigste Methode in der schnellen Umdrehung eines kleinen Magnets um eine gegen seine Magnetaxe rechtwinkelige Drehungsaxe dar, so wie zu deren *Beobachtung* die von ihnen auf eingeschaltete Elektrodynamometer hervorgebrachten Wirkungen. Um aber einen Leitfaden zu zweckmässigen Einrichtungen für solche Beobachtungen zu gewinnen, mussten zuvor die Gesetze solcher *elektrischen Schwingungen* entwickelt werden.

Es ergiebt sich aus dieser Entwicklung, dass bei fortgesetzter Rotation des Magnets die Elektricität in allen Theilen des geschlossenen Leiters in eine regelmässig fortdauernde Schwingung versetzt wird, die für positive und negative Elektricität entgegengesetzt gleich ist. Die Schwingungsdauer ist der Dauer einer halben Umdrehung des Magnets gleich. Ferner ergiebt sich aber, dass die *Schwingungsamplituden* und die *Schwingungsphasen* der Elektricität an verschiedenen Stellen des geschlossenen Leiters nicht blos, wenn die vom rotirenden Magnet gleich-

zeitig ausgeübten elektromotorischen Kräfte überall gleich sind, vollkommen übereinstimmen müssen, sondern dass dieselben auch dann, wenn diese Kräfte noch so verschieden in der Kette vertheilt sind, kaum merkbare Verschiedenheiten zeigen sollen. Im Allgemeinen also vereinfachen sich dadurch die Beobachtungen elektrischer Schwingungen in geschlossenen Ketten ausserordentlich, dass die Schwingungen als vollkommen gleich und gleichzeitig betrachtet werden dürfen, was nach der Theorie auch bei sehr langen Ketten noch sehr nahe zutreffen soll.

Zur Prüfung dieses merkwürdigen Ergebnisses sind nun wirklich *erstens* Schwingungsbeobachtungen unter den zur Vergleichung der *Amplitude* an verschiedenen Stellen einer langen Kette günstigsten Verhältnissen ausgeführt worden, aus denen sich ergeben hat, dass die beobachtete, dem Quadrate der Schwingungsamplitude proportionale Ablenkung des eingeschalteten Dynamometers an zwei Stellen der geschlossenen Kette, welche fast fünf Meilen von einander entfernt waren, im Mittel aus sechs Beobachtungen, bei einer Grösse von 846 Skalentheilen, noch nicht um $\frac{1}{3}$ Skalentheil von einander verschieden war, was mit Rücksicht auf die unvermeidlichen Beobachtungsfehler so viel heisst, als dass gar kein merklicher Unterschied in der Schwingungsamplitude Statt fand.

Zweitens sind Schwingungsbeobachtungen unter den zur Bestimmung des *Phasenunterschieds* an verschiedenen Stellen einer langen Kette günstigsten Verhältnissen ausgeführt worden, aus denen sich ergeben hat, dass die *Differenz* zweier beobachteten Dynamometerablenkungen, die dem Phasenunterschiede an zwei fast fünf Meilen von einander entfernten Stellen der Kette sehr nahe proportional sein sollte, im Mittel aus sechs Beobachtungen, bei 844 Skalentheilen Grösse der Ablenkungen, noch nicht $\frac{2}{3}$ Skalentheil betrug, was mit Rücksicht auf die unvermeidlichen Beobachtungsfehler ebenfalls so viel heisst, als dass gar kein Phasenunterschied nachgewiesen werden konnte. — Die Schwingungsdauer war bei diesen Beobachtungen $\frac{1}{520}$ Sekunde, oder es machte der kleine Magnet 260 Umdrehungen in der Sekunde.

Aus der durch diese Prüfungen an der Erfahrung bestätigten Theorie ergiebt sich nun aber ferner, dass es in Beziehung auf Fortpflanzung elektrischer Bewegungen gar keine solche *Geschwindigkeit* giebt, welche für diese Fortpflanzung die Wichtigkeit und Bedeutung hätte, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Schalls und Lichts in der Luft und im Lichtäther in Anspruch nehmen, deren genaue Messung zu den wichtigsten Aufgaben in der Physik gehören, weil sie als wahre Fundamentalbestimmungen für die genauere Kenntniss dieser Medien zu betrachten sind.

Giebt es nun aber auch bei den durch das elektrische Medium

fortgepflanzten Bewegungen keine solche als Fundamentalbestimmung dienende *Geschwindigkeit*, so fragt es sich, ob die Theorie nicht einen anderen zu einer Fundamentalbestimmung geeigneten, beim Gleichgewicht ausser Betracht bleibenden, Gegenstand biete, welcher eine ähnliche Bedeutung für die Kenntniss des Mediums habe und in dieser Beziehung die Stelle jener Geschwindigkeit ersetze.

Ein solcher Gegenstand soll nun nach der Theorie in gewissen *Abweichungen* vom Ohm'schen *Gesetze* sich darbieten, welche mit *Verfeinerung der Leitungsdrähte* bei sehr veränderlichen und schnell wechselnden Strömungen eintreten. Nach der Theorie soll nämlich die für beharrliche Ströme schon erfahrungsmässig fest begründete Gültigkeit des Ohm'schen Gesetzes zwar auch bei veränderlichen Strömen, aber nur so lange fortbestehen, als ein gewisser *von der Natur des elektrischen Fluidums und des Leitungsdrahts abhängiger Koefficient* ($c^2/r\mathfrak{E}$) als verschwindend klein betrachtet werden kann. Wächst aber dieser Koefficient, wie es bei Verfeinerung des Leitungsdrahts der Fall ist, und erreicht derselbe einen gegen die Einheit nicht mehr zu vernachlässigenden Zahlwerth, so sollen in den Erscheinungen elektrischer Schwingungen bestimmte *Abweichungen* von den aus dem Ohm'schen Gesetze abgeleiteten Bestimmungen desto merklicher hervortreten, je schneller diese Schwingungen sind. Könnten diese *Abweichungen* beobachtet und gemessen werden, so würden sie zur Kenntniss jenes von der Natur des elektrischen Fluidums und des Leitungsdrahts abhängigen *Koefficienten* führen, welcher für die Elektricitätslehre von der grössten Bedeutung ist.

Die *physische Bedeutung* dieses Koefficienten ist nämlich die eines Quotienten aus dem Quadrate der bekannten Geschwindigkeit c (welche im Grundgesetz das Verhältniss des statischen zum dynamischen Theile der elektrischen Kraft bestimmt) dividirt durch diejenige Kraft, welche die gesammte in der Längeneinheit des Leitungsdrahts enthaltene positive Elektricitätsmenge, wenn sie in einem Punkte koncentrirt wäre, auf *1 Milligramm des elektrischen Fluidums* in der Einheit der Entfernung ausüben würde. Diese Kraft würde also bestimmt werden, wenn die mit Beschleunigung der Schwingung und Verfeinerung des Leitungsdrahts eintretenden *Abweichungen* vom Ohm'schen Gesetze genau beobachtet und gemessen werden könnten.

Diese Kraft lässt sich nun aber auch als das *Produkt* $r\mathfrak{E}$ der in elektrostatischen Einheiten ausgedrückten positiven Elektricitätsmenge $\mathfrak{E}$, welche in der Längeneinheit des Leiters enthalten ist, in die Zahl r der elektrostatischen Einheiten, welche in *1 Milligramm des elektrischen Fluidums* enthalten ist, ausdrücken, woraus sich ergiebt, dass wenn $\mathfrak{E}$ und dadurch r bekannt wäre, jede beliebige elektrostatisch bestimmte

Elektricitätsmenge, eben so wie die Massen ponderabler Körper, *in Milligrammen* ausgedrückt werden könnte.

Ist nun, wie in einer früheren Abhandlung gezeigt worden (siehe Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. V, Art. 15, 20),[1]) wenigstens für gewisse Leiter, nämlich für Elektrolyten, wie Wasser, diese Elektricitätsmenge $\mathfrak{E}$ bestimmbar, so wird durch die elektrischen Schwingungsbeobachtungen die *Möglichkeit*, elektrische Massen nach gleichem Maasse wie ponderable Massen zu bestimmen, eröffnet, wenn auch die Ausführung mancherlei Vorarbeiten fordert. Diese Kenntniss der Masse würde durch *elektrostatische* Beobachtungen nie zu gewinnen sein.

Die Ausführung einer solchen Massenbestimmung bildet aber eine neue Aufgabe, die einer besonderen Abhandlung vorbehalten werden musste, auch wenn die Methode im Wesentlichen vollständig gegeben war. Es verhält sich damit ähnlich wie mit den magnetischen Messungen, deren Ausführbarkeit nach absoluten Maassen schon von Poisson in der Theorie nachgewiesen war, die aber ohne die zur Beherrschung aller Einzelnheiten führenden Gauss'schen Untersuchungen erfolglos geblieben wären.

Dasselbe gilt auch noch von anderen Anwendungen, welche die Bewegungslehre der Elektricität in Leitern gestattet, z. B. von einer genauen Bestimmung aller Vorgänge in *Telegraphen* oder Ruhmkorff'schen *Maschinen*, denn es leuchtet ein, dass die zunächst blos für *kreisförmige* Leiter entwickelte Theorie, wenn sie auch nichts zu wünschen übrig liesse, in Beziehung auf Telegraphen und Ruhmkorff'sche Maschinen, deren Leiter ganz andere Formen besitzen, nicht genügt, und dass es noch mancher Untersuchungen bedarf, um unter solchen Verhältnissen zur Beherrschung aller Einzelnheiten zu gelangen, wie es nöthig ist, um solche Bestimmungen mit Erfolg auszuführen.

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 648 und 664.]

V.

Elektrodynamische

Maassbestimmungen

insbesondere über

elektrische Schwingungen.

Von

Wilhelm Weber.

[Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse, Bd. 6, Leipzig 1864, p. 571—716.]

Die verschiedenen Kräfte, welche von elektrischen Massen ausgeübt werden, oder welche auf sie wirken, nach Maass und Gesetz genau und vollständig zu bestimmen, ist die *erste* Aufgabe gewesen, welche in diesen Abhandlungen über elektrodynamische Maassbestimmungen erörtert worden ist. Es ist ein *Grundgesetz* aufgestellt worden, aus welchem *erstens* die Kräfte der elektrostatischen Wechselwirkung und deren von Coulomb entdeckte Gesetze, *zweitens* die Kräfte der elektrodynamischen Wechselwirkung der Stromelemente unter einander und deren von Ampère entdeckte Gesetze, *drittens* die Kräfte der von Faraday entdeckten elektrodynamischen Induktion (der Volta-Induktion) — sowohl der durch Bewegung des Stroms mit seinem Träger, als auch der durch Stromänderung im unbewegten Träger, als auch der von Neumann zuerst entdeckten und beobachteten, durch den Durchgang eines Stroms durch einen Gleitpunkt seines Leiters, — und deren Gesetze, abgeleitet und bestimmt worden sind.

Ausser diesen verschiedenen Kräften der *rein* elektrischen Wechselwirkung sind auch die Kräfte betrachtet worden, welche vom *Magnetismus* auf die Elektricität ausgeübt werden, nämlich die *elektromagnetischen* Kräfte und die der *magnetelektrischen Induktion* des gegen elektrische Massen bewegten Magnetismus — sowohl wenn der Magnetismus mit seinem Träger, als auch wenn er blos in seinem Träger bewegt wird. — Auch für diese Kräfte konnten die Gesetze aus dem aufgestellten elektrischen Grundgesetze abgeleitet werden, wenn man nämlich nach Ampère für Molekularmagnete elektrische Molekularströme substituirte. Dasselbe galt auch von den *elektrodiamagnetischen* Kräften.

Endlich sind auch diejenigen Kräfte betrachtet worden, welche von den *ponderablen Körpern*, worin die elektrischen Massen sich bewegen, auf diese letzteren ausgeübt und die galvanischen Widerstandskräfte der ponderablen Körper genannt werden. Auch zur Bestimmung dieser Kräfte ist nach dem Leitfaden des für beharrliche Ströme bewiesenen Ohm'schen Gesetzes ein allgemeineres Grundgesetz aufzustellen versucht worden.

An diese Erforschung der *Kräfte* knüpft sich nun eine *zweite* Aufgabe der Elektrodynamik, nämlich die Erforschung der *Bewegungen*, welche die elektrischen Massen, getrieben von allen diesen Kräften,

machen, und die Erforschung der Gesetze dieser Bewegungen in ihrer Abhängigkeit von jenen Kräften, eng an. Denn um diese Bewegungen zu bestimmen, ist eine genaue und vollständige Kenntniss aller jener Kräfte unentbehrlich und es kann daher die Erforschung jener Kräfte als das Mittel, die Erforschung dieser Bewegungen als der Zweck, welcher dadurch erreicht werden soll, betrachtet werden.

Diese zweite viel umfassende Aufgabe der Elektrodynamik hat noch wenig Bearbeitung gefunden und es lässt sich mit Recht fragen, woher es komme, dass auf der durch die Kenntniss der Kräfte gegebenen Grundlage in dieser Richtung weiter zu bauen so wenig geschehen ist? Offenbar hat man Anstand genommen, jene Grundlage schon als ganz sicher und fertig zu betrachten. Es konnte in Zweifel gezogen werden, ob alle auf elektrische Massen wirkenden Kräfte schon bekannt wären, namentlich ob ausser den bekannten, in allen Entfernungen wirkenden, rein elektrischen Kräften nicht noch irgend welche unbekannte, auf unmessbar kleine Wirkungssphären beschränkte, *elektrische Molekularkräfte* mitwirkten, die vorher erforscht werden müssten, ehe man die davon abhängigen Bewegungsgesetze elektrischer Massen zu entwickeln versuchte. Auch die Zulässigkeit des Widerstandsgesetzes der *ponderablen Leiter* konnte für die Entwicklung der Gesetze *schnell wechselnder* elektrischer Bewegungen in Zweifel gezogen werden, da dieses Gesetz von Ohm nur für *beharrliche* Ströme bewiesen, der allgemeinere auf alle Verhältnisse anwendbare Ausspruch dieses Gesetzes aber blos versuchsweise aufgestellt worden ist. — Endlich kommt hinzu, dass die Kenntnis der *Kräfte* doch nicht die einzige für Lösung der zweiten Aufgabe erforderliche Grundlage ist, sondern dass ausserdem dazu auch noch eine genauere Kenntniss der zu bewegenden *Massen*, nebst anderen noch nicht hinreichend bekannten Verhältnissen, nöthig erscheint.

Dennoch ist ein Versuch zur Lösung dieser zweiten Aufgabe und zwar in so umfassender Weise, als die Umstände es gestatteten, von Kirchhoff gemacht und in Poggendorff's Annalen 1857, Bd. 100 und 102 mitgetheilt worden. Dieser erste Versuch hat, obiger Bedenken ungeachtet, mit Recht grosses Interesse erweckt; denn es leuchtet ein, dass eine Entscheidung, ob und in wie weit obige Bedenken begründet seien, schwerlich auf anderem Wege als auf dem des Versuchs gewonnen werden kann. — Kirchhoff hat nämlich versucht, *eine allgemeine Theorie der Bewegung der Elektricität in einem unendlich dünnen Drahte* aufzustellen, wobei er jedoch, wie er selbst angiebt, gewisse Thatsachen, welche bei konstanten elektrischen Strömen, oder solchen, deren Intensität sich nur langsam ändert, Statt finden, als allgemein geltend angenommen hat. Der Gang seiner Entwicklung soll im folgenden Artikel näher betrachtet werden.

I. *Bewegungsgesetze.*

1.

Kirchhoff, *über die Bewegung der Elektricität in Leitern.*

Es sollen x, y, z die rechtwinkeligen Koordinaten eines Punktes des Leiters bezeichnen, ferner u, v, w die *Stromdichtigkeiten* des nach den drei Koordinatenaxen zerlegten elektrischen Stroms, welcher zur Zeit t in jenem Punkte des Leiters vorhanden ist. — Unter *Stromdichtigkeit* wird hier verstanden das Produkt der Geschwindigkeit der strömenden Elektricität in die Menge der in der Volumeneinheit des Leiters enthaltenen positiven Elektricität. Nach dem Ohm'schen Widerstandsgesetze, wenn ihm allgemeinere Geltung beigelegt wird, bedeutet dieses so viel als das Produkt der im betrachteten Punkte (x, y, z) wirkenden *elektromotorischen Kraft* in das *specifische Leitungsvermögen* des Leitermetalls. Hiernach ist also, wenn A die elektromotorische Kraft im Punkte (x, y, z) — d. i. den Unterschied der auf die Maasseinheit positiver und negativer Elektricität im Punkte (x, y, z) wirkenden Kräfte — bezeichnet, und α, β, γ die Winkel, welche die Richtung dieser Kraft mit den Richtungen der drei Koordinatenaxen bildet, und k das specifische Leitungsvermögen des Leitermetalls,

$$u = A \cos \alpha \, . \, k, \quad v = A \cos \beta \, . \, k, \quad w = A \cos \gamma \, . \, k,$$

wobei für Kräfte und Leitungsvermögen die *mechanischen Maasse* angenommen werden sollen, deren sich Kirchhoff stets bedient.[1]) —

[1]) Bezeichnet ξ, η, ζ die Verschiebung eines elektrischen Theilchens im Punkte (x, y, z) nach der Zeit t in der Richtung der drei Koordinaten, also $d\xi/dt$, $d\eta/dt$, $d\zeta/dt$ die Geschwindigkeit der strömenden Elektricität, nach der Richtung der drei Koordinatenaxen zerlegt, so ist, wenn $\mathfrak{E}$ die Menge der in der Volumeneinheit des Leiters enthaltenen positiven Elektricität bezeichnet, der ersten Bestimmung gemäss,

$$n = \mathfrak{E}\frac{d\xi}{dt}, \quad v = \mathfrak{E}\frac{d\eta}{dt}, \quad w = \mathfrak{E}\frac{d\zeta}{dt}.$$

Nach dem Ohm'schen Gesetze ist aber die Stromintensität i in einem linearen Leiter, wenn sie beharrlich ist, dem Quotienten der Summe aller nach der Richtung des Leiters in der Länge der ganzen geschlossenen Kette l wirkenden elektromotorischen Kräfte, d. i. $\int A dl$, dividirt durch den Widerstand der ganzen Kette, d. i. $\int dl/ks$, wenn s den Querschnitt des Leiters und k das specifische Leitungsvermögen des Leitermetalls bezeichnet, proportional oder, nach mechanischen Maassen, gleich, folglich ist $i = \int A dl / [\int dl/ks]$. In diesem Ausspruch des Ohm'schen Gesetzes wird aber unter der Stromintensität i das Produkt der Geschwindigkeit der strömenden Elektricität, d. i. $d\sigma/dt$, wenn $d\xi/dt = [d\sigma/dt] . \cos \alpha$, $d\eta/dt = [d\sigma/dt] . \cos \beta$, $d\zeta/dt = [d\sigma/dt] . \cos \gamma$ gesetzt

Die elektromotorische Kraft A rührt nun aber zum Theil von der in der ganzen Kette vertheilten *freien Elektricität* her, zum Theil von der *Induktion*, die in Folge der Aenderung der Stromstärke in allen Theilen der Leitungskette wirkt. Von allen *äusseren* elektromotorischen Kräften, z. B. von magnetelektrischen Induktionskräften, die von aussen her auf die Leitungskette wirken können, soll vor der Hand ganz abgesehen werden. Alle übrigen bekannten Kräfte, welche auf elektrische Massen wirken, tragen zur *elektromotorischen Kraft* (wenn die Widerstandskräfte, die dazu gerechnet werden könnten, davon ausgeschlossen bleiben) nichts bei, z. B. die von AMPÈRE entdeckten, aus der Wechselwirkung der Stromelemente unter einander resultirenden, elektrodynamischen Kräfte, von denen bekannt ist, dass der Unterschied der auf die positive Elektricität und der auf die negative Elektricität wirkenden Kräfte stets Null ist, woraus also keine *elektromotorische* Kraft resultirt.

Die Komponenten des *ersten* Theils der elektromotorischen Kraft, welcher von der in der Kette vertheilten *freien Elektricität* herrührt, werden, wenn Ω den Werth der *Potentialfunktion der freien Elektricität* im Punkte (x, y, z) bezeichnet, durch die *verdoppelten*, negativ genommenen Werthe der partiellen Differentialquotienten von Ω nach den drei Koordinatenaxen, d. i. durch

$$-2\frac{d\Omega}{dx}, \quad -2\frac{d\Omega}{dy}, \quad -2\frac{d\Omega}{dz}$$

dargestellt, wie man leicht ersieht, wenn man beachtet, dass die elektromotorische Kraft, d. i. der Unterschied der auf die Einheit positiver und negativer Elektricität wirkenden Kräfte, *doppelt* so gross ist als die auf die Einheit *positiver* Elektricität wirkende Kraft.

Um die Komponenten des *zweiten* Theils der elektromotorischen Kraft anzugeben, welcher von der *Induktion* in Folge von Aenderungen der Stromintensitäten in allen Theilen der Leitungskette herrührt,

wird, in den Querschnitt des Leitungsdrahtes s und in die Menge $\mathfrak{E}$ der in der Volumeneinheit des Leiters enthaltenen positiven Elektricität verstanden, folglich ist

$$\frac{\int A\,dl}{\int \frac{dl}{ks}} = \mathfrak{E}s\frac{d\sigma}{dt}.$$

Wird nun dem OHM'schen Gesetze allgemeinere Geltung, für jedes einzelne Längenelement der Kette, zugeschrieben, so erhält man

$$\frac{A\,dl}{\frac{dl}{ks}} = Aks = \mathfrak{E}s\frac{d\sigma}{dt},$$

oder $Ak = \mathfrak{E}[d\sigma/dt]$, und hieraus, durch Zerlegung nach den Koordinatenaxen,

$$A\cos\alpha\,.\,k = \mathfrak{E}\frac{d\xi}{dt} = u, \quad A\cos\beta\,.\,k = \mathfrak{E}\frac{d\eta}{dt} = v, \quad A\cos\gamma\,.\,k = \mathfrak{E}\frac{d\zeta}{dt} = w.$$

bezeichne x', y', z' die Koordinaten eines zweiten Punktes der Leitungskette, ferner u', v', w' die Werthe von u, v, w für diesen Punkt, und r die Entfernung der Punkte (x, y, z) und (x', y', z') von einander.

Aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung ergiebt sich dann die elektromotorische Kraft, welche das Element $dx'\,dy'\,dz'$, in welchem die Elektricität *nach der Richtung der x-Axe* mit der Geschwindigkeit $d\xi'/dt$ sich bewegt, wo also, nach der vorhergehenden Note, $u' = \mathfrak{E}\,[d\xi'/dt]$ ist, im Punkte (x, y, z) *nach der Richtung der x-Axe* ausübt, nach *mechanischem* Maasse ausgedrückt,

$$= -\frac{8}{c^2}\cdot\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}\cdot(x-x')^2\cdot\frac{du'}{dt}.$$

Es ist nämlich (siehe Elektrodynamische Maassbestimmungen im fünften Bande dieser Abhandlungen, S. 268, No. 4)[1]) die elektromotorische Kraft, welche ein Stromelement von der Länge a, dessen Stromintensität in der Zeit t um i gleichförmig wächst, auf einen Punkt in der Entfernung r nach einer Richtung, welche mit der verlängerten r den Winkel ϑ' macht, ausübt, wenn a mit r selbst den Winkel ϑ bildet,

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{a}{r}\cdot\frac{i}{t}\cdot\cos\vartheta\cos\vartheta'.$$

Hierin ist aber die Stromintensität i nach absolutem *magnetischem* Maasse, wie sie durch Galvanometer bestimmt zu werden pflegt, auszudrücken, wofür der nach *mechanischem* Maasse ausgedrückte Werth, mit Hinzufügung des Faktors $2\sqrt{2}/c$, gesetzt werden kann. Die nach *mechanischem* Maasse ausgedrückte Stromintensität in obigem Falle ist aber $= u'\,dy'\,dz'$. Setzt man also $i = [2\sqrt{2}/c]\,.\,u'\,dy'\,dz'$, folglich $i/t = di/dt = [2\sqrt{2}/c]\,.\,[du'/dt]\,.\,dy'\,dz'$, und beachtet, dass in obigem Falle $\cos\vartheta = \cos\vartheta' = (x-x')/r$ und $a = dx'$ ist, so findet man die gesuchte elektromotorische Kraft

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{dx'}{r}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{du'}{dt}\cdot dy'\,dz'\cdot\frac{(x-x')^2}{r^2},$$

was dem oben angegebenen Werthe gleich ist.

Betrachtet man die Bewegung der Elektricität im Elemente $dx'\,dy'\,dz'$ *nach der y- oder z-Axe* statt nach der x-Axe, so tritt, als Werth von $\cos\vartheta$, $(y-y')/r$ oder $(z-z')/r$ an die Stelle von $(x-x')/r$, und dv'/dt oder dw'/dt an die Stelle von du'/dt, woraus folgt, dass die ganze vom Elemente $dx'\,dy'\,dz'$ im Punkte (x, y, z) *nach der Richtung der x-Axe* ausgeübte elektromotorische Kraft

$$= -\frac{8}{c^2}\cdot\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}(x-x')\left(\frac{du'}{dt}(x-x') + \frac{dv'}{dt}(y-y') + \frac{dw'}{dt}(z-z')\right).$$

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 655.]

Ebenso findet man für die ganze vom Elemente $dx'\,dy'\,dz'$ im Punkte (x, y, z) *nach der Richtung der y- oder z-Axe* ausgeübte elektromotorische Kraft, indem man, als Werth von $\cos\vartheta'$, $(y-y')/r$ oder $(z-z')/r$ statt $(x-x')/r$ setzt,

$$=-\frac{8}{c^2}\cdot\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}\cdot(y-y')\left(\frac{du'}{dt}(x-x')+\frac{dv'}{dt}(y-y')+\frac{dw'}{dt}(z-z')\right),$$

oder

$$=-\frac{8}{c^2}\cdot\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}\cdot(z-z')\left(\frac{du'}{dt}(x-x')+\frac{dv'}{dt}(y-y')+\frac{dw'}{dt}(z-z')\right).$$

Setzt man nun Kürze halber

$$(1)\qquad U=\iiint\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}(x-x')\Big(u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')\Big),$$

$$(2)\qquad V=\iiint\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}(y-y')\Big(u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')\Big),$$

$$(3)\qquad W=\iiint\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}(z-z')\Big(u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')\Big),$$

so erhält man hiernach die Komponenten des *zweiten* Theils der elektromotorischen Kraft, welcher von der *Induktion* in Folge von Aenderungen der Stromintensitäten in allen Theilen der Leitungskette herrührt,

$$=-\frac{8}{c^2}\cdot\frac{dU}{dt},\quad =-\frac{8}{c^2}\cdot\frac{dV}{dt},\quad =-\frac{8}{c^2}\cdot\frac{dW}{dt}.$$

Die Komponenten der *ganzen* elektromotorischen Kraft waren aber oben mit

$$A\cos\alpha,\quad A\cos\beta,\quad A\cos\gamma$$

bezeichnet worden, wonach also

$$A\cos\alpha=-2\left(\frac{d\Omega}{dx}+\frac{4}{c^2}\cdot\frac{dU}{dt}\right),$$

$$A\cos\beta=-2\left(\frac{d\Omega}{dy}+\frac{4}{c^2}\cdot\frac{dV}{dt}\right),$$

$$A\cos\gamma=-2\left(\frac{d\Omega}{dz}+\frac{4}{c^2}\cdot\frac{dW}{dt}\right)$$

erhalten wird. Setzt man endlich diese Werthe in die oben angeführten Gleichungen der Stromdichtigkeiten u, v, w im Punkte (x, y, z) ein, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$(4)\qquad u=-2k\left(\frac{d\Omega}{dx}+\frac{4}{c^2}\cdot\frac{dU}{dt}\right),$$

$$(5)\qquad v=-2k\left(\frac{d\Omega}{dy}+\frac{4}{c^2}\cdot\frac{dV}{dt}\right),$$

$$(6)\qquad w=-2k\left(\frac{d\Omega}{dz}+\frac{4}{c^2}\cdot\frac{dW}{dt}\right).$$

Für die Bestimmung des Werthes Ω der *Potentialfunktion* der in der ganzen Kette vertheilten *freien* Elektricität im Punkte (x, y, z) kommt nun noch besonders in Betracht, dass die Dichtigkeit der *freien* Elektricität im Innern eines Leiters, in welchem Strombewegungen Statt finden, nicht wie bei einem Leiter, in welchem die Elektricität sich in Ruhe befindet, $=0$ gesetzt werden darf. Bezeichnet daher ε' die von Null verschiedene Dichtigkeit der *freien* Elektricität im Punkte (x', y', z'), wenn derselbe *im Innern* des Leiters liegt, e' dagegen, wenn dieser Punkt im Oberflächenelemente dS' liegt, bezeichnet also e' die Dichtigkeit der *freien* Elektricität im *Oberflächenelemente* dS', so erhält man folgende Bestimmung des Werthes von Ω, nämlich

$$\Omega = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r} \cdot \varepsilon' + \iint \frac{dS'}{r} \cdot e'. \tag{7}$$

Hierzu kommt nun noch, dass die Vertheilung der *freien* Elektricität sowohl *im Innern* als auch *an der Oberfläche* der ganzen Leitungskette, welche durch die Werthe von ε' und e' bestimmt wird, zwar mit der Zeit sich ändern kann, dass aber diese Aenderungen von der *Bewegung* der Elektricität in der Kette abhängen, wonach es zwei Gleichungen geben muss, welche die *partiellen Differentialquotienten* von ε' und e' in Beziehung auf die Zeit in ihrer Abhängigkeit von der *Bewegung* der Elektricität darstellen.

Der Unterschied der in dem Zeitelemente dt in der Richtung der x-, y- und z-Axe aus dem Elemente $dx'\,dy'\,dz'$ austretenden positiven Elektricität von der darin eintretenden ist

$$dx'\,dy'\,dz' \cdot \frac{du'}{dx'}\,dt, \quad dx'\,dy'\,dz' \cdot \frac{dv'}{dy'}\,dt, \quad dx'\,dy'\,dz' \cdot \frac{dw'}{dz'}\,dt.$$

Die *Summe* dieser Unterschiede giebt die *Verminderung* der im Elemente $dx'\,dy'\,dz'$ enthaltenen freien Elektricität $dx'\,dy'\,dz' \,.\, \varepsilon'$ im Zeitelemente dt, welche von der Bewegung der *positiven* Elektricität hervorgebracht wird. Aus der *entgegengesetzt gleichen Bewegung der negativen Elektricität* ergiebt sich aber nochmals eine ebenso grosse Verminderung für dasselbe Zeitelement dt; folglich ist jene Summe *die Hälfte der ganzen Verminderung* der im Elemente $dx'\,dy'\,dz'$ enthaltenen freien Elektricität im Zeitelemente dt, d. i. die *Hälfte* von $= - dx'\,dy'\,dz' \,.\, [d\varepsilon'/dt] \,.\, dt$, also ist

$$\frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'} = -\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon'}{dt}. \tag{8}$$

Bezeichnet man endlich die Winkel, welche die nach Innen gerichtete Normale des Oberflächenelements dS' mit der Richtung der x-, y- und

z-Axe bildet, mit (N', x'), (N', y'), (N', z'), so ist die Menge der *positiven* Elektricität, welche in dem Zeitelemente dt von dem Oberflächenelemente dS' ins Innere zurückströmt,

$$= (u' \cos(N', x') + v' \cos(N', y') + w' \cos(N', z'))\, dS' . dt,$$

und da eine gleiche Menge *negativer* Elektricität in derselben Zeit aus dem Innern zu dem Oberflächenelemente dS' hinströmt, so ergiebt sich, dass jene Menge die Hälfte der *ganzen Verminderung der freien Elektricität* $e'dS'$ in dem Oberflächenelemente dS' in dem Zeitelemente dt ist, d. i. $= -\frac{1}{2}[de'/dt] . dS' dt$, also ist

$$(9) \qquad u' \cos(N', x') + v' \cos(N', y') + w' \cos(N', z') = -\frac{1}{2}\frac{de'}{dt}.$$

So allgemein nun diese von Kirchhoff gegebene Entwickelung der Bewegungsgleichungen der Elektricität in einem beliebigen Leiter sonst auch ist, so liegen ihr doch folgende drei beschränkende Annahmen zu Grunde, nämlich 1. die Annahme, wonach der Werth der elektromotorischen Kraft in einem Punkte, wie oben geschehen, blos durch *Verdoppelung der auf die positive Elektricität wirkenden* Kraft bestimmt werden durfte, dass nämlich in allen Theilen des Leiters stets gleiche Mengen von positiver und negativer Elektricität enthalten wären, oder genauer, da dies streng genommen so viel heissen würde, als dass die Dichtigkeit der freien Elektricität im Innern und an der Oberfläche des Leiters ε' und e' überall stets Null sein sollte, was nicht der Fall ist, dass wenigstens die vorhandene *freie* Elektricität gegen die Menge des an derselben Stelle vorhandenen *neutralen Gemisches* beider Elektricitäten stets als verschwindend klein betrachtet werden dürfe; 2. die Annahme, dass durch jeden Querschnitt gleichzeitig immer gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität in entgegengesetzter Richtung durchgehen, was nur dann anzunehmen gestattet ist, wenn man überall eine beliebige Bewegung des neutralen Fluidums hinzugefügt denken darf, aus dem Grunde nämlich, weil eine solche hinzugefügte Bewegung des neutralen Fluidums, wenn sie wirklich vorhanden wäre, gar keinen Einfluss auf die *Beobachtungen* haben würde; 3. die Annahme einer allgemeineren Geltung des Ohm'schen Gesetzes, welche, wie später gezeigt werden soll, auf die Annahme zurückgeführt werden kann, dass die *Masse* des elektrischen Fluidums gegen die *Masse* seines ponderablen Trägers überall völlig verschwinde, was allerdings allgemein angenommen zu werden pflegt.

2.

Entwickelung des Ausdrucks der elektromotorischen Kraft, welche von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen in einem kleinen, als Cylinder betrachteten, Stücke des Leitungsdrahts auf irgend einen Punkt des mittleren Querschnitts dieses Stückes ausgeübt wird.

Zur näheren Bestimmung der elektromotorischen Kraft, welche in irgend einem Punkte des Leitungsdrahts wirkt, ist es zweckmässig, dieselbe in zwei Theile zu scheiden, nämlich in den Theil, welcher von dem Elemente des Leitungsdrahts herrührt, in welchem der betrachtete Punkt selbst liegt, und in den Theil, welcher von allen übrigen Elementen herrührt, die in grösseren, messbaren Entfernungen von dem betrachteten Punkte liegen.

Das Element des Leitungsdrahts, in welchem der betrachtete Punkt selbst liegt, sei ein Cylinder, dessen Halbmesser im Vergleich mit seiner Länge sehr klein ist. Die Vertheilung der freien Elektricität sowohl wie der elektrischen Bewegungen in diesem Cylinder wird hierbei von Kirchhoff als *symmetrisch gegen die Cylinderaxe* angenommen.

In Beziehung auf die Koordinaten falle die x-Axe mit der Cylinderaxe zusammen und man setze

$$y = \varrho \cos \varphi, \qquad y' = \varrho' \cos \varphi',$$
$$z = \varrho \sin \varphi, \qquad z' = \varrho' \sin \varphi'.$$

Unterscheidet man ferner die Stromdichtigkeit in der Richtung der Cylinderaxe und senkrecht gegen die Cylinderaxe, so ist letztere, bei der angenommenen Symmetrie der Bewegungen, überall *radial*, d. i. ihre Richtung fällt in jedem Punkte mit dem durch diesen Punkt gelegten Cylinderradius zusammen. Hieraus folgt, wenn σ diese *radiale Stromdichtigkeit* im Punkte (x, y, z), σ' im Punkte (x', y', z') bezeichnet, dass

$$v = \sigma \cos \varphi, \qquad v' = \sigma' \cos \varphi',$$
$$w = \sigma \sin \varphi, \qquad w' = \sigma' \sin \varphi',$$

worin σ und σ' von φ und φ' unabhängige Werthe haben.

Durch Substitution dieser Werthe in den Ausdrücken von Ω und U im vorhergehenden Artikel erhält man, wenn α den Cylinderhalbmesser bezeichnet,

$$\Omega = \iiint \frac{dx' \,.\, \varrho' d\varrho' d\varphi'}{r} \cdot \varepsilon' + \alpha \iint \frac{dx' d\varphi'}{r} \cdot e', \tag{1}$$

$$U = \iiint \frac{dx' \,.\, \varrho' d\varrho' d\varphi'}{r^3} (x - x') \Big(u'(x - x') + \sigma' \big(\varrho \cos(\varphi - \varphi') - \varrho' \big) \Big) \cdot \tag{2}$$

Man erhält ferner durch diese Substitution

$$\frac{dv'}{dy'} = \frac{d \,.\, \sigma' \cos\varphi'}{dy'},$$

worin σ' für einen gegebenen Werth von x' blos von der Variablen ϱ' abhängt. Setzt man daher $\sigma' = f(\varrho') = f(\sqrt{y'^2 + z'^2})$, so findet man

$$\frac{dv'}{dy'} = \frac{d}{dy'} \cdot \left(\frac{y' f(\sqrt{y'^2 + z'^2})}{\sqrt{y'^2 + z'^2}}\right) = \frac{y'^2}{\varrho'^2} \cdot \frac{d\sigma'}{d\varrho'} + \frac{\varrho'^2 - y'^2}{\varrho'^3} \cdot \sigma'.$$

Ebenso findet man

$$\frac{dw'}{dz'} = \frac{z'^2}{\varrho'^2} \cdot \frac{d\sigma'}{d\varrho'} + \frac{\varrho'^2 - z'^2}{\varrho'^3} \cdot \sigma',$$

folglich

$$\frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'} = \frac{d\sigma'}{d\varrho'} + \frac{\sigma'}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho'} \cdot \frac{d \,.\, \varrho'\sigma'}{d\varrho'}.$$

Fügt man noch du'/dx' hinzu und substituirt für die Summe $du'/dx' + dv'/dy' + dw'/dz'$ den dafür erhaltenen Werth, in Gleichung (8) des vorhergehenden Artikels, so ergiebt sich die Gleichung

$$(3) \qquad \frac{du'}{dx} + \frac{1}{\varrho'} \cdot \frac{d \,.\, \varrho'\sigma'}{d\varrho'} = -\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon'}{dt}.$$

Endlich findet man für die Winkel, welche die nach Innen gerichtete Normale des Oberflächenelements dS' mit der Richtung der drei Koordinatenaxen bildet, folgende Werthe:

$$(N', x') = \frac{\pi}{2}, \quad (N', y') = \varphi' + \pi, \quad (N', z') = \varphi' + \frac{\pi}{2};$$

folglich ist

$$u' \cos(N', x') = 0, \quad v' \cos(N', y') = -\sigma' \cos\varphi'^2, \quad w' \cos(N', z') = -\sigma' \sin\varphi'^2.$$

Durch Substitution dieser Werthe in Gleichung (9) des vorhergehenden Artikels ergiebt sich dann

$$(4) \qquad \sigma' = \frac{1}{2}\frac{de'}{dt}.$$

Setzt man nun Kürze halber

$$x' - x = \lambda, \text{ also } dx' = d\lambda,$$
$$\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\varphi - \varphi') = \beta^2, \text{ also } r^2 = \beta^2 + \lambda^2,$$

so ist, wenn l die Länge des Cylinders bezeichnet und der Punkt (x, y, z) in dem diese Länge halbirenden Querschnitt liegt, nach Gleichung (1) und (2)

$$\Omega = \iint \varrho' d\varrho' d\varphi' \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\varepsilon' d\lambda}{\sqrt{\beta^2 + \lambda^2}} + a \int d\varphi' \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{e' d\lambda}{\sqrt{\beta^2 + \lambda^2}},$$

$$U = \iint \varrho'\, d\varrho'\, d\varphi' \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{u'\lambda^2 d\lambda}{(\beta^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} + \iint \varrho'^2 \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho'}\cos(\varphi - \varphi')\right) d\varrho'\, d\varphi' \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\sigma'\lambda d\lambda}{(\beta^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Entwickelt man nun in der ersteren Gleichung ε' und e' nach Potenzen von λ, nämlich

$$e' = e + \frac{de}{dx}\cdot\lambda + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{d^2 e}{dx^2}\cdot\lambda^2 + \ldots,$$

$$\varepsilon' = \varepsilon'_0 + \frac{d\varepsilon'_0}{dx}\cdot\lambda + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{d^2\varepsilon'_0}{dx^2}\cdot\lambda^2 + \ldots,$$

wo ε'_0, abgesehen von der Zeit, blos von der Variablen ϱ' abhängt, so kann für sehr kleine Werthe von β^2/l^2, welche, da β^2 nie grösser als $4a^2$ sein kann, aus kleinen Werthen von a/l nothwendig folgen,

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{d\lambda}{\sqrt{\beta^2+\lambda^2}} = 2\log\frac{l}{\beta}, \quad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\beta^2+\lambda^2}} = 0, \quad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\beta^2+\lambda^2}} = \tfrac{1}{4}l^2$$

gesetzt werden, woraus für kleine Werthe von l folgt

$$\Omega = \iint \varrho'\, d\varrho'\, d\varphi' \left(2\varepsilon'_0 \log\frac{l}{\beta} + \frac{1}{8}\frac{d^2\varepsilon'_0}{dx^2}l^2\right) + a\int d\varphi' \left(2e\log\frac{l}{\beta} + \frac{1}{8}\frac{d^2 e}{dx^2}l^2\right).$$

Die Integration ist von $\varphi' = 0$ bis $\varphi' = 2\pi$ und von $\varrho' = 0$ bis $\varrho' = a$ zu erstrecken, wonach sich also ergiebt

$$\Omega = 2\pi\int_0^a \varrho'\, d\varrho' \left(2\varepsilon'_0 \log l + \frac{1}{8}\frac{d^2\varepsilon'_0}{dx^2}l^2\right) + 2\pi a\left(2e\log l + \frac{1}{8}\frac{d^2 e}{dx^2}l^2\right)$$

$$- 2\int_0^a \varrho'\, d\varrho' . \varepsilon'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' . \log\beta - 2ae\int_0^{2\pi} d\varphi' . \log\beta.$$

Beachtet man nun, dass $\int_0^{2\pi} d\varphi' . \log\beta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi' . \log\left(\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho'\cos(\varphi - \varphi')\right)$

entweder $= 2\pi\log\varrho'$ ist, wenn $\varrho' > \varrho$, oder $= 2\pi\log\varrho$ ist, wenn $\varrho > \varrho'$, so erhält man den auf die *Oberfläche* bezüglichen Theil, für welchen $\varrho' = a$ ist,

$$- 2ae\int_0^{2\pi} d\varphi' . \log\beta = - 4\pi a e\log a.$$

Der auf das *Innere* sich beziehende Theil zerfällt in zwei Stücke, nämlich

$$-2\int_0^a \varrho' d\varrho' . \varepsilon'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' . \log\beta = -4\pi\log\varrho \int_0^{\varrho} \varrho' d\varrho' . \varepsilon'_0 - 4\pi\int_{\varrho}^{a} \varrho' d\varrho' . \varepsilon'_0 \log\varrho',$$

reducirt sich also in dem einen Grenzfalle, nämlich wenn $\varrho = a$ ist, auf

$$-4\pi\log a . \int_0^a \varrho' d\varrho' . \varepsilon'_0,$$

in dem anderen Grenzfalle, nämlich wenn $\varrho = 0$ ist, auf

$$-4\pi\int_0^a \varrho' d\varrho' . \varepsilon'_0 \log\varrho',$$

die beide desto weniger von einander verschieden sind, je kleiner a,[1]) so dass man mit hinreichender Genauigkeit für sehr kleine Werthe von a den auf das Innere sich beziehenden Theil

$$2\int_0^a \varrho' d\varrho' . \varepsilon'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' . \log\beta = -4\pi\log a . \int_0^a \varrho' d\varrho' . \varepsilon'_0$$

setzen kann; folglich

$$\Omega = 2\pi\int_0^a \varrho' d\varrho' \left(2\varepsilon'_0 \log l + \frac{1}{8}\frac{d^2\varepsilon'_0}{dx^2} l^2\right) + 2\pi a\left(2e\log l + \frac{1}{8}\frac{d^2 e}{dx^2} l^2\right)$$
$$-4\pi\log a \cdot \left(ae + \int_0^a \varrho' d\varrho' \cdot \varepsilon'_0\right),$$

[1]) ε'_0 nähert sich bei der angenommenen symmetrischen Vertheilung der freien Elektricität im Drahte mit abnehmenden Werthen von ϱ' der *Konstanz*. Ist es hiernach für kleine Werthe von a gestattet, ε'_0 für alle Werthe von $\varrho' < a$ *konstant* zu setzen, so geht der für den ersteren Grenzfall gefundene Werth über in

$$-4\pi\varepsilon'_0 \log a \int_0^a \varrho' d\varrho' = -2\pi a^2 \varepsilon'_0 \log a,$$

der für den letzteren Grenzfall in

$$-4\pi\varepsilon'_0 \int_0^a \varrho' d\varrho' \log\varrho' = -2\pi a^2 \varepsilon'_0 (\log a - \tfrac{1}{2}),$$

die sich von einander desto weniger unterscheiden, je kleiner a ist.

oder kürzer

$$\Omega = 4\pi \log \frac{l}{a} \cdot \left(ae + \int_0^a \varrho' d\varrho' \cdot \varepsilon'_0 \right) + \tfrac{1}{4} \pi l^2 \cdot \left(a \frac{d^2 e}{dx^2} + \int_0^a \varrho' d\varrho' \cdot \frac{d^2 \varepsilon'_0}{dx^2} \right).$$

Setzt man endlich hierin

$$2\pi a e + 2\pi \int_0^a \varrho' d\varrho' . \varepsilon'_0 = E,$$

d. h., bezeichnet man mit Edx die Menge der *freien* Elektricität, die in dem Leiterelemente dx, theils an seiner Oberfläche, theils im Innern, enthalten ist, so erhält man durch zweimalige Differentiation

$$2\pi a \cdot \frac{d^2 e}{dx^2} + 2\pi \int_0^a \varrho' d\varrho' \cdot \frac{d^2 \varepsilon'_0}{dx^2} = \frac{d^2 E}{dx^2},$$

folglich

$$\Omega = 2E \log \frac{l}{a} + \frac{1}{8} \frac{d^2 E}{dx^2} \cdot l^2. \qquad (5)$$

Ebenso können nun auch in der oben gefundenen Gleichung für U die Werthe von u' und σ' nach Potenzen von λ entwickelt werden, nämlich

$$u' = u'_0 + \frac{du'_0}{dx} \cdot \lambda + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d^2 u'_0}{dx^2} \cdot \lambda^2 + \cdots,$$

$$\sigma' = \sigma'_0 + \frac{d\sigma'_0}{dx} \cdot \lambda + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d^2 \sigma'_0}{dx^2} \cdot \lambda^2 + \cdots,$$

wo u'_0 und σ'_0 für einen gegebenen Werth von x', abgesehen von der Zeit, blos von der Variablen ϱ' abhängen.

Nun kann für sehr kleine Werthe von β^2/l^2, wie sie sehr kleinen Werthen von a^2/l^2 entsprechen,

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda d\lambda}{(\beta^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda^2 d\lambda}{(\beta^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\left(\log \frac{l}{\beta} - 1\right) = 2 \log \frac{l}{e\beta},$$

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda^3 d\lambda}{(\beta^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda^4 d\lambda}{(\beta^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{1}{4} l^2$$

gesetzt werden, worin e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Hiernach ergiebt sich folgende Gleichung für U:

$$U = \iint \varrho' d\varrho' d\varphi' \cdot \left(2u'_0 \cdot \log \frac{l}{e\beta} + \frac{1}{8} \frac{d^2 u'_0}{dx^2} \cdot l^2 \right)$$
$$+ \iint \varrho'^2 \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho'} \cos(\varphi - \varphi') \right) d\varrho' d\varphi' \left(2 \frac{d\sigma'_0}{dx} \log \frac{l}{e\beta} + \frac{1}{24} \frac{d^3 \sigma'_0}{dx^3} l^2 \right).$$

Der letztere Theil dieses Werthes von U kann, wenn a sehr klein ist, da die Integration nach ϱ' von $\varrho'=0$ bis $\varrho'=a$ zu erstrecken ist, als verschwindend betrachtet werden, folglich

$$U=\iint \varrho' d\varrho' d\varphi' \cdot \left(2u'_0 \log\frac{l}{e\beta}+\frac{1}{8}\frac{d^2u'_0}{dx^2}l^2\right),$$

wo die Integration von $\varphi'=0$ bis $\varphi'=2\pi$ und von $\varrho'=0$ bis $\varrho'=a$ zu erstrecken ist, also

$$U=2\pi\int_0^a \varrho' d\varrho' \cdot \left(2u'_0 \log\frac{l}{e}+\frac{1}{8}\frac{d^2u'_0}{dx^2}\cdot l^2\right)-2\int_0^a \varrho' d\varrho' \cdot u'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \log\beta \cdot$$

Da nun $\int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log\beta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log\left(\varrho^2+\varrho'^2-2\varrho\varrho'\cos(\varphi-\varphi')\right)$ entweder $=2\pi\log\varrho'$ ist, wenn $\varrho'>\varrho$, oder $=2\pi\log\varrho$ ist, wenn $\varrho>\varrho'$, so ergiebt sich

$$U=2\pi\int_0^a \varrho' d\varrho' \cdot \left(2u'_0 \log\frac{l}{e}+\frac{1}{8}\frac{d^2u'_0}{dx^2}l^2\right)-4\pi\log\varrho\int_0^\varrho \varrho' d\varrho' \cdot u'_0-4\pi\int_\varrho^a \varrho' d\varrho' \cdot u'_0 \log\varrho',$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$U=4\pi\log\frac{l}{ea}\cdot\int_0^a \varrho' d\varrho' \cdot u'_0+\frac{1}{4}\pi l^2\int_0^a \varrho' d\varrho' \cdot \frac{d^2u'_0}{dx^2}+4\pi\log\frac{a}{\varrho}\cdot\int_0^\varrho \varrho' d\varrho' \cdot u'_0+4\pi\int_\varrho^a \varrho' d\varrho' \cdot u'_0 \log\frac{a}{\varrho'}\cdot$$

Da nun aber, wenn a sehr klein ist, die beiden letzten Theile dieses Werthes von U gegen den ersten Theil als verschwindend betrachtet werden dürfen, so kann

$$U=4\pi\log\frac{l}{ea}\cdot\int_0^a \varrho' d\varrho' \cdot u'_0+\frac{1}{4}\pi l^2\cdot\int_0^a \varrho' d\varrho' \cdot \frac{d^2u'_0}{dx^2}$$

gesetzt werden.

Setzt man endlich hierin

$$2\pi\int_0^a \varrho' d\varrho' \cdot u'_0 = i,$$

das heisst, bezeichnet man mit idt die Menge der positiven Elektricität, welche in dem Zeitelemente dt durch den Querschnitt des Leitungsdrahts fliesst, wo also i die Stromintensität nach mechanischem Maasse ausdrückt, so erhält man durch zweimalige Differentiation

$$2\pi\int_0^a \varrho' d\varrho' \cdot \frac{d^2u'_0}{dx^2}=\frac{d^2i}{dx^2},$$

folglich

$$U = 2i\log\frac{l}{ea} + \frac{1}{8}\frac{d^2i}{dx^2}\cdot l^2.$$

Hiernach wird nun die elektromotorische Kraft, welche von der *freien Elektricität* in einem kleinen, als Cylinder betrachteten, Stücke des Leitungsdrahts auf irgend einen Punkt des mittleren Querschnitts dieses Stückes ausgeübt wird, näher bestimmt, nämlich aus dem Werthe von Ω,

$$-2\frac{d\Omega}{dx} = -4\frac{dE}{dx}\cdot\log\frac{l}{a} - \frac{1}{4}\frac{d^3E}{dx^3}\cdot l^2,$$

und ebenso die elektromotorische Kraft, welche durch *Induktion* von den *elektrischen Bewegungen* in demselben Stücke auf denselben Punkt ausgeübt wird, nämlich aus dem Werthe von U,

$$-\frac{8}{c^2}\frac{dU}{dt} = -\frac{16}{c^2}\cdot\frac{di}{dt}\cdot\log\frac{l}{ea} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{d^3i}{dx^2dt}\cdot l^2.$$

Endlich kann, wenn man mit Kirchhoff für den Werth von $\log l/a$ eine sehr grosse Zahl annimmt,

$$-2\frac{d\Omega}{dx} = -4\frac{dE}{dx}\cdot\log\frac{l}{a},$$

$$-\frac{8}{c^2}\frac{dU}{dt} = -\frac{16}{c^2}\cdot\frac{di}{dt}\cdot\log\frac{l}{ea},$$

oder auch, wenn 1 gegen $\log[l/a]$ ganz verschwindet,

$$-\frac{8}{c^2}\frac{dU}{dt} = -\frac{16}{c^2}\cdot\frac{di}{dt}\cdot\log\frac{l}{a}$$

gesetzt werden.

3.

Vereinfachung der allgemeinen Gleichungen.

Nach näherer Bestimmung der auf einen Punkt (x, y, z) des Leitungsdrahts wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche theils von der freien Elektricität, theils von den elektrischen Bewegungen in dem kleinen, als Cylinder zu betrachtenden Stücke des Leitungsdrahts, zu welchem jener Punkt selbst gehört, herrühren, hat Kirchhoff die Art. 1 aufgestellten allgemeinen Gleichungen unter folgenden Voraussetzungen zu vereinfachen gesucht, nämlich

1. dass der Halbmesser des Leitungsdrahts a im Vergleich mit der Länge seiner als cylindrisch zu betrachtenden Elemente l so klein sei, dass $\log[l/a]$ eine sehr grosse Zahl darstelle, was schon im vorhergehenden Artikel zur Vereinfachung des Ausdrucks der elektromotorischen Kräfte angenommen wurde;

2. dass in einem solchen dünnen Leitungsdrahte die auf einen Punkt (x, y, z) wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen im ganzen Leitungsdrahte mit Ausnahme des einzigen kleinen, als Cylinder zu betrachtenden Stückes, dessen mittelstem Querschnitte der Punkt (x, y, z) angehört, herrühren, verschwindend klein seien gegen diejenigen auf denselben Punkt wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen in dem eben bezeichneten kleinen Stücke selbst herrühren. — Hierzu kommt noch die auch der Entwickelung der allgemeinen Gleichungen Art. 1 schon zum Grunde gelegte Voraussetzung;
3. dass das Ohm'sche Gesetz für alle Stromelemente einzeln gelte, auch wenn die Stromintensitäten in denselben sehr verschieden sind und schnell wechseln.

Ist nun nach der *ersten* Voraussetzung $\log [l/a]$ eine sehr grosse Zahl, und kommen nach der *zweiten* Voraussetzung die im vorigen Artikel näher bestimmten elektromotorischen Kräfte, gegen welche die übrigen von den ferner liegenden Stücken des Leitungsdrahts herrührenden verschwindend klein sind, allein in Betracht, so findet man nach dem Schlusse des vorigen Artikels den *vollständigen Ausdruck der elektromotorischen Kraft* nach der Richtung der Axe des Leitungsdrahts

$$-2\left(\frac{d\Omega}{dx}+\frac{4}{c^2}\frac{dU}{dt}\right)=-4\log\frac{l}{a}\left(\frac{dE}{dx}+\frac{4}{c^2}\frac{di}{dt}\right).$$

Ist dieses nun der Ausdruck der ganzen elektromotorischen Kraft, so giebt derselbe nach Art. 1 mit dem specifischen Leitungsvermögen k multiplicirt, der *dritten* Voraussetzung gemäss, die Stromdichtigkeit u nach der Richtung des Leitungsdrahts in dem betrachteten Punkte (x, y, z), nämlich

$$u=-4k\log\frac{l}{a}\cdot\left(\frac{dE}{dx}+\frac{4}{c^2}\frac{di}{dt}\right).$$

Beachtet man endlich, dass die Stromdichtigkeit im Punkte (x, y, z) hiernach von ϱ unabhängig, folglich für alle Punkte desselben Drahtquerschnitts gleich ist, und daher mit dem Drahtquerschnitt πa^2 multiplicirt die Stromintensität i giebt, so erhält man durch Multiplikation der vorhergehenden Gleichung mit πa^2 folgende aus den sieben ersten, Art. 1 entwickelten allgemeinen Gleichungen abgeleitete Gleichung:

$$i=-4\pi a^2 k\log\frac{l}{a}\cdot\left(\frac{dE}{dx}+\frac{4}{c^2}\frac{di}{dt}\right).$$

Es bleiben also nur noch die beiden letzten von den Art. 1 entwickelten allgemeinen Gleichungen übrig, welche Art. 2 reducirt worden sind auf

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d \,.\, \varrho\sigma}{d\varrho} = -\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon}{dt},$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{de}{dt}.$$

Multiplicirt man die erstere mit $\varrho d\varrho d\varphi$ und integrirt sodann über den ganzen Querschnitt des Leitungsdrahts, und zieht endlich die mit $2\pi a$ multiplicirte zweite Gleichung ab, so erhält man

$$\pi a^2 \cdot \frac{du}{dx} = -\pi a \cdot \frac{de}{dt} - \pi \int_0^a \varrho d\varrho \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Da nun aber, nach Art. 2 für $\varrho' = \varrho$,

$$2\pi a e + 2\pi \int_0^a \varrho d\varrho \cdot \varepsilon = E,$$

woraus

$$2\pi a \cdot \frac{de}{dt} + 2\pi \int_0^a \varrho d\varrho \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dE}{dt},$$

so ergiebt sich, da $\pi a^2 u = i$ war, woraus $\pi a^2 \,.\, du/dx = di/dx$ folgt, aus den beiden letzten Art. 1 entwickelten Gleichungen folgende:

$$\frac{di}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dE}{dt}.$$

Nach dieser Reduktion der neun allgemeinen Gleichungen auf zwei, nämlich

$$i = -4\pi a^2 k \log \frac{l}{a} \cdot \left(\frac{dE}{dx} + \frac{4}{c^2}\frac{di}{dt}\right),$$

$$\frac{di}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dE}{dt},$$

kann endlich, durch Elimination von i, das Gesetz abgeleitet werden, nach welchem die Vertheilung der freien Elektricität in der Kette E sich für jeden Augenblick bestimmen lässt, nämlich

$$\frac{d^2E}{dt^2} - \frac{c^2}{2}\frac{d^2E}{dx^2} + \frac{c^2}{16\pi a^2 k \log \frac{l}{a}} \cdot \frac{dE}{dt} = 0,$$

oder es kann, durch Elimination von E, das Gesetz abgeleitet werden, nach welchem die Stromintensität i sich für jeden Punkt der Kette und für jeden Augenblick bestimmen lässt, nämlich

$$\frac{d^2 i}{dt^2} - \frac{c^2}{2}\frac{d^2 i}{dx^2} + \frac{c^2}{16\pi a^2 k \log\frac{l}{a}} \cdot \frac{di}{dt} = 0.$$

Die Vertheilung der freien Elektricität, sowie die Stromintensitäten in allen Theilen des Leitungsdrahts würden sich aber, wie man leicht sieht, auch aus den *Bewegungen* aller elektrischen Theilchen im Leitungsdraht von selbst ergeben haben, wenn das Gesetz der letzteren bekannt wäre. Umgekehrt lässt sich nun dieses letztere Gesetz aus dem gefundenen Gesetz der Vertheilung und der Stromintensitäten leicht ableiten, wobei es genügt, dasselbe für die Bewegungen aller *positiv* elektrischen Theilchen im Leitungsdrahte aufzustellen, weil die entgegengesetzt gleichen Bewegungen aller *negativ* elektrischen Theilchen sich daraus von selbst ergeben.

Bezeichnet s irgend einen Punkt des Leitungsdrahts und $\mathfrak{E}ds$ die ganze Menge positiver Elektricität, welche in dem Längenelement des Leitungsdrahts ds enthalten ist, bezeichnet ferner σ die Verschiebung eines Theilchens dieser positiven Elektricität nach der Zeit t von der Stelle seines ursprünglichen Gleichgewichts, also $d\sigma/dt$ die Geschwindigkeit, mit welcher sich dieses Theilchen im Leitungsdrahte bewegt, und $d\sigma/ds$ die Verdünnung der positiven Elektricität im Punkte s des Leitungsdrahts am Ende der Zeit t, der eine ebenso grosse Verdichtung der negativen Elektricität immer entspricht, so ist die Stromintensität i im Punkte des Leitungsdrahts s am Ende der Zeit t dem Produkte $\mathfrak{E}\,d\sigma/dt$ gleich, und die Dichtigkeit E der *freien Elektricität*, d. i. des Ueberschusses der positiven Elektricität über die negative im Elemente ds, am Ende der Zeit t, ist dem doppelten Produkte $\mathfrak{E}\,d\sigma/ds$ negativ genommen gleich, also

$$i = \mathfrak{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt}, \quad E = -2\mathfrak{E} \cdot \frac{d\sigma}{ds}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die vorhergehenden Gleichungen erhält man aber die beiden Gleichungen

$$\frac{d^3\sigma}{dt^3} - \frac{c^2}{2}\frac{d^3\sigma}{ds^2 dt} + \frac{c^2}{16\pi a^2 k \log\frac{l}{a}} \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^3\sigma}{ds\,dt^2} - \frac{c^2}{2}\frac{d^3\sigma}{ds^3} + \frac{c^2}{16\pi a^2 k \log\frac{l}{a}} \cdot \frac{d^2\sigma}{ds\,dt} = 0,$$

woraus mit Rücksicht darauf, dass während des ursprünglichen Gleichgewichts der Elektricität σ im ganzen Leitungsdraht überall $= 0$ war, das Gesetz der Bewegung aller *positiv* elektrischen Theilchen im Leitungsdraht folgt, nämlich

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{c^2}{2}\frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{c^2}{16\pi a^2 k \log\frac{l}{a}} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = 0 .$$

4.

Prüfung der im vorigen Artikel gemachten Voraussetzungen

Im Anfang des vorigen Artikels sind die zur Vereinfachung der Gleichungen gemachten Voraussetzungen zusammengestellt worden, wovon die eine schon der Art. 1 gegebenen Entwicklung zum Grunde gelegt war. Was zunächst nun die erste der Vereinfachung halber neu hinzugekommene Annahme betrifft, nämlich die Annahme eines sehr feinen Leitungsdrahts, so scheint dieselbe so nahe zu liegen, dass sie kaum einer näheren Prüfung bedürfe, sondern, wenn es sich um Vereinfachung handelt, sich von selbst verstehe; doch näher betrachtet sieht man leicht, dass diese Feinheit des Leitungsdrahts hierbei in solchem Grade in Anspruch genommen wird und werden muss, wie sie wirklich nie Statt findet, so dass dadurch alle praktische Anwendbarkeit der daraus abgeleiteten Folgerungen zweifelhaft wird. Es kommt aber dazu noch das besondere Bedenken, ob nicht ausserdem diese Voraussetzung mit der der Entwicklung Art. 1 zum Grunde gelegten, das Ohm'sche Gesetz betreffenden, Voraussetzung in Widerspruch gerathe, weil letztere auf weniger feine Leitungsdrähte beschränkt werden zu müssen scheint.

Findet es nämlich bei linearen Leitern auch kein Bedenken, die Dicke des Leitungsdrahts gegen seine ganze Länge als verschwindend zu betrachten, so sagt es doch schon weit mehr, diese Dicke gegen die Länge eines einzelnen noch als geradlinig zu betrachtenden Elements des Leitungsdrahts als verschwindend zu betrachten, und noch weit mehr heisst es, den Logarithmus des Verhältnisses der Länge eines so kleinen Elements zu jener Dicke als eine grosse Zahl anzunehmen, gegen welche die Einheit als verschwindend zu betrachten sei, wie es in jener Voraussetzung geschieht. Denn nähme man auch z. B. nur die Zahl 20 als eine solche Zahl an, so würde schon ein Draht verlangt werden, dessen kleinstes noch als geradlinig zu betrachtendes Stück über 200 Millionen Mal länger als dick sein müsste, was nicht vorkommt.

Noch wichtiger aber ist das andere Bedenken, ob nicht die Annahme eines so feinen Leitungsdrahts, wenn er existirte, mit der das

Ohm'sche Gesetz betreffenden Voraussetzung in Widerspruch gerathen würde. Es muss jedenfalls wenigstens als zweifelhaft betrachtet werden, ob diese letztere Voraussetzung *allgemein und streng gültig*, oder ob sie nur *für weniger feine Drähte näherungsweise zulässig ist*, und dieser Zweifel kann, wie man leicht einsieht, nur durch eine von dieser Voraussetzung selbst unabhängige Entwicklung der elektrischen Bewegungsgesetze gehoben werden. Es soll daher eine solche Entwicklung zu geben versucht werden, wenigstens in so weit, als es zur Prüfung des angeführten Bedenkens nöthig erscheint, unter vorläufiger Beibehaltung der ersteren Voraussetzung, nämlich eines so feinen Leitungsdrahts, dass der Logarithmus des Verhältnisses der Länge der noch als geradlinig zu betrachtenden Elemente zu ihrer Dicke so gross sei, dass die Einheit dagegen vernachlässigt werden könne. Diese Entwicklung beruht auf folgender Betrachtung.

Wenn alle Kräfte wirklich bekannt wären, welche auf die elektrischen Theilchen im Leitungsdrahte wirken, und diese Kräfte sämmtlich nach bekannten mechanischen Maassen genau ausgedrückt wären, so würde *die Möglichkeit einer von der Voraussetzung des* Ohm'*schen Gesetzes ganz unabhängigen Entwicklung der Bewegungsgesetze* dieser elektrischen Theilchen im Leitungsdrahte von selbst einleuchten; denn die Resultante aller auf irgend ein Theilchen wirkenden Kräfte dividirt durch die Beschleunigung des Theilchens in der Richtung der Resultante muss, wie bei allen Körpern, einen stets gleichen Quotienten geben, welcher in der allgemeinen Mechanik als *Masse des Theilchens* bezeichnet wird.

5.

Von der Voraussetzung des Ohm'*schen Gesetzes unabhängige Herleitung der Bewegungsgleichung.*

Hiernach suchen wir also zunächst alle auf ein elektrisches Theilchen im Leitungsdraht wirkenden Kräfte aufzuzählen und nach mechanischem Maasse auszudrücken, nämlich

1. die aus der Nähe wirkenden, schon von Kirchhoff bestimmten elektrischen Kräfte, aus denen, unter der von der Feinheit des Leitungsdrahts gemachten Voraussetzung, für einen Punkt s des Leitungsdrahts die elektromotorische Kraft nach mechanischem Maasse ausgedrückt

$$= -4 \log \frac{l}{\alpha} \cdot \left(\frac{dE}{ds} + \frac{4}{c^2} \frac{di}{dt} \right)$$

resultirte. Diese elektromotorische Kraft ist die Differenz der beiden Kräfte, welche auf die positive und auf die negative elektrische Maasseinheit (wie sie in der Elektrostatik definirt wird) wirken würden, wenn

sie sich in diesem Punkte befänden. Da diese beiden Kräfte, abgesehen davon, dass sie entgegengesetzte Richtung haben, gleich sind, so ergiebt sich, dass die Hälfte jener elektromotorischen Kraft, nämlich

$$-2\log\frac{l}{a}\cdot\left(\frac{dE}{ds}+\frac{4}{c^2}\frac{di}{dt}\right),$$

die Kraft ist, welche auf jede positive elektrische Maasseinheit im Punkte s wirkt. Die Zahl der positiv elektrischen Maasseinheiten, welche in dem Längenelemente des Leitungsdrahts ds enthalten ist, ist aber früher, im dritten Artikel, mit $\mathfrak{E}ds$ bezeichnet worden, wobei zugleich bemerkt worden, dass $\mathfrak{E}d\sigma/dt = i$ und $-2\mathfrak{E}d\sigma/ds = E$ ist. Multiplicirt man daher obige Kraft mit der Zahl $\mathfrak{E}ds$ und substituirt die eben angegebenen Werthe, so erhält man die auf die positive Elektricität im Elemente ds wirkende Kraft nach mechanischem Maasse ausgedrückt

$$= 4\,\mathfrak{E}^2\log\frac{l}{a}\cdot\left(\frac{d^2\sigma}{ds^2}-\frac{2}{c^2}\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right)\cdot ds\,.$$

Zu diesen schon vorher bestimmten Kräften müssen aber ferner noch

2. die von den ponderablen Leitertheilchen auf die positive Elektricität im Elemente ds ausgeübten Kräfte hinzugefügt werden, welche wir auf folgende Weise zu bestimmen suchen.

Nach dem Ohm'schen, für *beharrliche* Ströme bewiesenen, Gesetze ist, wie Art. 1 in der Note gezeigt worden, die von den ponderablen Theilchen des Leitungsdrahts unabhängige elektromotorische Kraft in einem Punkte der Kette $= u/k$, oder, da nach Art. 3 $\pi a^2 u = i$ ist, $= i/[\pi a^2 k]$. Die *Beharrlichkeit* des Stroms, d. i. die gleichbleibende Geschwindigkeit der elektrischen Theilchen im Leitungsdrahte, beweist aber, dass ausser dieser von den ponderablen Theilchen unabhängigen elektromotorischen Kraft noch eine zweite an Grösse gleiche, an Richtung entgegengesetzte elektromotorische Kraft vorhanden sein müsse, welche offenbar von der Wirkung der ponderablen Leitertheilchen auf die Elektricität im Leiter herrühren muss, welche dadurch also

$$= -\frac{i}{\pi a^2 k}$$

gegeben ist. Die Hälfte dieser elektromotorischen Kraft, nämlich

$$-\frac{i}{2\pi a^2 k}$$

ist dann, wie aus dem vorher Gesagten einleuchtet, die Kraft, welche von den ponderablen Leitertheilchen auf jede positiv elektrische Maasseinheit in dem betrachteten Punkte s ausgeübt wird. Multiplicirt man

daher diese Kraft mit der Zahl der positiv elektrischen Maasseinheiten $\mathfrak{E}ds$, die im Elemente ds enthalten sind, so findet man die von den ponderablen Leitertheilchen auf die im Elemente ds enthaltene positive Elektricität ausgeübte Kraft, nach mechanischem Maasse ausgedrückt, nämlich, wenn man auch hier, wie vorher, $\mathfrak{E}d\sigma/dt$ für i substituirt,

$$= -\frac{1}{2\pi a^2 k} \cdot \mathfrak{E}^2 \cdot \frac{d\sigma}{dt} \cdot ds.$$

Beachtet man endlich, dass die Fälle *nicht beharrlicher* Ströme von denen *beharrlicher* Ströme sich nur in solchen Beziehungen unterscheiden, die ihren Grund in Verschiedenheiten der Wechselwirkung *der elektrischen Theilchen unter einander* haben, wovon die aus der Wechselwirkung *der ponderablen Leitertheilchen auf die elektrischen* herrührenden Kräfte in keiner unmittelbaren Abhängigkeit stehen, so scheint man berechtigt, das angegebene Gesetz zur Bestimmung dieser letzteren Kräfte, wenn es in allen Fällen *beharrlicher* Ströme gilt, als allgemein gültig, auch in den Fällen *nicht beharrlicher* Ströme anzunehmen.

Um alle Kräfte in Rechnung zu bringen, welche auf das betrachtete elektrische Theilchen im Leitungsdrahte wirken, fassen wir endlich

3. alle aus der Ferne wirkenden Kräfte, woher sie rühren mögen, zusammen, und begreifen darunter namentlich auch alle Kräfte, welche von der Wechselwirkung der Elektricität mit Ausnahme der in dem Elemente ds selbst enthaltenen, in welchem der betrachtete Punkt liegt, auf die Elektricität in dem betrachteten Punkte herrühren, welche von Kirchhoff als verschwindend klein angenommen worden sind. Die daraus entspringende elektromotorische Kraft im Punkte s bezeichnen wir, nach mechanischem Maasse, mit S, deren Hälfte dann mit $\mathfrak{E}ds$ multiplicirt die auf die positive Elektricität im Elemente ds ausgeübte Kraft nach mechanischem Maasse ausgedrückt

$$= \frac{1}{2}\mathfrak{E}Sds$$

giebt.

Da alle diese Kräfte nach mechanischem Maasse, das heisst in Theilen derjenigen Kraft ausgedrückt sind, welche der ponderablen Masseneinheit (der Masse eines Milligramms) in der Zeiteinheit (in der Zeit einer Sekunde) die Einheit der Geschwindigkeit (ein Millimeter in einer Sekunde) ertheilt, so folgt daraus, nach dem bekannten für alle Körper gültigen Bewegungsgesetze, dass der Quotient aus der Summe aller dieser gleich gerichteten Kräfte dividirt durch die Beschleunigung, d. i. durch die Geschwindigkeit, welche diese Summe von Kräften der

positiven Elektricität im Elemente ds, auf welche sie wirkt, während der Zeiteinheit ertheilen würde, nämlich

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2},$$

die Definition der *Masse* der im Elemente ds enthaltenen positiven Elektricität, in dem für alle Körper festgesetzten Massenmaasse (Milligramm) ausgedrückt, giebt.

Es ist bemerkenswerth, dass man hierdurch auf eine neue Art *absoluter Bestimmung einer Elektricitätsmenge* geführt wird, worüber folgende Bemerkung, zur Vergleichung dieser neuen Art *absoluter Bestimmung* mit den schon bekannten hier der Anwendung auf vorliegende Betrachtung wegen Platz finden möge.

Ordnet man nämlich die verschiedenen Arten *absoluter Bestimmungen* einer Elektricitätsmenge nach der Genauigkeit, welche sie in der Ausführung gestatten, so sind ohne Zweifel die *absoluten Bestimmungen auf galvanometrischem Wege* obenan zu stellen, durch welche eine als Bestandtheil des *neutralen Fluidums* vorhandene Elektricitätsmenge, die aus einem Raume in einen anderen übergegangen ist, in Theilen derjenigen Elektricitätsmenge ausgedrückt erhalten wird, welche bei der *galvanometrisch bestimmten Einheit der Stromintensität* während der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters geht. — Sodann folgen die *absoluten Bestimmungen auf dem Wege der elektrostatischen Messung*, durch welche eine vorhandene Menge *freier* Elektricität in Theilen derjenigen Elektricitätsmenge ausgedrückt erhalten wird, welche auf eine gleiche Menge in der Einheit der Entfernung nach elektrostatischem Gesetze die Einheit der Kraft ausübt. Diese Bestimmung findet nur auf *kleine* Elektricitätsmengen, welche *frei* vorkommen, im Vergleich mit den galvanometrisch bestimmten grossen im neutralen Fluidum enthaltenen Elektricitätsmengen, Anwendung. — Besonders wichtig ist die Kenntniss des Verhältnisses der diesen beiden Bestimmungsweisen zum Grunde liegenden *Maasseinheiten*, welche durch doppelte Messung einer und derselben Elektricitätsmenge sowohl auf galvanometrischem als auch auf elektrostatischem Wege gewonnen worden, nämlich des Verhältnisses $155\,370 \,.\, 10^6 : 1$ (siehe die vorhergehende Abhandlung Bd. V, S. 261).[1] — Diesen beiden *absoluten Bestimmungsweisen* kann man nun noch als *dritte* diejenige hinzufügen, nach welcher eine vorhandene Elektricitätsmenge durch ihre *Masse* in Theilen des für alle Körper festgestellten Massenmaasses (Milligramm) ausgedrückt werden soll; wobei jedoch zu bemerken ist, dass bisher auf diese Weise noch keine vorhandene Elektricitäts-

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 649.]

menge hat ausgedrückt werden können, weil noch kein Weg der Messung entdeckt worden ist, welcher auch nur näherungsweise zu einer solchen Kenntniss führte. In Folge davon mangelt auch noch gänzlich die Kenntniss des *Verhältnisses* der dieser Bestimmungsweise und den vorigen zum Grunde liegenden *Maasseinheiten*, weil keine doppelte Messung einer und derselben Elektricitätsmenge auf diese verschiedenen Weisen ausgeführt werden konnte. Wäre dieses *Verhältniss* $= r : 1$ bekannt, so würde aus der Zahl $\mathfrak{E} ds$ der elektrostatischen Maasseinheiten positiver Elektricität, die im Leiterelemente ds enthalten sind, die *Masse* dieser Elektricitätsmenge in *Milligrammen* ausgedrückt $= [1/r] \,.\, \mathfrak{E} ds$ erhalten werden.

Durch Einführung dieses Ausdrucks der *Masse* und Gleichsetzung derselben mit dem oben angegebenen *Quotienten* erhält man dann folgende Gleichung:

$$\frac{1}{\frac{d^2\sigma}{dt^2}} \cdot \left(4\mathfrak{E}^2 \log\frac{l}{a} \cdot \left[\frac{d^2\sigma}{ds^2} - \frac{2}{c^2}\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right] ds - \frac{1}{2\pi a^2 k} \cdot \mathfrak{E}^2 \cdot \frac{d\sigma}{dt} ds + \frac{1}{2}\mathfrak{E} S ds\right) = \frac{1}{r}\mathfrak{E} ds,$$

oder, geordnet und $\dfrac{c^2}{8\log\frac{l}{a} \cdot r\mathfrak{E}} = \lambda$ gesetzt,

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{c^2}{2(1+\lambda)} \cdot \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{c^2}{16\pi a^2 k \log\frac{l}{a} \cdot (1+\lambda)} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = \frac{c^2}{16\mathfrak{E}\log\frac{l}{a} \cdot (1+\lambda)} \cdot S.$$

6.

Vergleichung der Resultate.

In dieser allgemeineren Gleichung, sieht man, ist die KIRCHHOFF'sche oben entwickelte Gleichung mit enthalten, nämlich unter den beiden Voraussetzungen, dass $S = 0$ und $\lambda = 0$ sei; denn es ist alsdann

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{c^2}{2} \cdot \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{c^2}{16\pi a^2 k \log\frac{l}{a}} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = 0$$

ganz in Uebereinstimmung mit der am Schlusse des dritten Artikels entwickelten Gleichung.

Es darf hierbei bemerkt werden, dass auf diese eben entwickelte allgemeinere Gleichung und deren Uebereinstimmung mit der KIRCHHOFF'schen, unter den angegebenen Voraussetzungen, sich die von POGGENDORFF zu KIRCHHOFF's Abhandlung in den Annalen 1857, Bd. 100, S. 351 hinzugefügte Note bezieht.[1])

[1]) [Diese Note findet sich am Schlusse dieser Abhandlung unter No. VI abgedruckt.]

Die Voraussetzung, dass $S = 0$ sei, enthält nun aber nicht blos im Allgemeinen die von KIRCHHOFF vorausgeschickte Annahme, dass keine elektromotorische Kraft von aussen her auf die Elektricität im Leitungsdrahte wirken soll, sondern insbesondere auch die zweite von den im Anfang des dritten Artikels erwähnten Annahmen, dass nämlich alle von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen im ganzen Leitungsdrahte mit Ausnahme des kleinen als Cylinder betrachteten Stücks, in dessen Mitte der betrachtete Punkt liegt, herrührenden elektromotorischen Kräfte verschwindend klein seien gegen diejenigen auf denselben Punkt wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen in dem kleinen cylindrischen Stücke selbst herrühren.

Die Voraussetzung, dass $\lambda = 0$ sei, kommt dagegen mit der von KIRCHHOFF angenommenen allgemeineren Geltung des OHM'schen Gesetzes überein. Zwar könnte es scheinen, dass $\lambda = c^2/[8r . \mathfrak{E} \log l/a]$ für $\log l/a = \infty$ verschwinde, und dass also die Voraussetzung, dass $\lambda = 0$ sei, näherungsweise schon durch die KIRHHOFF'sche Annahme, dass a gegen l verschwinde, erfüllt werde; es ist dies aber nicht der Fall, sondern es wird $\lambda = \infty$, wenn a verschwindet, wie man leicht daraus ersieht, dass die Zahl der positiv elektrischen Maasseinheiten, welche in der Längeneinheit des Leitungsdrahts enthalten ist, $= \mathfrak{E}$, dem Quadrat des Halbmessers a proportional ist und, wenn man die konstante Zahl der positiv elektrischen Masseneinheiten, welche in der *Volumeneinheit des Leitungsdrahts* enthalten ist, mit $\mathfrak{E}_0$ bezeichnet, durch

$$\mathfrak{E} = \pi a^2 . \mathfrak{E}_0$$

dargestellt wird, woraus folgt, dass das Produkt $\mathfrak{E} \log l/a = \pi \mathfrak{E}_0 . a^2 \log l/a$ mit a verschwindet und also $\lambda = c^2/[8r . \mathfrak{E} \log l/a]$ unendlich wird.

Es geht daraus hervor, dass das OHM'sche Gesetz zwar näherungsweise bei *stärkeren* Leitungsdrähten, für welche a grössere Werthe hat, die von KIRCHHOFF angenommene allgemeinere Geltung haben könne, nämlich bei einem sehr kleinen Werthe des konstanten Quotienten $c^2/[r\mathfrak{E}_0]$; dass dagegen bei *feineren* Leitungsdrähten, zumal wenn diese Verfeinerung so weit getrieben werden soll, dass $\log l/a$ eine sehr grosse Zahl werde, das OHM'sche Gesetz diese allgemeinere Geltung verlieren müsse, wonach also das oben ausgesprochene Bedenken über die Unvereinbarkeit der beiden im Anfang des dritten Artikels unter (1) und (3) angeführten Annahmen wohl begründet erscheint.

Es leuchtet dagegen umgekehrt ein, dass, wenn auf dem Wege der Beobachtung Fälle von feineren Leitungsdrähten nachgewiesen werden könnten, wo dem OHM'schen Gesetz diese allgemeinere Geltung nicht zukäme, sondern messbare Abweichungen hervorträten, aus denen λ

bestimmbar würde, so würde dadurch eine Kenntniss des konstanten Quotienten $c^2/[r\mathfrak{E}_0] = 8\pi a^2 \log l/a \,.\, \lambda$ gewonnen, und die Kenntniss des Verhältnisses $r:1$, d. i. der Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten, welche auf 1 Milligramm gehen, würde blos noch von der Erforschung der Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten $\mathfrak{E}_0$ abhängen, welche in 1 Kubikmillimeter des Leiters enthalten sind.

7.

Entwicklung des Ausdrucks der elektromotorischen Kraft, welche auf einen Punkt eines geschlossenen linearen Leiters von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen im ganzen Leiter, mit Ausnahme desjenigen Elements, in welchem der betrachtete Punkt liegt, ausgeübt wird.

Wenn man die auf einen Punkt s des Leitungsdrahts aus der Ferne wirkenden Kräfte, welche sich nicht bestimmen liessen, sowohl diejenigen, welche von entfernteren Theilen des Leitungsdrahts selbst, als auch diejenigen, welche von aussen her wirken, $= 0$ setzte, so ergab sich nach den Entwicklungen der vorhergehenden Artikel übereinstimmend folgende partielle Differentialgleichung für die Verschiebung σ des positiv elektrischen Theilchens im Punkte s:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - a\frac{d^2\sigma}{ds^2} + b\frac{d\sigma}{dt} = 0,$$

wobei nur der Unterschied Statt fand, dass die Bedeutung der konstanten Koefficienten a und b in dieser Gleichung nach Art. 3 von der nach Art. 6 ihnen zukommenden etwas verschieden war, ein Unterschied, der möglicher Weise aber gar nicht in Betracht kommt, wenn nämlich die Erfahrung ergeben sollte, dass der im vorigen Artikel mit $c^2/[r\mathfrak{E}_0]$ bezeichnete Quotient für alle Arten von Leitern einen verschwindend kleinen Werth hätte.

Diese Uebereinstimmung macht aber obige Gleichung noch keineswegs geeignet, die Bewegungen der Elektricität in einem Leitungsdrahte wirklich zu bestimmen; denn wenn es auch Fälle geben kann, wo keine elektromotorischen Kräfte von aussen her auf die Elektricität im Leitungsdrahte wirken, so kann es doch keinen Fall geben, wo auch keine elektromotorischen Kräfte von den ferner liegenden Theilen des Leitungsdrahts selbst ausgeübt würden, wenn darin irgend eine Störung des Gleichgewichts der Elektricität Statt gefunden hat. Um daher zu einer Gleichung zu gelangen, die zur Bestimmung der Bewegungen der Elektricität in einem Leitungsdrahte wirklich dienen kann, reicht die Art. 2

gegebene Entwicklung der elektromotorischen Kräfte, welche auf einen Punkt s des Leitungsdrahts von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen des einzigen Elements ds, zu welchem der Punkt s gehört, ausgeübt werden, nicht hin, sondern es müssen auch diejenigen elektromotorischen Kräfte noch entwickelt werden, welche auf den Punkt s von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen in allen übrigen Theilen des Leitungsdrahts ausgeübt werden. Es bedürfen daher die aus obiger Gleichung von KIRCHHOFF abgeleiteten Folgerungen noch einer Prüfung in Beziehung auf den Einfluss dieser letzteren Kräfte.

Für die Entwicklung dieser Kräfte genügt es nun zwar, da es sich um Elemente ds, ds' des Leitungsdrahts handelt, deren Dimensionen gegen ihre Entfernung verschwindet, die Dichtigkeiten der freien Elektricität und die Stromintensitäten in denselben blos nach ihren Gesammtwerthen für den ganzen Querschnitt E, E', i, i' zu betrachten, die blosse Funktionen von s und t oder von s' und t' sind. Es lassen sich diese Funktionen aber in Beziehung auf s oder s', wie von selbst einleuchtet, nicht wie die in Art. 2, nach dem TAYLOR'schen Lehrsatze in Reihen entwickeln, da dieselben im ersten Augenblick $t = 0$ ganz willkürlich gegeben sein können, sondern man muss dieselben in Sinus- und Kosinusreihen darzustellen suchen.

Setzt man also für einen geschlossenen Leitungsdraht von der Länge $2\pi a$

$$E' = \Sigma\left(a_n \sin\frac{ns'}{a} + b_n \cos\frac{ns'}{a}\right),$$

$$i' = \Sigma\left(c_n \sin\frac{ns'}{a} + \partial_n \cos\frac{ns'}{a}\right),$$

worin für n der Reihe nach alle ganzen Zahlen zu setzen sind, so ergiebt sich nach Art. 1, wenn man die Entfernung der Punkte s und s' von einander mit r bezeichnet, und die Winkel, welche ds und ds' mit der Richtung von r bilden, mit ϑ und ϑ',

$$\Omega = \int\frac{E'ds'}{r} = \int\frac{ds'}{r}\Sigma\left(a_n \sin\frac{ns'}{a} + b_n \cos\frac{ns'}{a}\right),$$

$$U = \int\frac{ds'}{r}\cos\vartheta\cos\vartheta' \cdot i' = \int\frac{ds'}{r}\cos\vartheta\cos\vartheta' \cdot \Sigma\left(c_n \sin\frac{ns'}{a} + \partial_n \cos\frac{ns'}{a}\right).$$

Ausserdem hat man noch die Art. 3 gefundene Gleichung

$$\frac{di'}{ds'} = -\frac{1}{2}\frac{dE'}{dt},$$

oder, durch Sinus- und Kosinusreihen ausgedrückt,

$$\frac{1}{a}\Sigma n\left(c_n\cos\frac{ns'}{a}-\partial_n\sin\frac{ns'}{a}\right)=-\tfrac{1}{2}\Sigma\left(\frac{da_n}{dt}\cdot\sin\frac{ns'}{a}+\frac{db_n}{dt}\cos\frac{ns'}{a}\right).$$

Es folgt hieraus, da diese Gleichung für alle Werthe von s' gelten soll,

$$c_n=-\frac{a}{2n}\cdot\frac{db_n}{dt},$$

$$\partial_n=+\frac{a}{2n}\cdot\frac{da_n}{dt}.$$

Soll nun aus den gefundenen Ausdrücken für Ω und U die elektromotorische Kraft bestimmt werden, welche auf den Punkt s des geschlossenen Leitungsdrahts wirkt, so setze man $s'-s=\sigma$, und substituire $s+\sigma$ für s' und $d\sigma$ für ds' in den Ausdrücken von Ω und U. Man erhält alsdann

$$\Omega=\Sigma\int\frac{d\sigma}{r}\left(a_n\sin\left(\frac{n\sigma}{a}+\frac{ns}{a}\right)+b_n\cos\left(\frac{n\sigma}{a}+\frac{ns}{a}\right)\right),$$

$$U=\Sigma\int\frac{d\sigma}{r}\cos\vartheta\cos\vartheta'\cdot\left(c_n\sin\left(\frac{n\sigma}{a}+\frac{ns}{a}\right)+\partial_n\cos\left(\frac{n\sigma}{a}+\frac{ns}{a}\right)\right).$$

Entwickelt man hierin den Sinus und Kosinus der Summe, so erhält man

$$\Omega=\Sigma\left(a_n\cos\frac{ns}{a}-b_n\sin\frac{ns}{a}\right)\cdot\int\frac{\sin\frac{n\sigma}{a}\cdot d\sigma}{r}$$

$$+\Sigma\left(a_n\sin\frac{ns}{a}+b_n\cos\frac{ns}{a}\right)\cdot\int\frac{\cos\frac{n\sigma}{a}\cdot d\sigma}{r}.$$

$$U=\Sigma\left(c_n\cos\frac{ns}{a}-\partial_n\sin\frac{ns}{a}\right)\cdot\int\frac{\cos\vartheta\cos\vartheta'\sin\frac{n\sigma}{a}\,d\sigma}{r}$$

$$+\Sigma\left(c_n\sin\frac{ns}{a}+\partial_n\cos\frac{ns}{a}\right)\cdot\int\frac{\cos\vartheta\cos\vartheta'\cos\frac{n\sigma}{a}\,d\sigma}{r}.$$

Hierin sind r, $\cos\vartheta$ und $\cos\vartheta'$ Funktionen von σ, welche sich aus der Gleichung der Kurve des Leitungsdrahts ergeben. Es folgt daraus, dass für jede Stellenzahl n die vier zwischen den Grenzen von $\sigma=\frac{1}{2}l$ bis $\sigma=2\pi a-\frac{1}{2}l$ (wenn l die Länge desselben Stücks des Leitungsdrahts wie Art. 2 bezeichnet) zu nehmenden Integrale

$$\int\frac{\sin\frac{n\sigma}{a}d\sigma}{r},\quad\int\frac{\cos\frac{n\sigma}{a}d\sigma}{r},\quad\int\frac{\cos\vartheta\cos\vartheta'\sin\frac{n\sigma}{a}d\sigma}{r},\quad\int\frac{\cos\vartheta\cos\vartheta'\cos\frac{n\sigma}{a}d\sigma}{r}$$

durch die Gestalt der Leiterkurve gegeben und bestimmt sind, deren Werthe daher kurz mit

$$N,\ N',\ M,\ M'$$

bezeichnet werden sollen. Man hat alsdann

$$\Omega = \Sigma\left((a_n N' - b_n N)\sin\frac{ns}{a} + (a_n N + b_n N')\cos\frac{ns}{a}\right),$$

$$U = \Sigma\left((c_n M' - \partial_n M)\sin\frac{ns}{a} + (c_n M + \partial_n M')\cos\frac{ns}{a}\right),$$

woraus nun die elektromotorischen Kräfte bestimmt werden können, nämlich

$$-2\frac{d\Omega}{ds} = -\frac{2}{a}\Sigma n\left((a_n N' - b_n N)\cos\frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N')\sin\frac{ns}{a}\right),$$

$$-\frac{8}{c^2}\cdot\frac{dU}{dt} = -\frac{8}{c^2}\Sigma\left(\left(\frac{dc_n}{dt}\cdot M' - \frac{d\partial_n}{dt}\cdot M\right)\sin\frac{ns}{a} + \left(\frac{dc_n}{dt}\cdot M + \frac{d\partial_n}{dt}\cdot M'\right)\cos\frac{ns}{a}\right),$$

oder, wenn in der letzteren Gleichung die oben gefundenen Werthe von c_n und ∂_n substituirt werden,

$$-\frac{8}{c^2}\cdot\frac{dU}{dt} = +\frac{4a}{c^2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\cdot M' + \frac{d^2a_n}{dt^2}\cdot M\right)\sin\frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\cdot M - \frac{d^2a_n}{dt^2}\cdot M'\right)\cos\frac{ns}{a}\right).$$

8.

Bewegungsgleichung der Elektricität in einem geschlossenen Leiter.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung der Elektricität in einem geschlossenen Leiter auf dem Art. 4 bis 5 bezeichneten Wege sind zunächst alle Kräfte aufzuzählen, welche auf die positive Elektricität in einem Elemente ds des Leitungsdrahts wirken und die Grösse dieser Kräfte nach mechanischem Maasse auszudrücken.

1. Die *aus der Nähe* auf den Punkt s des Leitungsdrahts wirkenden elektromotorischen Kräfte sind am Schlusse von Art. 2 gefunden worden:

$$-2\frac{d\Omega}{ds} = -4\frac{dE}{ds}\cdot\log\frac{l}{a} - \frac{1}{4}\frac{d^3E}{ds^3}\cdot l^2,$$

$$-\frac{8}{c^2}\frac{dU}{dt} = -\frac{16}{c^2}\frac{di}{dt}\cdot\log\frac{l}{ea} - \frac{1}{c^2}\frac{d^3i}{ds^2dt}\cdot l^2.$$

Hierin kann nun aber nach dem vorhergehenden Artikel

$$E = \Sigma\left(a_n\sin\frac{ns}{a} + b_n\cos\frac{ns}{a}\right),$$

$$i = -\frac{a}{2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\cdot\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cdot\cos\frac{ns}{a}\right)$$

substituirt werden, folglich

$$-2\frac{d\Omega}{ds}=-\frac{4}{a}\Sigma\left(n\log\frac{l}{a}-\frac{1}{16}\frac{n^3l^2}{a^2}\right)\left(a_n\cos\frac{ns}{a}-b_n\sin\frac{ns}{a}\right),$$

$$-\frac{8}{c^2}\frac{dU}{dt}=\frac{8}{c^2}\Sigma\left(\frac{a}{n}\log\frac{l}{ea}-\frac{1}{16}\frac{nl^2}{a}\right)\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\cdot\sin\frac{ns}{a}-\frac{d^2a_n}{dt^2}\cdot\cos\frac{ns}{a}\right).$$

2. Die *aus der Ferne* auf den Punkt s des Leitungsdrahts wirkenden elektromotorischen Kräfte sind am Schlusse des vorhergehenden Artikels gefunden worden:

$$-2\frac{d\Omega}{ds}=-\frac{2}{a}\Sigma n\left((a_nN'-b_nN)\cos\frac{ns}{a}-(a_nN+b_nN')\sin\frac{ns}{a}\right),$$

$$-\frac{8}{c^2}\frac{dU}{dt}=+\frac{4a}{c^2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\cdot M'+\frac{d^2a_n}{dt^2}\cdot M\right)\sin\frac{ns}{a}+\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\cdot M-\frac{d^2a_n}{dt^2}\cdot M'\right)\cos\frac{ns}{a}\right).$$

Aus der Nähe und aus der Ferne zusammen genommen sind also die elektromotorischen Kräfte, wenn

$$N'+2\log\frac{l}{a}-\frac{1}{8}\frac{n^2l^2}{a^2}=N'',$$

$$M'+2\log\frac{l}{ea}-\frac{1}{8}\frac{n^2l^2}{a^2}=M''$$

gesetzt wird,

$$-2\frac{d\Omega}{ds}=-\frac{2}{a}\Sigma n\left((a_nN''-b_nN)\cos\frac{ns}{a}-(a_nN+b_nN'')\sin\frac{ns}{a}\right),$$

$$-\frac{8}{c^2}\frac{dU}{dt}=+\frac{4a}{c^2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\cdot M''+\frac{d^2a_n}{dt^2}\cdot M\right)\sin\frac{ns}{a}+\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\cdot M-\frac{d^2a_n}{dt^2}\cdot M''\right)\cos\frac{ns}{a}\right).$$

Diese elektromotorischen Kräfte sind nun die Differenzen derjenigen Kräfte, welche auf die positive und negative elektrische Maasseinheit in dem Punkte s wirken. Da aber die auf die positive Maasseinheit wirkende Kraft der auf die negative Maasseinheit wirkenden, abgesehen von ihrer entgegengesetzten Richtung, gleich ist, so folgt hieraus, dass die Hälften jener elektromotorischen Kräfte diejenigen Kräfte sind, welche auf jede positive elektrische Maasseinheit im Punkte s wirken. Die Zahl der positiv elektrischen Maasseinheiten, welche in dem Längenelemente ds des Leitungsdrahts enthalten sind, ist aber Art. 3 mit $\mathfrak{E}ds$ bezeichnet worden; multiplicirt man daher die Hälfte der obigen elektromotorischen Kräfte mit $\mathfrak{E}ds$, so findet man die Kräfte, welche auf die positive Elektricität im Elemente ds wirken, nach mechanischem Maasse ausgedrückt,

$$= -\frac{\mathfrak{E}ds}{a}\Sigma n\left((a_nN''-b_nN)\cos\frac{ns}{a}-(a_nN+b_nN'')\sin\frac{ns}{a}\right)$$

$$+\frac{2a\mathfrak{E}ds}{c^2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\cdot M''+\frac{d^2a_n}{dt^2}\cdot M\right)\sin\frac{ns}{a}+\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\cdot M-\frac{d^2a_n}{dt^2}\cdot M''\right)\cos\frac{ns}{a}\right).$$

3. Die von den *ponderablen Leitertheilchen* herrührende Widerstandskraft, welche auf die positive Elektricität im Elemente ds wirkt, war Art. 5 nach mechanischem Maasse ausgedrückt gefunden worden

$$= -\frac{1}{2\pi a^2 k}\cdot\mathfrak{E}^2\cdot\frac{d\sigma}{dt}ds,$$

worin

$$\frac{\mathfrak{E}d\sigma}{dt}=i=-\frac{a}{2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\cdot\sin\frac{ns}{a}-\frac{da_n}{dt}\cdot\cos\frac{ns}{a}\right),$$

wonach diese Kraft erhalten wird:

$$= +\frac{a\mathfrak{E}ds}{4\pi a^2 k}\cdot\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\cdot\sin\frac{ns}{a}-\frac{da_n}{dt}\cdot\cos\frac{ns}{a}\right).$$

Hierzu kommt endlich

4. die *von aussen* her auf die positive Elektricität im Elemente ds wirkende Kraft, welche nach Art. 5 (3)

$$= +\tfrac{1}{2}\mathfrak{E}Sds$$

erhalten wird, wenn S hierin nur die von aussen auf den Punkt s ausgeübte elektromotorische Kraft bezeichnet. Wird nun S in Sinus- und Kosinusreihen entwickelt

$$S=\Sigma\left(f_n\sin\frac{ns}{a}+g_n\cos\frac{ns}{a}\right),$$

so wird diese Kraft dargestellt

$$= +\tfrac{1}{2}\mathfrak{E}ds\,.\,\Sigma\left(f_n\sin\frac{ns}{a}+g_n\cos\frac{ns}{a}\right).$$

Da nun alle diese Kräfte nach *mechanischem Maasse*, d. h. in Theilen derjenigen Kraft ausgedrückt sind, welche der ponderablen Masseneinheit (Milligramm) in der Zeiteinheit (Sekunde) die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt, so folgt daraus nach dem bekannten für alle Körper gültigen Bewegungsgesetze, dass der Quotient aus der Summe aller dieser Kräfte dividirt durch die von ihnen der positiven Elektricität im Elemente ds, auf die sie wirken, ertheilte Beschleunigung, $=d^2\sigma/dt^2$, die Definition der *Masse* dieser Elektricitätsmenge, in dem für alle Körper festgesetzten Massenmaasse (Milligramm) ausgedrückt, ist, welche Art. 5 durch $[1/r]\,\mathfrak{E}ds$ Milligramm bezeichnet worden. Multiplicirt man die so erhaltene Gleichung mit $[1/\mathfrak{E}ds]\,.\,[d^2\sigma/dt^2]$ und setzt

$$\mathfrak{E}\frac{d^2\sigma}{dt^2}=\frac{di}{dt}=-\frac{a}{2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\sin\frac{ns}{a}-\frac{d^2a_n}{dt^2}\cos\frac{ns}{a}\right),$$

so erhält man die gesuchte Bewegungsgleichung der Elektricität in einem geschlossenen Leitungsdrahte in folgender Gestalt:

$$-\frac{1}{a}\Sigma n\left((a_n N''-b_n N)\cos\frac{ns}{a}-(a_n N+b_n N'')\sin\frac{ns}{a}\right)$$

$$+\frac{2a}{c^2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\cdot M''+\frac{d^2a_n}{dt^2}\cdot M\right)\sin\frac{ns}{a}+\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\cdot M-\frac{d^2a_n}{dt^2}\cdot M''\right)\cos\frac{ns}{a}\right)$$

$$+\frac{a}{4\pi a^2k}\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a}-\frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)+\tfrac{1}{2}\Sigma\left(f_n\sin\frac{ns}{a}+g_n\cos\frac{ns}{a}\right)$$

$$=-\frac{a}{2r\mathfrak{E}}\cdot\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\sin\frac{ns}{a}-\frac{d^2a_n}{dt^2}\cos\frac{ns}{a}\right).$$

Da N, N'', M, M'' blos von der Gleichung der Leiterkurve abhängen, so können sie als Funktionen von s dargestellt werden. In dem einzigen Falle, wenn jene Kurve ein *Kreis* ist, hat jede von diesen Grössen einen für alle Punkte s *gleichen Werth* und es lässt sich dann die obige Gleichung in die folgenden beiden einfacheren Gleichungen auflösen, nämlich, wenn $c^2/[4M''r\mathfrak{E}]=\lambda$ gesetzt wird,

$$\frac{d^2a_n}{dt^2}+\frac{c^2}{8\pi a^2kM''(1+\lambda)}\cdot\frac{da_n}{dt}+\frac{n^2c^2N''}{2a^2M''(1+\lambda)}\cdot a_n-\frac{nc^2}{4aM''(1+\lambda)}\cdot g_n$$
$$=\frac{M}{M''(1+\lambda)}\cdot\frac{d^2b_n}{dt^2}+\frac{n^2c^2N}{2a^2M''(1+\lambda)}\cdot b_n,$$

$$\frac{d^2b_n}{dt^2}+\frac{c^2}{8\pi a^2kM''(1+\lambda)}\cdot\frac{db_n}{dt}+\frac{n^2c^2N''}{2a^2M''(1+\lambda)}\cdot b_n+\frac{nc^2}{4aM''(1+\lambda)}\cdot f$$
$$=-\frac{M}{M''(1+\lambda)}\cdot\frac{d^2a_n}{dt^2}-\frac{n^2c^2N}{2a^2M''(1+\lambda)}\cdot a_n.$$

Es wird hierdurch die Betrachtung des Falls einer *kreisförmigen Leiterkurve* sehr vereinfacht und verdient deshalb besondere Berücksichtigung. In allen anderen Fällen würden, bei weiterer Entwickelung, N, N'', M, M'' als Funktionen von s ebenfalls in Sinus- und Kosinusreihen dargestellt werden müssen, wodurch die Gleichungen sehr an Einfachheit verlören.

9.

Gleichung für die Mittelwerthe der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten in geschlossenen Leitern von beliebiger Gestalt.

Es kommen häufig Betrachtungen und Anwendungen geschlossener Ketten vor, für welche die Kenntniss der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten in einzelnen Punkten der Kette nicht erfordert wird,

sondern die Kenntniss ihres *Mittelwerths* für die ganze Länge des Leitungsdrahts genügt. Bevor daher auf eine speciellere Entwickelung der Bewegungsgesetze der Elektricität in einem *kreisförmigen* Leitungsdrahte eingegangen wird, sollen die eben gefundenen angewendet werden, um die Gleichung für die *Mittelwerthe* der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten in geschlossenen Leitern *von beliebiger Gestalt* daraus abzuleiten.

Diese Gleichung ergiebt sich, wenn man die Glieder der im vorigen Artikel gefundenen allgemeinen Gleichung mit ds multiplicirt und sie sodann von $s = 0$ bis $s = 2\pi a$ integrirt. Sie vereinfacht sich aber wesentlich dadurch, dass *erstens* der Integralwerth der elektromotorischen Kräfte, welche von der freien Elektricität im Leitungsdrahte herrühren, nach einem bekannten Theoreme stets Null ist, und dass *zweitens* der Integralwerth der von aussen herrührenden elektromotorischen Kräfte in der Regel als gegeben betrachtet werden darf. Man erhält hiernach *erstens*

$$\int_0^{2\pi a} \frac{ds}{a} \Sigma n \left((a_n N'' - b_n N) \cos \frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N'') \sin \frac{ns}{a}\right) = 0,$$

zweitens, wenn der gegebene Integralwerth der von aussen herrührenden elektromotorischen Kräfte mit S bezeichnet wird,

$$\int_0^{2\pi a} ds\, \Sigma \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right) = S.$$

Da nun ferner, wenn

$$i_n = -\frac{a}{2n}\left(\frac{db_n}{dt} \cdot \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cdot \cos \frac{ns}{a}\right)$$

gesetzt wird, $i = \Sigma i_n$ war; so ergiebt sich

$$\int ds \cdot \frac{2a}{c^2} \Sigma \frac{1}{n} \left(\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} M'' + \frac{d^2 a_n}{dt^2} M\right) \sin \frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} M - \frac{d^2 a_n}{dt^2} M''\right) \cos \frac{ns}{a}\right)$$

$$= -\frac{4}{c^2} \int ds\, \Sigma M'' \frac{di_n}{dt} - \frac{4a}{c^2} \Sigma \frac{1}{n} \int \frac{d^2 i_n}{ds\,dt} M ds.$$

Nun ist

$$\int \frac{d^2 i_n}{ds\,dt} M ds = M \frac{di_n}{dt} - \int \frac{di_n}{dt} \cdot \frac{dM}{ds} ds;$$

folglich

$$\int_0^{2\pi a} \frac{d^2 i_n}{ds\,dt} M ds = -\int_0^{2\pi a} \frac{di_n}{dt} \cdot \frac{dM}{ds} ds,$$

wonach also

$$\int_0^{2\pi a} ds \cdot \frac{2a}{c^2} \Sigma \frac{1}{n} \left(\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} M'' + \frac{d^2 a_n}{dt^2} M \right) \sin \frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} M - \frac{d^2 a_n}{dt^2} M'' \right) \cos \frac{ns}{a} \right)$$

$$= -\frac{4}{c^2} \int_0^{2\pi a} ds\, \Sigma M'' \frac{di_n}{dt} + \frac{4a}{c^2} \Sigma \frac{1}{n} \int_0^{2\pi a} \frac{di_n}{dt} \cdot \frac{dM}{ds} ds.$$

Fügt man endlich hinzu, dass

$$\int \frac{a ds}{4\pi a^2 k} \Sigma \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) = -\frac{1}{2\pi a^2 k} \cdot \int i ds,$$

$$\int \frac{a ds}{2 r \mathfrak{E}} \Sigma \frac{1}{n} \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \sin \frac{ns}{a} - \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cos \frac{ns}{a} \right) = -\frac{1}{r \mathfrak{E}} \cdot \int \frac{di}{dt} ds,$$

so erhält man folgende Gleichung für die Mittelwerthe der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten $\frac{1}{2\pi a} \cdot S$ und $\frac{1}{2\pi a} \cdot \int_0^{2\pi a} i ds$:

$$S = \frac{1}{\pi a^2 k} \cdot \int_0^{2\pi a} i ds + \frac{8}{c^2} \int_0^{2\pi a} ds\, \Sigma M'' \frac{di_n}{dt} - \frac{8a}{c^2} \Sigma \frac{1}{n} \int_0^{2\pi a} \frac{di_n}{dt} \cdot \frac{dM}{ds} ds + \frac{2}{r \mathfrak{E}} \int_0^{2\pi a} \frac{di}{dt} ds.$$

Diese Mittelwerthe kommen nun offenbar dann vorzüglich in Betracht, wenn in den verschiedenen Elementen des Leitungsdrahts entweder gar keine Verschiedenheit der elektrischen Bewegung Statt findet, oder eine so geringe, dass sie ganz vernachlässigt werden kann. In allen diesen Fällen sind also i und di/dt von s unabhängige Grössen, und es kann $i = i_0$, $di/dt = di_0/dt$, folglich, für $n > 0$, $di_n/dt = 0$ gesetzt werden, wonach

$$S = \frac{2\pi a}{\pi a^2 k} i_0 + \left(\frac{8}{c^2} \int_0^{2\pi a} M''_0 ds + \frac{4\pi a}{r \mathfrak{E}} \right) \frac{di_0}{dt},$$

wo $2\pi a / [\pi a^2 k] = w$ der Widerstand der ganzen Kette ist. Setzt man hierin

$$\frac{8}{c^2} \int_0^{2\pi a} M''_0 ds + \frac{4\pi a}{r \mathfrak{E}} = p$$

und schreibt i für i_0, so erhält man

$$S = wi + p \frac{di}{dt},$$

worin S, i und di/dt blos Funktionen der Zeit t sind. Durch Integration erhält man daraus

$$i = \frac{1}{p} e^{-\frac{w}{p} t} \cdot \int e^{\frac{w}{p} t} \cdot S dt.$$

10.

Bewegungsgesetze der Elektricität in einem kreisförmigen Leitungsdrahte.

Wenn die Form eines geschlossenen Leiters gegeben ist, so lassen sich die Werthe von N, N', M, M', d. h. die Werthe der bestimmten Integrale

$$\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}, \quad \int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}, \quad \int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\cos\vartheta \cos\vartheta' \sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}, \quad \int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\cos\vartheta \cos\vartheta' \cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r},$$

für jeden Punkt s des Leiters bestimmen. Zum Beispiel diene nun ein Leiter von der Form eines Kreises, dessen Halbmesser $= a$ ist.

Bei dieser Kreisform ist der Abstand r zweier Punkte s und s' gleich der Sehne des Bogens $(s' - s)/a = \sigma/a$; es ist also

$$r = 2a \sin \frac{\sigma}{2a}.$$

Ferner ist der Winkel ϑ, welchen das Element ds mit r bildet, dem Winkel ϑ' gleich, welchen das Element ds' mit r bildet, und beide sind dem Winkel gleich, welchen die Tangente des Kreises im Punkte s mit der Sehne des Bogens σ/a bildet, d. i.

$$\vartheta = \vartheta' = \frac{\sigma}{2a}.$$

Hieraus ergiebt sich also

$$N = \frac{1}{2a} \int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{\sin \frac{\sigma}{2a}}, \qquad N' = \frac{1}{2a} \int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{\sin \frac{\sigma}{2a}},$$

$$M = \frac{1}{2a}\int\limits_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\left(\cos\frac{\sigma}{2a}\right)^2 \cdot \sin\frac{n\sigma}{a}\, d\sigma}{\sin\frac{\sigma}{2a}} = N - \frac{1}{2a}\int\limits_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \sin\frac{n\sigma}{a}\sin\frac{\sigma}{2a}\, d\sigma,$$

$$M' = \frac{1}{2a}\int\limits_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\left(\cos\frac{\sigma}{2a}\right)^2 \cdot \cos\frac{n\sigma}{a}\, d\sigma}{\sin\frac{\sigma}{2a}} = N' - \frac{1}{2a}\int\limits_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \cos\frac{n\sigma}{a}\sin\frac{\sigma}{2a}\, d\sigma.$$

Setzt man nun $\sigma/2a = z$, also

$$N = \int\limits_{\frac{l}{4a}}^{\pi - \frac{l}{4a}} \frac{\sin 2nz\,.\,dz}{\sin z}, \qquad N' = \int\limits_{\frac{l}{4a}}^{\pi - \frac{l}{4a}} \frac{\cos 2nz\,.\,dz}{\sin z},$$

$$M = N - \int\limits_{\frac{l}{4a}}^{\pi - \frac{l}{4a}} \sin 2nz\,.\,\sin z dz, \qquad M' = N' - \int\limits_{\frac{l}{4a}}^{\pi - \frac{l}{4a}} \cos 2nz\,.\,\sin z dz,$$

und beachtet dabei, dass

$$\int \frac{\sin 2nz\,.\,dz}{\sin z} = +2\int\cos(2n-1)z \cdot dz + 2\int\cos(2n-3)z \cdot dz + \cdots + 2\int\cos z dz,$$

$$\int \frac{\cos 2nz\,.\,dz}{\sin z} = -2\int\sin(2n-1)z \cdot dz - 2\int\sin(2n-3)z \cdot dz - \cdots - 2\int\sin z dz + \int\frac{dz}{\sin z}$$

ist, so findet man, wenn man alle Integrale zwischen den Grenzen von $z = l/4a$ bis $z = \pi - [l/4a]$ nimmt,

$$N = 0,$$

$$N' = -4\left(\cos\frac{l}{4a} + \tfrac{1}{3}\cos\frac{3l}{4a} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)l}{4a}\right) - 2\log\operatorname{tang}\frac{l}{8a}.$$

Ferner findet man, da

$$\int \sin 2nz \,.\, \sin z\, dz = \frac{1}{2(2n-1)} \sin(2n-1)z - \frac{1}{2(2n+1)} \sin(2n+1)z,$$

$$\int \cos 2nz \,.\, \sin z\, dz = \frac{1}{2(2n-1)} \cos(2n-1)z - \frac{1}{2(2n+1)} \cos(2n+1)z,$$

wenn auch diese Integrale zwischen den Grenzen von $z = l/4a$ bis $z = \pi - [l/4a]$ genommen werden,

$$M = 0,$$
$$M' = N' + \frac{1}{2n+1} \cos(2n+1)\frac{l}{4a} - \frac{1}{2n-1} \cos(2n-1)\frac{l}{4a}\,.$$

Hieraus folgt endlich nach Art. 8

$$N'' = -4\left(\cos\frac{l}{4a} + \tfrac{1}{3}\cos\frac{3l}{4a} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)\frac{l}{4a}\right)$$
$$-2\log\operatorname{tang}\frac{l}{8a} + 2\log\frac{l}{a} - \frac{1}{8}\frac{n^2 l^2}{a^2},$$

$$M'' = -4\left(\cos\frac{l}{4a} + \tfrac{1}{3}\cos\frac{3l}{4a} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)\frac{l}{4a}\right)$$
$$-2\log\operatorname{tang}\frac{l}{8a} + 2\log\frac{l}{ea} - \frac{1}{8}\frac{n^2 l^2}{a^2},$$
$$+ \frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)\frac{l}{4a} - \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)\frac{l}{4a}\,.$$

Es bezeichnet aber hierin l die Länge des als geradlinig betrachteten Leiterelements ds, in dessen Mitte der betrachtete Punkt s liegt. Diese Länge ist innerhalb gewisser Grenzen willkürlich, nur ist die Wahl derselben dadurch beschränkt, dass sowohl a/l als auch l/a als verschwindend kleine Brüche müssen betrachtet werden können, was der Fall sein muss, wenn der Leiter als ein *linearer* betrachtet werden soll. Die Verschiedenheit der Werthe von l, die innerhalb dieser Grenzen möglich sind, hat auf die Werthe von N'' und M'' keinen merklichen Einfluss. Es kann daher

$$l = \sqrt{\alpha a}$$

gesetzt werden, da dieser Werth bei jedem als *linear* zu betrachtenden Leiter innerhalb der angegebenen Grenzen liegen muss. Zugleich leuchtet ein, dass alsdann auch $l/8a$ für tang $l/8a$ gesetzt werden kann. Setzt man noch Kürze halber

$$\frac{n^2 a}{8\alpha} = 2 \log \nu,$$

$$\frac{n^2 a}{8\alpha} + \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{a}{\alpha}} - \frac{1}{2n+1} \cos \frac{2n+1}{4} \sqrt{\frac{a}{\alpha}} = 2 \log \mu,$$

so ergiebt sich

$$N'' = -4 \left(\cos \tfrac{1}{4} \sqrt{\frac{a}{\alpha}} + \tfrac{1}{3} \cos \tfrac{3}{4} \sqrt{\frac{a}{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{a}{\alpha}} \right) + 2 \log \frac{8a}{\nu \alpha},$$

$$M'' = -4 \left(\cos \tfrac{1}{4} \sqrt{\frac{a}{\alpha}} + \tfrac{1}{3} \cos \tfrac{3}{4} \sqrt{\frac{a}{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{a}{\alpha}} \right) + 2 \log \frac{8a}{\mu e \alpha}.$$

Substituirt man nun die hier für einen kreisförmigen Leiter gefundenen Werthe von N, N'', M, M'' in die Gleichungen am Schlusse des 8. Artikels so erhält man für die Bewegungen der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter folgende beiden Gleichungen

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \frac{c^2}{8\pi \alpha^2 k M''(1+\lambda)} \cdot \frac{d a_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2 a^2 M''(1+\lambda)} \cdot a_n - \frac{n c^2}{4 a M''(1+\lambda)} \cdot g_n = 0,$$

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} + \frac{c^2}{8\pi \alpha^2 k M''(1+\lambda)} \cdot \frac{d b_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2 a^2 M''(1+\lambda)} \cdot b_n + \frac{n c^2}{4 a M''(1+\lambda)} \cdot f_n = 0,$$

worin N'' und M'' die eben angegebenen Werthe haben.

11.

Gleichgewicht der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter.

Für den Fall des Gleichgewichts der Elektricität hat man in allen Theilen des Leiters

$$i = 0 \text{ und } \frac{di}{dt} = 0.$$

Setzt man für i seinen Werth aus Art. 8 (3), so erhält man

$$-\frac{a}{2} \Sigma \frac{1}{n} \left(\frac{d b_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{d a_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) = 0,$$

$$-\frac{a}{2} \Sigma \frac{1}{n} \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \sin \frac{ns}{a} - \frac{d^2 a_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{d a_n}{dt} = 0, \quad \frac{d b_n}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 a_n}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 b_n}{dt^2} = 0,$$

wozu noch hinzuzufügen ist, dass $[1/n]\,[da_n/dt] = [1/n]\,[d^2a_n/dt^2] = 0$ sein müsse auch für $n = 0$.

Die am Schlusse des vorhergehenden Artikels aufgestellten Bewegungsgleichungen gehen dann in folgende *Gleichgewichtsgleichungen* über, nämlich, wenn $n > 0$ ist,

$$\frac{nN''}{a}\cdot a_n - \tfrac{1}{2}g_n = 0\,,$$

$$\frac{nN''}{a}\cdot b_n + \tfrac{1}{2}f_n = 0\,,$$

wozu noch $g_0 = 0$ hinzukommt. Es folgt hieraus als Bedingung des Gleichgewichts der Elektricität, dass die Summe aller auf den kreisförmigen Leiter von aussen wirkenden elektromotorischen Kräfte, nämlich

$$S = \int ds\, \Sigma\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right) = 0$$

sein müsse, ganz in Uebereinstimmung mit dem bekannten Ohm'schen Gesetze, wonach die Stromintensität der Summe dieser Kräfte proportional ist und daher nur zugleich mit dieser Summe Null werden kann.

12.

Beharrliche Strömungen der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter.

Eine *beharrliche* Strömung wird die Bewegung der Elektricität in einem Leiter genannt, wenn sie in jedem Punkte des Leiters immer gleich bleibt. Sie ist nur in einem geschlossenen Leiter möglich. Findet also eine solche *beharrliche* Strömung Statt, so hat man für alle Punkte des geschlossenen Leiters

$$i = \text{Konst},$$

folglich

$$\frac{di}{dt} = -\frac{a}{2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\sin\frac{ns}{a} - \frac{d^2a_n}{dt^2}\cos\frac{ns}{a}\right) = 0,$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2b_n}{dt^2} = 0,$$

wozu noch hinzuzufügen ist, dass $[1/n]\,[d^2a_n/dt^2] = 0$, auch für $n = 0$, sein müsse.

Die am Schlusse von Art. 10 angeführten Bewegungsgleichungen gehen dann in folgende Bedingungsgleichungen für *beharrliche* Strömungen über, nämlich, wenn $n > 0$ ist,

$$\frac{1}{4\pi a^2 k}\cdot\frac{da_n}{dt}+\frac{n^2 N''}{a^2}\cdot a_n-\frac{n}{2a}g_n=0,$$

$$\frac{1}{4\pi a^2 k}\cdot\frac{db_n}{dt}+\frac{n^2 N''}{a^2}\cdot b_n+\frac{n}{2a}f_n=0,$$

wozu noch $[1/n]\,[da_n/dt]=$ Konst für $n=0$, folglich $a_0=$ Konst hinzukommt. Hieraus folgt, dass bei *beharrlicher* Strömung die Summe aller auf den kreisförmigen Leiter von aussen wirkenden elektromotorischen Kräfte

$$S=\int ds\Sigma\left(f_n\sin\frac{ns}{a}+g_n\cos\frac{ns}{a}\right)=\frac{2}{a}\int ds\Sigma n N''\left(a_n\cos\frac{ns}{a}-b_n\sin\frac{ns}{a}\right)$$
$$-\frac{a}{2\pi a^2 k}\int ds\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a}-\frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

sein soll; folglich, da

$$-\frac{a}{2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a}-\frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)=i,$$

und da

$$\int ds\Sigma n N''\left(a_n\cos\frac{ns}{a}-b_n\sin\frac{ns}{a}\right)=0$$

ist, wie man leicht sieht, wenn man beachtet, dass a_0 einen konstanten Werth hat und folglich $na_n=0$ ist für $n=0$,

$$S=\frac{1}{\pi a^2 k}\cdot\int i\,ds.$$

Nun ist aber $[1/(2\pi a)]\,.\int i\,ds=J$ der *Mittelwerth der Stromintensität im ganzen Leiter,* und $2\pi a/[\pi a^2 k]=w$ ist der *Widerstand des ganzen Leiters;* folglich $S=Jw$, d. i. die Summe der äusseren elektromotorischen Kräfte im ganzen Leiter soll dem Produkte des Widerstands in die mittlere Stromintensität des ganzen Leiters gleich sein, ganz in Uebereinstimmung mit dem Ohm'schen Gesetze, dass das Produkt des Widerstands in die Stromstärke die elektromotorische Kraft der Kette giebt, was mit obigem Resultate identisch ist, wenn man dabei voraussetzt, dass gar keine Verschiedenheiten der Stromintensitäten in verschiedenen Punkten des Leiters Statt finden. Dies braucht nun zwar nach obiger Theorie nicht nothwendig der Fall zu sein; soll aber eine Verschiedenheit der Stromintensitäten in verschiedenen Punkten mit der Beharrlichkeit des Stroms in jedem einzelnen Punkte bestehen, so müssen nach obiger Theorie die von aussen wirkenden elektromotorischen Kräfte *mit der Zeit proportional* sich ändern, ein Fall der in der Wirk-

lichkeit nicht vorkommt und daher bei dem auf die Erfahrung begründeten Ohm'schen Gesetze ausser Betracht geblieben ist. Es leuchtet nämlich ein, dass wenn

$$i = -\frac{a}{2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

in verschiedenen Punkten des Leiters verschiedene Werthe haben soll, wenigstens für einen von Null verschiedenen Werth von n entweder da_n/dt oder db_n/dt einen von Null verschiedenen Werth $= A$ haben müsste, woraus entweder $a_n = At + B$ oder $b_n = At + B$ folgte. Substituirt man nun im einen Falle $At + B$ für a_n in der ersten von den beiden oben gefundenen Bedingungsgleichungen beharrlicher Strömung, so erhält man

$$\frac{1}{4\pi a^2 k}\cdot A + \frac{n^2 N''}{a^2}(At + B) - \frac{n}{2a}g_n = 0,$$

woraus folgt, dass g_n *mit der Zeit proportional* sich ändert. Substituirt man im anderen Falle $At + B$ für b_n in der zweiten Bedingungsgleichung, so folgt auf gleiche Weise, dass f_n *mit der Zeit proportional* sich ändert. In beiden Fällen würde also auch die von aussen wirkende elektromotorische Kraft

$$S_n = f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}$$

mit der Zeit proportional sich ändern.

13.

Bewegungsgesetze der nach beliebiger Störung des Gleichgewichts sich selbst überlassenen Elektricität in einem kreisförmigen Leiter.

Die Theorie der Bewegung der nach beliebiger Störung des Gleichgewichts sich selbst überlassenen Elektricität in einem Leiter umfasst die wichtige Lehre von der *Fortpflanzung*, insbesondere die Fragen, ob die Bewegungsfortpflanzung durch die Elektricität in Leitern, ebenso wie die durch den Lichtäther oder durch die Luft, von *Wellen* vermittelt werde, ferner welche *Geschwindigkeit* diese Wellen besitzen, und endlich überhaupt welche *Gesetze* von dieser Wellenverbreitung gelten. Die ursprüngliche Störung des Gleichgewichts kann nämlich auf einen kleinen Theil des Leiters beschränkt sein, und wenn darauf, ohne äussere Einwirkung, *ähnliche* Störungen des Gleichgewichts *successiv* in allen übrigen Theilen des Leiters von selbst eintreten, so bezeichnet man diese Uebertragung mit dem Namen *Fortpflanzung*, und das Fortgepflanzte mit dem Namen *Welle*.

Soll die Elektricität im Leiter sich selbst überlassen bleiben, so sind *alle von aussen her stammenden Kräfte*, welche auf die Elektricität im Leiter wirken würden, $=0$ zu setzen. Man erhält daher die Bewegungsgleichungen für diesen Fall, wenn man in den Gleichungen am Schlusse von Art. 10

$$f_n = 0 \quad \text{und} \quad g_n = 0$$

setzt, nämlich folgende:

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \frac{c^2}{8\pi a^2 k M''(1+\lambda)} \frac{d a_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''(1+\lambda)} \cdot a_n = 0,$$

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} + \frac{c^2}{8\pi a^2 k M''(1+\lambda)} \frac{d b_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''(1+\lambda)} \cdot b_n = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man nun durch Integration, wenn

$$\frac{c^2}{16\pi a^2 k M''(1+\lambda)} = \varepsilon,$$

$$\frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''(1+\lambda)} = m^2 + \varepsilon^2$$

gesetzt wird,

$$a_n = A e^{-\varepsilon t} . \sin m(t - A'),$$

$$b_n = B e^{-\varepsilon t} . \sin m(t - B'),$$

wo A, A', B, B' die Integrationskonstanten sind, welche aus der gegebenen ursprünglichen Störung des Gleichgewichts zu bestimmen sind.

Ist nämlich die ursprüngliche Vertheilung der freien Elektricität im Leiter durch folgende Gleichung gegeben, wenn E_0 den Werth der Dichtigkeit E für $t=0$ bezeichnet,

$$E_0 = \Sigma \left(a^0{}_n \sin \frac{ns}{a} + b^0{}_n \cos \frac{ns}{a} \right)$$

und die ursprünglichen Strömungen in allen Theilen des Leiters durch folgende Gleichung, wenn i_0 den Werth der Stromintensität i für $t=0$ bezeichnet,

$$i_0 = -\frac{a}{2} \Sigma \frac{1}{n} \left(\frac{db^0{}_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da^0{}_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right),$$

worin $a^0{}_n$, $b^0{}_n$, $da^0{}_n/dt$, $db^0{}_n/dt$ bekannte Werthe haben, so erhält man durch Einsetzen dieser Werthe in obige Gleichung für $t=0$

$$a^0{}_n = -A \sin mA',$$

$$b^0{}_n = -B \sin mB'$$

und, nachdem man obige Gleichungen differentiirt hat,

$$\frac{da^0_n}{dt} = mA\cos mA' - \varepsilon a^0_n,$$

$$\frac{db^0_n}{dt} = mB\cos mB' - \varepsilon b^0_n.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich folgende Werthe der Integrationskonstanten:

$$A = \sqrt{a^0{}_n^2 + \frac{1}{m^2}\left(\varepsilon a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right)^2},$$

$$B = \sqrt{b^0{}_n^2 + \frac{1}{m^2}\left(\varepsilon b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right)^2},$$

$$A' = -\frac{1}{m}\arcsin\frac{a^0_n}{A},$$

$$B' = -\frac{1}{m}\arcsin\frac{b^0_n}{B}.$$

Setzt man die beiden letzteren Werthe in die obigen Gleichungen ein, so erhält man

$$a_n = Ae^{-\varepsilon t}\sin\left(mt + \arcsin\frac{a^0_n}{A}\right),$$

$$b_n = Be^{-\varepsilon t}\sin\left(mt + \arcsin\frac{b^0_n}{B}\right)$$

und hiermit das Gesetz der *Vertheilung der freien Elektricität* im Leiter:

$$E = \Sigma e^{-\varepsilon t}\cdot\left(A\sin\frac{ns}{a}\sin\left(mt + \arcsin\frac{a^0_n}{A}\right) + B\cos\frac{ns}{a}\sin\left(mt + \arcsin\frac{b^0_n}{B}\right)\right),$$

oder, wenn der Sinus der Summe zweier Bögen entwickelt wird,

$$E = \Sigma e^{-\varepsilon t}\cdot\left(a^0_n\sin\frac{ns}{a}\cos mt + \sqrt{B^2 - b^0{}_n^2}\cos\frac{ns}{a}\sin mt + b^0_n\cos\frac{ns}{a}\cos mt + \sqrt{A^2 - a^0{}_n^2}\sin\frac{ns}{a}\sin mt\right).$$

Setzt man nun

$$a^0_n = p + q, \qquad b^0_n = p' + q',$$

$$\sqrt{B^2 - b^0{}_n^2} = p - q, \qquad \sqrt{A^2 - a^0{}_n^2} = p' - q',$$

wodurch p, q, p', q' bestimmt werden, nämlich

$$p = \tfrac{1}{2}\left(a^0_n + \frac{1}{m}\left(\varepsilon b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right)\right),$$

$$q = \tfrac{1}{2}\left(a^0_n - \frac{1}{m}\left(\varepsilon b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right)\right),$$

$$p' = \tfrac{1}{2}\left(b^0{}_n + \frac{1}{m}\left(\varepsilon a^0{}_n + \frac{da^0{}_n}{dt}\right)\right),$$

$$q' = \tfrac{1}{2}\left(b^0{}_n - \frac{1}{m}\left(\varepsilon a^0{}_n + \frac{da^0{}_n}{dt}\right)\right),$$

so erhält man

$$E = \Sigma e^{-\varepsilon t}\cdot\left(q\sin\left(\frac{ns}{a} - mt\right) + p'\cos\left(\frac{ns}{a} - mt\right)\right)$$
$$+ \Sigma e^{-\varepsilon t}\cdot\left(p\sin\left(\frac{ns}{a} + mt\right) + q'\cos\left(\frac{ns}{a} + mt\right)\right),$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$E = \Sigma\sqrt{p'^2 + q^2}\cdot e^{-\varepsilon t}\sin\left(\frac{ns}{a} - mt + \operatorname{arc\,tang}\frac{p'}{q}\right)$$
$$+ \Sigma\sqrt{p^2 + q'^2}\cdot e^{-\varepsilon t}\sin\left(\frac{ns}{a} + mt + \operatorname{arc\,tang}\frac{q'}{p}\right).$$

Auf gleiche Weise findet man das Gesetz der *Strömung der Elektricität* im Leiter, nämlich:

$$i = \Sigma\sqrt{P'^2 + Q^2}\cdot e^{-\varepsilon t}\sin\left(\frac{ns}{a} - mt + \operatorname{arc\,tang}\frac{P'}{Q}\right)$$
$$+ \Sigma\sqrt{P^2 + Q'^2}\cdot e^{-\varepsilon t}\sin\left(\frac{ns}{a} + mt + \operatorname{arc\,tang}\frac{Q'}{P}\right),$$

worin P, Q, P', Q' folgende Werthe haben:

$$P = -\frac{a}{4n}\left(\frac{db^0{}_n}{dt} + \frac{1}{m}\left((m^2 + \varepsilon^2)\,a^0{}_n + \varepsilon\frac{da^0{}_n}{dt}\right)\right),$$

$$Q = -\frac{a}{4n}\left(\frac{db^0{}_n}{dt} - \frac{1}{m}\left((m^2 + \varepsilon^2)\,a^0{}_n + \varepsilon\frac{da^0{}_n}{dt}\right)\right),$$

$$P' = +\frac{a}{4n}\left(\frac{da^0{}_n}{dt} + \frac{1}{m}\left((m^2 + \varepsilon^2)\,b^0{}_n + \varepsilon\frac{db^0{}_n}{dt}\right)\right),$$

$$Q' = +\frac{a}{4n}\left(\frac{da^0{}_n}{dt} - \frac{1}{m}\left((m^2 + \varepsilon^2)\,b^0{}_n + \varepsilon\frac{db^0{}_n}{dt}\right)\right).$$

14.

Vergleichung mit dem Ohm'*schen Gesetze.*

Es ist schon Art. 6 erörtert worden, wovon es abhänge, ob das von Ohm für *beharrliche* Ströme aufgestellte Gesetz auch auf *veränderliche*

Ströme angewendet werden dürfe. Es hing dies von der Grösse $\lambda = c^2/[8r\mathfrak{E}\log l/a]$ ab; überall wo diese Grösse in Betracht kommt und ihr Werth nicht verschwindet, findet das Ohm'sche Gesetz entweder gar keine oder nur eine approximative Anwendung. Diese Grösse λ ist Art. 8, mit Rücksicht auf den Art. 6 noch nicht berücksichtigten Einfluss, welche entferntere Theile der Kette darauf haben, genauer bestimmt worden, nämlich $\lambda = c^2/[4M''r\mathfrak{E}]$, wo der für $2\log[l/a]$ in Art. 6 gesetzte Werth M'' genau definirt und Art. 10 für einen kreisförmigen Leiter bestimmt worden ist. Diese Grösse λ, oder, da der Werth des Faktors $c^2/[4M'']$ als bekannt betrachtet werden darf, die Grösse des Produkts $r\mathfrak{E}$, erlangt dadurch, dass sie über die Anwendbarkeit des Ohm'schen Gesetzes entscheidet, in der Lehre von der Bewegung der Elektricität in Leitern eine besondere Wichtigkeit, deren Grund sich aus der *physischen Bedeutung* des Produkts $r\mathfrak{E}$ leicht erkennen lässt.

Die in der Längeneinheit des Leiters enthaltene positive Elektricitätsmenge ist nämlich, in der nach elektrostatischem Gesetze festgesetzten Maasseinheit ausgedrückt, mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet und ihre *Masse in Milligrammen* $= [1/r]\,\mathfrak{E}$ gesetzt worden. Aus der Definition der nach elektrostatischem Gesetze festgesetzten Maasseinheit (wonach nämlich diejenige Elektricitätsmenge zur Maasseinheit genommen wird, welche auf eine gleiche in der Einheit der Entfernung nach elektrostatischem Gesetze die Einheit der Kraft ausübt, d. i. eine Kraft, welche der Masse eines Milligramms in der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt) geht aber hervor, dass r^2 die Kraft ist, welche *ein Milligramm* positiver oder negativer Elektricität auf ein gleiches Milligramm Elektricität in der Einheit der Entfernung ausübt. Hieraus folgt, dass das Produkt $r\mathfrak{E}$ die Kraft bedeutet, welche *die in der Längeneinheit des Leiters enthaltene positive Elektricität*, wenn sie in einem Punkte koncentrirt wäre, auf *ein Milligramm* positiver Elektricität in der Einheit der Entfernung ausüben würde.

Durch die Art. 8 ff. gegebene Entwickelung der Bewegungsgesetze der Elektricität in einem geschlossenen Leiter wird nun der Einfluss dieser Grösse λ oder des Produkts $r\mathfrak{E}$ näher bestimmt. Aus Art. 11 und 12 geht zunächst hervor, dass die Getze des *Gleichgewichts* und der *beharrlichen Ströme* der Elektricität in Leitern ganz in Uebereinstimmung mit dem Ohm'schen Gesetze sind, weil die Grösse λ oder $r\mathfrak{E}$ dabei gar nicht in Betracht kommt, während aus Art. 13 hervorgeht, dass die Gesetze der *Fortpflanzung*, oder im Allgemeinen die Gesetze aller nach Störung des Gleichgewichts eintretenden *Bewegungsänderungen*, zunächst von den Werthen m und ε und dadurch mittelbar von λ oder $r\mathfrak{E}$ wesentlich abhängig sind. Es folgt daraus, dass von der Grösse λ oder

dem Produkte $r\mathfrak{C}$ (und dadurch also mittelbar, wenn die in der Längeneinheit eines Leiters enthaltene Elektricitätsmenge nach *elektrostatischer Maasseinheit* bekannt wäre, von der ganzen *Masse* der im Leiter vorhandenen Elektricität in Milligrammen) nur aus solchen Beobachtungen Kenntniss erlangt werden kann, welche bestimmte *Abweichungen vom* OHM'*schen Gesetze* in den nach Störung des Gleichgewichts eintretenden *Bewegungsänderungen* der Elektricität in Leitern nachweisen.

Es leuchtet ein, welche Wichtigkeit *genauere Beobachtungen über Bewegungsänderungen oder über Bewegungsfortpflanzungen durch die Elektricität in Leitern* hierdurch gewinnen; denn gelänge es, aus solchen Beobachtungen irgend eine *Abweichung vom* OHM'*schen Gesetze* wirklich nachzuweisen, so würde dieses Resultat zur Kenntniss des Werths des Produkts $r\mathfrak{C}$ führen, das heisst zur Kenntniss der Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten, welche auf *ein Milligramm* Elektricität gehen, wenn die in der Längeneinheit des Leiters enthaltene Zahl *elektrostatischer Maasseinheiten* bekannt ist.

Es sollen zunächst die Gesetze *elektrischer Wellenbewegungen* in kreisförmigen Leitern nach Art. 13 näher entwickelt werden, um zu prüfen, ob daraus ein bestimmter Leitfaden für die *Ausführung solcher Beobachtungen* entnommen werden könne; sodann, wenn dies nicht der Fall wäre, soll geprüft werden, worin der Grund davon liege, und ob es andere elektrische Bewegungen in kreisförmigen Leitern gebe, die sich besser als die *Wellenbewegung* dazu eigneten.

15.

Elektrische Wellenbewegungen in einem kreisförmigen Leiter.

Aus den Art. 13 entwickelten Gesetzen ergiebt sich, dass alle Bewegungen der in einem kreisförmigen Leiter sich selbst überlassenen Elektricität nach einer beliebigen Störung des Gleichgewichts zu einer Reihe *vorwärts*, und zu einer Reihe *rückwärts* schreitender *Wellenzüge* sich gestalten, von denen der *erste Wellenzug* jeder der beiden Reihen aus zwei Wellen besteht, nämlich aus einer positiven und aus einer negativen, die zusammen die ganze Kreisperipherie einnehmen; der *zweite Wellenzug* jeder Reihe besteht aus vier abwechselnd positiven und negativen Wellen, die zusammen den ganzen Kreis einnehmen; der *dritte Wellenzug* aus sechs Wellen u. s. w.

Löst man nämlich die Summen, durch welche Art. 13 die Dichtigkeit der freien Elektricität E und die Stromintensität i dargestellt worden sind, in ihre Glieder auf und bezeichnet diese Glieder nach ihrer Stellenzahl n mit E_n und i_n, so ist

$$E_1 = \sqrt{p'^2 + q^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{s}{a} - mt + \operatorname{arc\,tang} \frac{p'}{q}\right)$$

$$+ \sqrt{p^2 + q'^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{s}{a} + mt + \operatorname{arc\,tang} \frac{q'}{p}\right),$$

$$i_1 = \sqrt{P'^2 + Q^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{s}{a} - mt + \operatorname{arc\,tang} \frac{P'}{Q}\right)$$

$$+ \sqrt{P^2 + Q'^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{s}{a} + mt + \operatorname{arc\,tang} \frac{Q'}{P}\right),$$

wovon die ersteren Theile, welche den Sinus eines Bogens, der sich mit $(s - amt)$ proportional ändert, enthalten, den *ersten vorwärts* schreitenden *Wellenzug*, die letzteren Theile, welche den Sinus eines Bogens, der sich mit $(s + amt)$ proportional ändert, enthalten, den *ersten rückwärts* schreitenden *Wellenzug* darstellen. Der erste vorwärts schreitende Wellenzug besteht aber aus einer *positiven Welle*, welche im Augenblicke $t = [1/m] \operatorname{arc\,tang} [p'/q]$ von $s = 0$ bis $s = \pi a$ sich erstreckt, wo die Welle eine Ladung des Leiters mit freier positiver Elektricität hervorbringt, und aus einer *negativen Welle*, welche im nämlichen Augenblicke von $s = \pi a$ bis $s = 2\pi a$ sich erstreckt, wo die Welle eine Ladung des Leiters mit freier negativer Elektricität hervorbringt. Beide Wellen zusammen nehmen aber die ganze Kreisperipherie ein. Dasselbe gilt von dem ersten rückwärts schreitenden Wellenzuge, welcher aus einer *positiven Welle* besteht, welche im Augenblicke $t = -[1/m] \operatorname{arc\,tang} [q'/p]$ von $s = 0$ bis $s = \pi a$ sich erstreckt, und aus einer *negativen Welle*, welche im nämlichen Augenblicke von $s = \pi a$ bis $s = 2\pi a$ sich erstreckt.

Ferner ist

$$E_2 = \sqrt{p'^2 + q^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{2s}{a} - mt + \operatorname{arc\,tang} \frac{p'}{q}\right)$$

$$+ \sqrt{p^2 + q'^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{2s}{a} + mt + \operatorname{arc\,tang} \frac{q'}{p}\right),$$

$$i_2 = \sqrt{P'^2 + Q^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{2s}{a} - mt + \operatorname{arc\,tang} \frac{P'}{Q}\right)$$

$$+ \sqrt{P^2 + Q'^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{2s}{a} + mt + \operatorname{arc\,tang} \frac{Q'}{P}\right),$$

wovon die ersteren Theile, welche den Sinus eines Bogens, der sich mit $(s - \frac{1}{2} amt)$ proportional ändert, enthalten, den *zweiten vorwärts* schreitenden *Wellenzug*, die letzteren Theile, welche den Sinus eines Bogens, der sich mit $(s + \frac{1}{2} amt)$ proportional ändert, enthalten, den *zweiten rückwärts* schreitenden *Wellenzug* darstellen. Jener vorwärts schreitende

Wellenzug besteht aus vier Wellen, von denen im Augenblicke $t = [1/m]$ arc tang $[p'/q]$ die erste positive von $s = 0$ bis $s = \frac{1}{2}\pi a$, die zweite negative von $s = \frac{1}{2}\pi a$ bis $s = \pi a$, die dritte positive von $s = \pi a$ bis $s = \frac{3}{2}\pi a$, die vierte negative von $s = \frac{3}{2}\pi a$ bis $s = 2\pi a$ sich erstreckt. Dasselbe gilt von den vier Wellen des rückwärts schreitenden Wellenzugs im Augenblicke $t = -[1/m]$ arc tang $[q'/p]$.

Auf gleiche Weise ergeben sich die dritten Wellenzüge beider Reihen aus E_3 und i_3 u. s. f.

Die *Intensitäten* dieser verschiedenen Wellenzüge, welche nach den Regeln der Wellenlehre proportional mit i^2 zu setzen sind, nehmen während der Fortpflanzung ab und zwar jeder Wellenzug in der Zeit t im Verhältniss

$$1 : e^{-2\varepsilon t}.$$

Diese Abnahme ist nach der Stellenzahl n der Wellenzüge verschieden, weil der Werth von ε mit dem Werthe von n sich ändert; denn es war

$$\varepsilon = \frac{c^2}{16\pi\alpha^2 k M''(1+\lambda)},$$

$$\lambda = \frac{c^2}{4M''r\mathfrak{E}}$$

und hierin war nach Art. 10

$$M'' = -4\left(\cos\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\right) + 2\log\frac{8a}{e\alpha} - \frac{1}{8}\frac{n^2\alpha}{a}$$
$$+ \frac{1}{2n+1}\cos\frac{2n+1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} - \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}},$$

woraus, wenn α/a sehr klein ist,

$$\text{für } n = 1, \quad M'' = 2\log\frac{8a}{\alpha} - 6{,}666\ldots,$$

$$\text{für } n = 2, \quad M'' = 2\log\frac{8a}{\alpha} - 7{,}466\ldots$$

u. s. w. folgt. Bezeichnet w' den Widerstand der Längeneinheit des Leiters $= 1/[\pi\alpha^2 k]$, und wird $\lambda = 0$ gesetzt, d. h. beschränkt man sich auf diejenigen Fälle, wo das Ohm'sche Gesetz Anwendung findet, so ergiebt sich in der Zeiteinheit eine Intensitätsabnahme in einem Verhältnisse, welches für die ersten Wellenzüge, für welche $n = 1$,

$$= 1 : e^{-\frac{w'c^2}{16\log\frac{8a}{\alpha} - 53{,}33\ldots}}$$

für die zweiten Wellenzüge, für welche $n = 2$,

$$= 1 : e^{-\frac{w'c^2}{16 \log \frac{8a}{\alpha} - 59{,}733 \ldots}}$$

ist, u. s. w. Man sieht hieraus, dass eine desto schnellere Abnahme Statt findet, je grösser der Widerstand der Längeneinheit des Leiters, je dicker der Leiter im Vergleich zu seiner Länge und je grösser die Stellenzahl n des Wellenzugs ist, d. h., je kleiner die Wellen sind.

16.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenzüge in einem kreisförmigen Leiter.

Es ergiebt sich, wie oben gezeigt, aus Art. 13, dass die Bewegungen der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter nach jeder Störung des Gleichgewichts sich in Wellenzüge, deren Fortpflanzung durch einfache Gesetze bestimmt ist, auflösen lassen, ebenso, wie dies bei vielen anderen Körpern der Fall ist. Bei manchen Körpern, wie z. B. bei der Luft in einer kreisförmigen Röhre, kommt aber noch hinzu, dass diese Wellenzüge durch die Fortpflanzung gar nicht verändert werden, dass namentlich keine Intensitätsabnahme Statt findet, und dass ausserdem sämmtliche Wellenzüge *mit gleicher Geschwindigkeit* fortgepflanzt werden, woraus folgt, dass sämmtliche vorwärts schreitende, oder sämmtliche rückwärts schreitende Wellenzüge sich zu einem einzigen Wellenzuge *zusammensetzen*, der ebenfalls unverändert und mit der nämlichen Geschwindigkeit, wie die einzelnen Wellenzüge, aus denen er besteht, fortgepflanzt wird. Ein solcher zusammengesetzter Wellenzug besteht aber aus *zusammengesetzten Wellen*, die an Grösse, Form und Intensität von einander sehr verschieden sein können. Solche *zusammengesetzte Wellen*, welche in Folge gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit aller ihrer Bestandtheile immer auf gleiche Weise zusammengesetzt bleiben, haben als *Beobachtungsobjekt* eine besondere physische Bedeutung und werden *Wellen im engeren Sinne* genannt.

In diesem *engeren* Sinne würden also elektrische Wellen in einem kreisförmigen Leiter, in welchem das elektrische Gleichgewicht gestört worden ist, schon wegen der verschiedenen Intensitätsabnahme der verschiedenen elementaren Wellenzüge nicht Statt finden, noch weniger aber, wenn den verschiedenen elementaren Wellenzügen auch noch *verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten* zukommen.

Da die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit*, wo Wellen im engeren Sinne Statt finden, für die Kenntniss des *Fortpflanzungsmediums* von grösster Wichtigkeit ist, hat die Frage danach in Betreff der *Elektricität*

besonderes Interesse erweckt, und es sollen daher die aus Art. 13 sich darüber ergebenden Resultate näher betrachtet werden.

Die *Fortpflanzungsgeschwindigkeiten* der verschiedenen elementaren Wellenzüge werden aus den Art. 13 entwickelten Formeln gleich der Zunahme oder Abnahme gefunden, welche s erhalten muss, wenn in den Werthen von E_n und i_n beim Wachsthum der Zeit t um 1 die Bogenwerthe unter dem Sinuszeichen unverändert bleiben sollen, d. i.

$$= \frac{ma}{n},$$

oder, wenn man für m seinen Werth aus Art. 13

$$m = \sqrt{\frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''(1+\lambda)} - \left(\frac{c^2}{16\pi a^2 k M''(1+\lambda)}\right)^2}$$

setzt,

$$= \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{N''}{M''(1+\lambda)} - \frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2 (1+\lambda)^2}},$$

worin, wie oben, $w' = 1/[\pi a^2 k]$ gesetzt ist. Beschränkt man sich auf die Fälle, wo $\lambda = 0$ gesetzt werden kann, d. h. wo das Ohm'sche Gesetz Anwendung findet, so reducirt sich der Ausdruck dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf

$$= \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{N''}{M''} - \frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2}},$$

worin die Werthe von N'' und M'' auf folgende Weise bestimmt werden:

$$N'' = 2 \log \frac{8a}{a} - 4\left(\cos \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{a}} + \tfrac{1}{3}\cos \tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{a}{a}} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\cos \frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{a}{a}}\right) - \frac{n^2 a}{8a},$$

$$M'' = 2 \log \frac{8a}{a} - 4\left(\cos \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{a}} + \tfrac{1}{3}\cos \tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{a}{a}} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\cos \frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{a}{a}}\right) - \frac{n^2 a}{8a}$$

$$- 2 - \frac{1}{2n-1}\cos \frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{a}{a}} + \frac{1}{2n+1}\cos \frac{2n+1}{4}\sqrt{\frac{a}{a}}.$$

Hieraus ergiebt sich also, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die verschiedenen Wellenzüge nach Verschiedenheit ihrer Stellenzahl n verschieden ist, und es würde nur noch die Frage sein, ob die Differenzen dieser verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nicht unter gewissen Verhältnissen so klein wären, dass sie näherungsweise als verschwindend betrachtet werden dürften, und welches der Grenzwerth sei, dem sich dann alle diese Fortpflanzungsgeschwindigkeiten näherten.

Aus den angeführten Werthen ergiebt sich nun wirklich, dass, so

lange die Stellenzahl n nicht über diejenigen Werthe hinausgeht, für welche $n^2 a/a$ gegen 1 als verschwindend betrachtet werden kann,

$$\frac{N''}{M''} = 1 + \frac{8n^2}{(4n^2 - 1)M''}$$

gesetzt werden darf. Für grosse Werthe von M'', für welche der Bruch $8n^2/(4n^2 - 1)M''$ gegen 1 verschwindet, und für kleine Werthe des Widerstands des ganzen Leiters, für welche der Bruch $a^2c^2w'^2/[128n^2M''^2]$ gegen 1 verschwindet,[1]) ist daher $c/\sqrt{2}$ der gesuchte Grenzwerth, dem sich alle Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nähern, und dieser Grenzwerth ist, für den gegebenen Werth $c = 439\,450 \,.\, 10^6$ Millimeter/Sekunde,

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = 310\,740 \,.\, 10^6 \,\frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}},$$

d. i. eine Geschwindigkeit von 41 950 Meilen in der Sekunde.

Diese Geschwindigkeit hat schon Kirchhoff für die Fortpflanzung elektrischer Wellen gefunden und bemerkt: „dass sie sowohl unabhängig von dem Querschnitt, als auch von der Leitungsfähigkeit des Drahts, als auch endlich von der Dichtigkeit der Elektricität wäre; auch dass ihr Werth von 41 950 Meilen in einer Sekunde sehr nahe dem der Geschwindigkeit des Lichts im leeren Raume gleichkommt“. Könnte diese nahe Uebereinstimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen mit der des Lichts als eine Andeutung eines inneren Zusammenhangs beider Lehren angesehen werden, so würde sie bei der grossen Wichtigkeit, welche die Erforschung eines solchen Zusammenhangs hat, das grösste Interesse in Anspruch nehmen. Es leuchtet aber ein, dass dabei vor Allem die wahre Bedeutung, die in Beziehung auf die Elektricität jener Geschwindigkeit zukommt, in Betracht gezogen werden muss, welche nicht der Art zu sein scheint, dass sich grosse Erwartungen daran knüpfen liessen.

Denn die Annäherung der wahren Fortpflanzungsgeschwindigkeit an jenen Grenzwerth, der mit der Geschwindigkeit des Lichts übereinstimmt, setzt, wie eben gezeigt worden, nicht blos einen im Vergleich zu seiner Länge sehr dünnen Leitungsdraht voraus, sondern auch, dass dieser lange und dünne Leitungsdraht einen sehr kleinen Widerstand besitze. Es leuchtet hieraus ein, dass grössere Annäherung an jenen

[1]) Der Bruch $a^2c^2w'^2/[128n^2M''^2]$ kann gegen 1 als verschwindend betrachtet werden, wenn für grosse Werthe von M'' diejenige Geschwindigkeit, welche nach *absolutem magnetischen Widerstandsmaasse* den Widerstand des ganzen Leiters ausdrückt, d. i. $[\pi c/4]\,acw'$, im Verhältniss zur Geschwindigkeit c sehr klein ist.

Grenzwerth nur selten, grössere Abweichungen davon sehr häufig vorkommen werden. Hierüber lässt sich am leichtesten eine Uebersicht durch Beispiele gewinnen.

Wir wählen zu Beispielen drei kreisförmige Kupferdrähte, deren Kreishalbmesser der Reihe nach

$$a = 1000 \quad , \quad 1\,000\,000 \quad , \quad 1\,000\,000 \text{ Millimeter,}$$

und deren Querschnitt der Reihe nach

$$\pi a^2 = 1 \quad , \quad 1 \quad , \quad \tfrac{1}{10} \text{ Quadratmillimeter}$$

gross sei. Der Widerstand dieser Drähte, wie er durch Messung *nach absolutem magnetischen Widerstandsmaasse* gefunden wird, kann (siehe Abhandlungen der Königl. Gesellschaften der Wissenschaften zu Göttingen Bd. 5, Art. 9)[1]) in runder Zahl $W = [2\pi a/\pi a^2] \,.\, 2 \,.\, 10^6$ gesetzt werden. Nach bekannter Relation zwischen magnetischem und mechanischem Widerstandsmaasse ist aber $W = \frac{1}{4}\pi c^2 a w'$, oder $\frac{1}{128} a^2 c^2 w'^2 = W^2/[8\pi^2 c^2]$, wonach

$$\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{N''}{M''} - \frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{N''}{M''} - \frac{W^2}{8\pi^2 c^2 n^2 M''^2}} = \frac{c'}{\sqrt{2}}.$$

Hiernach ist folgende Tafel berechnet.

n		1. Draht. $a = 1000$ $\pi a^2 = 1$ $W = 4 \,.\, 10^9 \,.\, \pi$	2. Draht. $a = 1\,000\,000$ $\pi a^2 = 1$ $W = 4 \,.\, 10^{12} \,.\, \pi$	3. Draht. $a = 1\,000\,000$ $\pi a^2 = \frac{1}{10}$ $W = 4 \,.\, 10^{13} \,.\, \pi$
1	N''	= 15,119	= 28,935	= 31,605
	M''	= 12,452	= 25,268	= 28,938
	$\frac{N''}{M''}$	= 1,214	= 1,145	= 1,092
	$\frac{W^2}{8\pi^2c^2n^2M''^2}$	$= \frac{1}{14\,970\,000}$	= 0,0166	= 1,2364
	$\frac{c'^2}{c^2}$	= 1,214	= 1,128	= −0,0443
2	N''	= 13,786	= 27,601	= 31,062
	M''	= 11,652	= 25,468	= 28,928
	$\frac{N''}{M''}$	= 1,183	= 1,084	= 1,074
	$\frac{W^2}{8\pi^2c^2n^2M''^2}$	$= \frac{1}{52\,450\,000}$	= 0,00408	= 0,3093
	$\frac{c'^2}{c^2}$	= 1,183	= 1,080	= 0,7644

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. II, p. 319.]

n		1. Draht.	2. Draht.	3. Draht.
	a	$= 1000$	$= 1000000$	$= 1000000$
	πa^2	$= 1$	$= 1$	$= \frac{1}{10}$
	W	$= 4 \,.\, 10^9 \,.\, \pi$	$= 4 \,.\, 10^{12} \,.\, \pi$	$= 4 \,.\, 10^{13} \,.\, \pi$
3	N''	$= 12{,}986$	$= 26{,}801$	$= 30{,}262$
	M''	$= 10{,}929$	$= 24{,}747$	$= 28{,}205$
	$\frac{N''}{M''}$	$= 1{,}188$	$= 1{,}083$	$= 1{,}073$
	$\frac{W^2}{8\pi^2 c^2 n^2 M''^2}$	$= \frac{1}{103\,800\,000}$	$= 0{,}001\,92$	$= 0{,}1446$
	$\frac{c'^2}{c^2}$	$= 1{,}188$	$= 1{,}081$	$= 0{,}9283$
4	N''	$= 12{,}414$	$= 26{,}230$	$= 29{,}690$
	M''	$= 10{,}383$	$= 24{,}198$	$= 27{,}659$
	$\frac{N''}{M''}$	$= 1{,}196$	$= 1{,}084$	$= 1{,}073$
	$\frac{W^2}{8\pi^2 c^2 n^2 M''^2}$	$= \frac{1}{166\,200\,000}$	$= 0{,}001\,13$	$= 0{,}0846$
	$\frac{c'^2}{c^2}$	$= 1{,}197$	$= 1{,}083$	$= 0{,}9889$
5	N''	$= 11{,}970$	$= 25{,}785$	$= 29{,}246$
	M''	$= 9{,}950$	$= 23{,}765$	$= 27{,}226$
	$\frac{N''}{M''}$	$= 1{,}203$	$= 1{,}085$	$= 1{,}074$
	$\frac{W^2}{8\pi^2 c^2 n^2 M''^2}$	$= \frac{1}{239\,000\,000}$	$= 0{,}000\,75$	$= 0{,}0559$
	$\frac{c'^2}{c^2}$	$= 1{,}203$	$= 1{,}084$	$= 1{,}0183$

Aus den Werthen von c'^2/c^2 in dieser Tafel, welche die Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $c'/\sqrt{2}$ in Theilen des Quadrats des Grenzwerths $c/\sqrt{2}$ angeben, stellen sich beträchtliche Verschiedenheiten schon unter den ersten fünf Wellenzügen, auf welche die Tafel beschränkt ist, dar; bei dem dritten Draht hat c'^2/c^2 für $n = 1$ sogar einen *negativen* Werth, es wird hier also der Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ersten Wellenzugs *imaginär* und es lassen sich daher die Gesetze der Bewegungsänderungen in diesem Drahte nach einer Störung des Gleichgewichts gar nicht in Form fortgepflanzter Wellenzüge auffassen, sondern bedürfen einer anderen Form, welche die Bewegungsänderungen als eine blosse Annäherung an den Gleichgewichtszustand darstellt, die mit dem Namen *Absorption* bezeichnet werden kann, und, da sie für lange und dünne Leitungsdrähte von grossem Widerstande, namentlich also für Telegraphendrähte, von besonderer Wichtigkeit ist, nähere Betrachtung verdient.

17.

Absorption elektrischer Bewegungen in einem kreisförmigen Leiter.

Bei der Art. 13 gegebenen Integration der beiden partiellen Differentialgleichungen für die Bewegung der in einem kreisförmigen Leiter sich selbst überlassenen Elektricität, nämlich der Gleichungen

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d a_n}{dt} + (m^2 + \varepsilon^2)\, a_n = 0,$$

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d b_n}{dt} + (m^2 + \varepsilon^2)\, b_n = 0,$$

ist in den für a_n und b_n aufgestellten Ausdrücken

$$a_n = A e^{-\varepsilon t} \sin m (t - A'),$$
$$b_n = B e^{-\varepsilon t} \sin m (t - B')$$

vorausgesetzt worden, dass m einen reellen Werth erhielte, was aber nicht immer der Fall ist. Es lässt sich nämlich diese Voraussetzung, da, $1/[\pi a^2 k] = w'$ gesetzt,

$$m = \frac{n}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N''}{M''(1+\lambda)} - \frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2 (1+\lambda)^2}}$$

war, auch so aussprechen, dass

$$\frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2 (1+\lambda)^2} < \frac{N''}{M''(1+\lambda)}$$

sein solle, oder wenn $\lambda = 0$

$$\frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2} < \frac{N''}{M''}.$$

Das Beispiel des dritten Drahts im vorigen Artikel zeigt dagegen, dass bei langen und dünnen Leitungsdrähten auch der Fall vorkommen kann, dass

$$\frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2} > \frac{N''}{M''}$$

ist, woraus einleuchtet, dass alsdann die Integration obiger Differentialgleichungen unter der angeführten Form illusorisch wird und daher unter einer anderen Form gesucht werden muss.

Setzt man alsdann zu diesem Zwecke

$$m = \frac{n}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2 (1+\lambda)^2} - \frac{N''}{M''(1+\lambda)}},$$

so erhalten die beiden Differentialgleichungen folgende Form, nämlich

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{da_n}{dt} + (\varepsilon^2 - m^2)\, a_n = 0,$$

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{db_n}{dt} + (\varepsilon^2 - m^2)\, b_n = 0,$$

aus denen durch Integration

$$a_n = Ae^{-\varepsilon t} \cdot \left(e^{m(t-A')} - e^{-m(t-A')}\right),$$

$$b_n = Be^{-\varepsilon t} \cdot \left(e^{m(t-B')} - e^{-m(t-B')}\right),$$

hervorgeht. Die Integrationskonstanten A, A', B, B' werden hierin auf gleiche Weise, wie es Art. 13 geschehen, aus den für $t = 0$ gegebenen Werthen von $a^0{}_n$, $b^0{}_n$, $da^0{}_n/dt$, $db^0{}_n/dt$, durch welche die ursprüngliche Vertheilung der freien Elektricität im Leiter und die ursprünglichen Strömungen ausgedrückt werden, gefunden. Man erhält auf diese Weise

$$Ae^{-mA'} = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon + m)\, a^0{}_n + \frac{da^0{}_n}{dt}\right),$$

$$Ae^{+mA'} = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon - m)\, a^0{}_n + \frac{da^0{}_n}{dt}\right),$$

$$Be^{-mB'} = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon + m)\, b^0{}_n + \frac{db^0{}_n}{dt}\right),$$

$$Be^{+mB'} = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon - m)\, b^0{}_n + \frac{db^0{}_n}{dt}\right).$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man folgende beiden Gleichungen:

$$a_n = \frac{1}{2m}\left[\left((\varepsilon+m)a^0{}_n + \frac{da^0{}_n}{dt}\right) e^{-(\varepsilon-m)t} - \left((\varepsilon-m)a^0{}_n + \frac{da^0{}_n}{dt}\right) e^{-(\varepsilon+m)t}\right],$$

$$b_n = \frac{1}{2m}\left[\left((\varepsilon+m)b^0{}_n + \frac{db^0{}_n}{dt}\right) e^{-(\varepsilon-m)t} - \left((\varepsilon-m)b^0{}_n + \frac{db^0{}_n}{dt}\right) e^{-(\varepsilon+m)t}\right].$$

Setzt man endlich diese Werthe von a_n und b_n in die Gleichungen

$$E = \Sigma\left(a_n \sin\frac{ns}{a} + b_n \cos\frac{ns}{a}\right),$$

$$i = -\frac{a}{2}\,\Sigma\,\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right),$$

so findet man die Gesetze der Vertheilung der freien Elektricität und der Strömungen im kreisförmigen Leiter für die hier betrachteten Fälle.

Ein solcher Fall kommt nun bei jedem kreisförmigen Leiter vor, wenn nämlich die gegebene ursprüngliche Vertheilung der freien Elektricität und der Strömungen darin so beschaffen ist, dass der Werth von b^0_n oder $[1/n] \,.\, [da^0_n/dt]$ für $n=0$ nicht Null ist, und es ist daher dieser Fall von der Betrachtung Art. 15 ausgeschlossen worden, wo nur diejenigen Werthe von E_n und i_n erörtert wurden, welche für $n=1$, 2, 3 ... gelten. Ist nämlich $n=0$, so leuchtet von selbst ein, dass

$$\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2(1+\lambda)^2} > \frac{N''}{M''(1+\lambda)}$$

ist und dass alsdann

$$m = \frac{1}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a^2c^2w'^2}{128M''^2(1+\lambda)^2}}$$

zu setzen ist. Nun war aber

$$\varepsilon = \frac{c^2w'}{16M''(1+\lambda)},$$

woraus folgt, dass für $n=0$

$$m = \varepsilon$$

zu setzen ist.

Substituirt man nun diesen Werth von m in den oben angeführten Werthen von a_n und b_n, so erhält man

$$a_0 = a^0_0 + \frac{1}{2\varepsilon}\frac{da^0_0}{dt} - \frac{1}{2\varepsilon}\frac{da^0_0}{dt} \cdot e^{-2\varepsilon t},$$

$$b_0 = b^0_0 + \frac{1}{2\varepsilon}\frac{db^0_0}{dt} - \frac{1}{2\varepsilon}\frac{db^0_0}{dt} \cdot e^{-2\varepsilon t},$$

und hieraus durch Differentiation

$$\frac{da_0}{dt} = \frac{da^0_0}{dt} \cdot e^{-2\varepsilon t},$$

$$\frac{db_0}{dt} = \frac{db^0_0}{dt} \cdot e^{-2\varepsilon t}.$$

Setzt man nun diese Werthe in die Gleichungen

$$E_n = a_n \sin\frac{ns}{a} + b_n \cos\frac{ns}{a},$$

$$i_n = -\frac{a}{2n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

für $n=0$, ein, so findet man

$$E_0 = b^0_0 + \frac{1}{2\varepsilon}\frac{db^0_0}{dt}\left(1 - e^{-2\varepsilon t}\right),$$

$$i_0 = -\frac{s}{2}\frac{db^0_0}{dt} e^{-2\varepsilon t} + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{n}\frac{da_n}{dt}\right)_0,$$

wo $([1/n].[da_n/dt])_0$ den Werth von $([1/n].[da_n/dt])$ für $n=0$ bezeichnet; folglich, da $([1/n].[da_n/dt])_0 = ([1/n].[da^0{}_n/dt])_0 . e^{-2\varepsilon t}$ ist, und da in der Gleichung

$$i_n = -\frac{a}{2n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right),$$

die Koefficienten von $\sin(ns/a)$ und $\cos(ns/a)$ stets endliche Werthe haben sollen, wonach für $n=0$

$$\frac{da_0}{dt}=0 \quad \text{und} \quad \frac{db_0}{dt}=0$$

sein müsse,

$$E_0 = b^0{}_0,$$

$$i_0 = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{n}\frac{da^0{}_n}{dt}\right)_0 . e^{-2\varepsilon t}.$$

Hieraus ergiebt sich also, dass, wenn ein kreisförmiger Leiter ursprünglich seiner ganzen Länge nach gleichförmig mit freier Elektricität geladen ist, so dass jede Längeneinheit dieselbe Menge freier Elektricität $= b^0{}_0$ enthält, diese Ladung mit der Zeit t keine Aenderung erleidet, was auch von selbst unmittelbar einleuchtet. Ausserdem ergiebt sich aber, dass, wenn in demselben Leiter eine in allen Theilen gleiche Strömung ursprünglich vorhanden ist, diese vorhandene Strömung in dem Augenblicke, von dem an die Elektricität im Leiter sich selbst überlassen bleibt, nicht verschwindet, sondern mit arithmetisch wachsender Zeit t nach dem Gesetz einer geometrischen Reihe allmählig abnimmt. Leuchtet auch die Nothwendigkeit des allmähligen Verschwindens hierbei a priori ein, so liess sich doch a priori nicht übersehen, wie schnell es erfolgen müsse und welche Verschiedenheiten in dieser Schnelligkeit zwischen verschiedenen Leitern Statt finden.

Es ist für manche praktische Fragen von Interesse, zu bestimmen, — wenn ein Strom von bestimmter Intensität i in einem geschlossenen Leiter in demjenigen Augenblicke vorhanden ist, von dem an die Elektricität im Leiter sich ganz selbst überlassen bleibt, weil von aussen keine elektromotorische Kraft darauf wirkt, wie es z. B. der Fall ist, wenn ein gegen den Leiter bewegter inducirender Magnet durch Anstossen in seiner Bewegung plötzlich gehemmt wird, — wie gross die positive oder negative Elektricitätsmenge sei, welche von dem angegebenen Augenblicke an durch jeden Querschnitt des Leiters noch hindurchgeht; sowie ferner zu bestimmen, wie lang die Zeit ist, welche von demselben Augenblicke an verfliessen muss, bis die Stromintensität vom Werthe i bis $\frac{1}{2}i$ abgenommen habe.

Ist $i = (a/2)([1/n].[da^0{}_n/dt])_0$ für jenen Augenblick $t = 0$ gegeben, so ist die Stromintensität nach Verlauf der Zeit t

$$= i \cdot e^{-2\varepsilon t},$$

was, nach mechanischem Maasse ausgedrückt, die Menge der positiven Elektricität bezeichnet, welche bei dieser Stromintensität in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters gehen würde. Die Menge der positiven Elektricität, welche im Zeitelemente dt durch den Querschnitt des Leiters geht, ist hiernach

$$= i \cdot e^{-2\varepsilon t}\, dt,$$

und der von $t = 0$ bis $t = \infty$ hiervon genommene Integralwerth giebt die ganze positive Elektricitätsmenge, welche von dem betrachteten Augenblicke an überhaupt noch durch jeden Querschnitt des Leiters hindurchgeht, nämlich

$$i \int_0^\infty e^{-2\varepsilon t}\, dt = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot i.$$

Die in entgegengesetzter Richtung durch den Querschnitt gehende negative Elektricität ist ebenso gross.

Ferner ergiebt sich zur Bestimmung der Zeit t, in welcher die Stromintensität auf die Hälfte ihres Werthes herabsinkt, folgende Gleichung:

$$e^{-2\varepsilon t} = \frac{1}{2},$$

folglich $t = [1/2\varepsilon] \log \text{nat}\, 2$.

Nun war $\varepsilon = c^2 w'/[16 M''(1 + \lambda)]$, worin, für $n = 0$, $M'' = 2 \log(8a/\alpha)$ zu setzen ist; folglich ist, $\lambda = 0$ gesetzt, jene durch den Querschnitt des Leiters gehende Elektricitätsmenge

$$\frac{1}{2\varepsilon} \cdot i = \frac{16}{c^2 w'} \cdot \log \frac{8a}{\alpha} \cdot i = \frac{2}{W'} \log \frac{8a}{\alpha} \cdot i,$$

wenn $W' = [c^2/8] . w'$ den Widerstand der Längeneinheit des Leiters nach magnetischem Maasse bezeichnet.

Die Zeit, in welcher die Stromintensität auf die Hälfte ihres Werths herabsinkt, ist dann, in Sekunden ausgedrückt,

$$\frac{1}{2\varepsilon} \cdot \log 2 = \frac{16}{c^2 w'} \cdot \log \frac{8a}{\alpha} \cdot \log 2 = \frac{2}{W'} \cdot \log \frac{8a}{\alpha} \cdot \log 2.$$

Für die Art. 16 als Beispiele angeführten Drähte ergeben sich hiernach folgende Werthe:

	1. Draht.	2. Draht.	3. Draht.
$\frac{1}{2\varepsilon}$	$\frac{1}{104607}$	$\frac{1}{60726}$	$\frac{1}{567581}$
$\frac{\log 2}{2\varepsilon}$	$\frac{1}{150916}$	$\frac{1}{87609}$	$\frac{1}{818846}$.

So klein hiernach auch der Bruchtheil $1/2\varepsilon$ ist, den die von dem verschwindenden Strome durch den Querschnitt des Leiters geführte positive Elektricitätsmenge von derjenigen bildet, welche bei der ursprünglichen Stromintensität in der Zeiteinheit durch den Querschnitt gehen würde, so könnte doch jene Elektricitätsmenge eine sehr starke *Ladung* des Leiters hervorbringen, wenn sie dazu verwendet würde. Denn wäre z. B. die ursprünglich vorhandene Stromintensität gleich der *magnetischen Maasseinheit* (bei welcher 1 Milligramm Wasser in $106\frac{2}{3}$ Sekunde zersetzt wird), so würde die bei diesem Strome in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters gehende positive Elektricitätsmenge $155\,370 \,.\, 10^6$ *elektrostatische Maasseinheiten* betragen, und es würden, während der Strom im 1. Drahte verschwände, noch $[155\,370/104\,607] \,.\, 10^6$, d. i. fast $1\frac{1}{2}$ Million *elektrostatischer Maasseinheiten* positiver Elektricität durch jeden Querschnitt des Leiters geführt werden, d. i. etwa der 24. Theil der schwächsten, oder der 33. Theil der stärksten Ladung der kleinen *Leidener Flasche*, welche zu dem in der vorigen Abhandlung, im V. Bande, beschriebenen Versuche gebraucht worden, wo jene Ladungen, S. 254,[1]) näher bestimmt sind.

Man sieht leicht ein, dass ein ähnliches Verschwinden des in einem geschlossenen Leiter vorhandenen Stroms in dem Augenblicke eintritt, wo die Kette eines galvanischen Stroms gelöst wird, und dass dann die von dem verschwindenden Strome durch den mittelsten Querschnitt des Leiters geführte positive Elektricitätsmenge wirklich zur *Ladung* der einen Hälfte des Leiters, sowie die in entgegengesetzter Richtung durch denselben Querschnitt geführte negative Elektricitätsmenge zur Ladung der anderen Hälfte des Leiters verwendet wird, und dass durch diese entgegengesetzten Ladungen an der Stelle, wo die Kette durchbrochen wurde, der *Lösungsfunke* hervorgebracht wird, wo es von Interesse ist, die durch den *Lösungsfunken* entladenen *Elektricitätsmengen* kennen zu lernen.

Ebenso leuchtet die Wichtigkeit einer weiter auszuführenden Entwickelung der Gesetze des Stromverschwindens für die Bestimmung der dadurch auf andere Leiter ausgeübten Induktionskräfte ein, zumal für

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 641.]

die Theorie der darauf gebauten *Ruhmkorff'schen* und anderer ähnlichen *Induktionsmaschinen*, für welche hierdurch eine Grundlage gegeben ist.

18.

Beziehung zur Wärmeleitung.

Die beiden im vorhergehenden Artikel für a_n und b_n gefundenen Gleichungen, nämlich

$$a_n = \frac{1}{2m}\left[\left((\varepsilon+m)\,a^0{}_n + \frac{da^0{}_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon-m)t} - \left((\varepsilon-m)\,a^0{}_n + \frac{da^0{}_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon+m)t}\right],$$

$$b_n = \frac{1}{2m}\left[\left((\varepsilon+m)\,b^0{}_n + \frac{db^0{}_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon-m)t} - \left((\varepsilon-m)\,b^0{}_n + \frac{db^0{}_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon+m)t}\right],$$

gehen für wachsende Werthe von t, wo endlich e^{-2mt} gegen 1 verschwindet, in die einfacheren Gleichungen über:

$$a_n = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon+m)\,a^0{}_n + \frac{da^0{}_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon-m)t},$$

$$b_n = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon+m)\,b^0{}_n + \frac{db^0{}_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon-m)t},$$

und setzt man diese Werthe von a_n und b_n in die Gleichungen

$$E = \Sigma\left(a_n \sin\frac{ns}{a} + b_n \cos\frac{ns}{a}\right),$$

$$i = -\frac{a}{2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

ein, so ergeben sich folgende Gesetze der Vertheilung der freien Elektricität und der Strömungen im kreisförmigen Leiter:

$$E = \Sigma\,\frac{1}{2m}\left[\left((\varepsilon+m)\,a^0{}_n + \frac{da^0{}_n}{dt}\right)\sin\frac{ns}{a} + \left((\varepsilon+m)\,b^0{}_n + \frac{db^0{}_n}{dt}\right)\cos\frac{ns}{a}\right]e^{-(\varepsilon-m)t},$$

$$i = \frac{a}{4}\Sigma\frac{\varepsilon-m}{mn}\left[\left((\varepsilon+m)\,b^0{}_n + \frac{db^0{}_n}{dt}\right)\sin\frac{ns}{a} - \left((\varepsilon+m)\,a^0{}_n + \frac{da^0{}_n}{dt}\right)\cos\frac{ns}{a}\right]e^{-(\varepsilon-m)t}.$$

Man erkennt hieraus leicht, dass in denjenigen Fällen, wo $\varepsilon - m/[n^2] = \beta$ ein von n unabhängiger Koefficient ist,

$$i = -\frac{a^2\beta}{2}\cdot\frac{dE}{ds},$$

$$\frac{di}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{dE}{dt}$$

erhalten wird, woraus durch Elimination von i

$$\frac{dE}{dt} = a^2\beta \frac{d^2E}{ds^2}$$

folgt, eine Gleichung von der nämlichen Form wie die Gleichung für die Wärmeleitung in festen Körpern.

Nun war aber im vorigen Artikel

$$m = \frac{n}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a^2c^2w'^2}{128\,n^2M''^2(1+\lambda)^2} - \frac{N''}{M''(1+\lambda)}}$$

gesetzt worden, worin $c^2w'/[16M''(1+\lambda)] = \varepsilon$ war, wonach also

$$m = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{128N''M''(1+\lambda)}{a^2c^2w'^2} \cdot n^2}.$$

In allen Fällen nun, wo die Werthe von $n^2/[a^2c^2w'^2]$ und von α/a sehr klein sind, kann hierfür gesetzt werden

$$m = \varepsilon \left(1 - \frac{256\left(\log \frac{8a}{\alpha}\right)^2 \cdot (1+\lambda)}{a^2c^2w'^2} \cdot n^2\right),$$

woraus $\varepsilon - m = [8/a^2w']\, n^2 \log(8a/\alpha)$, folglich

$$\beta = \frac{8}{a^2w'} \cdot \log \frac{8a}{\alpha}$$

ein von n unabhängiger Koefficient ist.

Es ergeben sich hiernach also für die Ladungsänderungen der Elektricität in den eben bezeichneten Fällen ähnliche Gesetze wie für die Wärmeleitung in festen Körpern, was schon von Thomson und Kirchhoff nachgewiesen worden ist. Es verdient jedoch dabei besonders hervorgehoben zu werden, dass, wenn auch der Ausdruck der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die grösseren Wellenzüge, d. i. für kleinere Werthe von n, imaginär wird, und daher für diesen Theil der Bewegung andere Gesetze eintreten, die sich mehr oder weniger den Gesetzen der Wärmeleitung in festen Körpern nähern, doch ein anderer Theil der Bewegung stets übrig bleibt, welcher kleinere Wellenzüge giebt, für welche grössere Werthe von n gelten, für die der Ausdruck der Fortpflanzungsgeschwindigkeit reell bleibt und also die Art. 13 entwickelten Gesetze Gültigkeit behalten. Es finden also in einem solchen Leiter nach Störung des Gleichgewichts immer *Wellenzüge* Statt, die mit

bestimmten *Geschwindigkeiten* fortgepflanzt werden, aber es ist keine *reine Wellenbewegung* vorhanden, sondern sie ist mit anderen Bewegungen vermischt, welche den der geleiteten Wärme ähnlichen Gesetzen unterworfen sind.

Beachtet man nun alle Verhältnisse, welche aus einer solchen Vermischung von Bewegungen hervorgehen, die ganz verschiedenen Gesetzen unterworfen sind, so leuchtet von selbst ein, dass die von Wheatstone beobachtete *Ungleichzeitigkeit der Funken* an zwei von einander sehr entfernten Unterbrechungsstellen eines solchen langen Leitungsdrahts durchaus keinen Schluss auf eine bestimmte Fortpflanzungsgeschwindigkeit gestattet, dass überhaupt die Wheatstone'sche Beobachtungsmethode, so sinnreich sie auch ist, und so werthvoll die damit erhaltenen Resultate in anderen Beziehungen sein würden, wenn sie wirklich genau verbürgt werden könnten, doch unmittelbar zu dem vorliegenden Zwecke gar nicht geeignet ist, wie es überhaupt in keiner Weise gelingen wird, solche Beobachtungsmethoden ausfindig zu machen, mit denen die Gesetze aller Bewegungsänderungen der Elektricität in einem Leiter nach gestörtem Gleichgewichte *rein erfahrungsmässig* begründet werden könnten. Der Zweck der *Beobachtungen* wird daher hier darauf zu beschränken sein, die aus unserer bisherigen Kenntniss von der Elektricität abgeleiteten Gesetze zu *prüfen*. Deshalb war es nöthig, wie es in den vorhergehenden Artikeln versucht worden ist, diese Ableitung der Gesetze den zu ihrer Prüfung auszuführenden Beobachtungen vorauszuschicken, um so mehr, als die so aufgestellten Gesetze selbst *als Leitfaden* beim Suchen der zu ihrer Prüfung anzuwendenden *zweckmässigsten Beobachtungsmethoden* benutzt werden müssen.

19.

Schwingungen der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter.

Was nun die *zweckmässigsten Beobachtungsmethoden* zur Prüfung der elektrischen Bewegungsgesetze betrifft, so leuchtet aus den bisher entwickelten Gesetzen zunächst von selbst ein, dass bei der ausserordentlich grossen *Geschwindigkeit*, mit der sich nach diesen Gesetzen die meisten *elektrischen Wellenzüge* in guten Leitern fortpflanzen sollen, und bei der aus denselben Gesetzen sich ergebenden schnellen *Dämpfung* dieser Wellenzüge genaue *Beobachtungen und Messungen zu direkter Prüfung dieser Gesetze* auszuführen bei den durch die Sinneswerkzeuge allen Beobachtungen gesetzten Schranken kaum möglich sein dürfte. Eine genaue Ausführung von Messungen nimmt immer eine gewisse Zeit in Anspruch, die bei so flüchtigen Erscheinungen nicht dazu gestattet ist. Beachtet man daher, dass die feinsten Messungen in der

Physik diejenigen sind, welche entweder *Gleichgewichtserscheinungen*, oder *beharrliche Bewegungen*, oder *periodisch regelmässig wiederkehrende Erscheinungen*, wie z. B. die Pendelschwingungen sind, betreffen, so liegt es sehr nahe, auch zur Prüfung der Gesetze der Bewegung der Elektricität in Leitern, abgesehen von *konstanten Strömen*, eine Prüfungsmethode dieser Gesetze auf Beobachtungen *periodisch regelmässig wiederkehrender Bewegungen der Elektricität in Leitern* zu begründen, vorausgesetzt, dass sich Mittel zu feiner Ausführung solcher Beobachtungen finden lassen.

Periodisch regelmässig wiederkehrende Bewegungen der Elektricität können aber in einem Leiter nicht von selbst, sondern nur unter fortgesetzter Anregung äusserer elektromotorischer Kräfte, bestehen, und es bietet sich zu ihrer Hervorbringung die einfachste und für feinere Beobachtungen und Messungen zweckmässigste Methode in der schnellen Umdrehung eines kleinen Magnets um eine gegen seine magnetische Axe rechtwinkelige Drehungsaxe dar. Um aber einen Leitfaden zu zweckmässigen Einrichtungen für genaue Beobachtungen der so hervorgebrachten periodisch wiederkehrenden Bewegungen oder *Schwingungen* der Elektricität in einem Leiter zu gewinnen, soll zuvor versucht werden, die Gesetze solcher elektrischen Schwingungen in einem kreisförmigen Leiter aus den Art. 10 aufgestellten partiellen Differentialgleichungen zu entwickeln.

20.

Schwingungen durch Induktion eines rotirenden Magnets.

Die elektromotorische Kraft, welche durch schnelle Umdrehung eines kleinen Magnets in der Nähe des kreisförmigen Leiters auf irgend einen Punkt des Leiters s *in einem bestimmten Augenblicke* ausgeübt wird, kann, wenn a den Halbmesser bezeichnet, dargestellt werden durch

$$\Sigma\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right),$$

wo f_n und g_n nur von der Stellenzahl n abhängig sind. Alle diese auf verschiedene Punkte des Leiters s wirkenden Kräfte sind aber bei gleichförmiger Drehung des Magnets einem gleichen periodischen Wechsel unterworfen, und zwar sind sie bei zweckmässiger Anordnung dem Sinus eines mit der Zeit gleichförmig wachsenden Winkels proportional. Alle diese Kräfte können *für einen beliebigen Augenblick*, am Ende der Zeit t, dargestellt werden durch

$$\sin\mu t\,.\,\Sigma\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right).$$

Hiermit erhält man, wenn man in den beiden partiellen Differentialgleichungen am Schlusse von Art. 10 für f_n und g_n, welche dort beliebige Funktionen der Zeit bezeichneten, $f_n \sin \mu t$ und $g_n \sin \mu t$, worin f_n und g_n bestimmte von der Zeit unabhängige Werthe haben, einsetzt, die folgenden beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \frac{c^2}{8\pi a^2 k M''(1+\lambda)} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''(1+\lambda)} \cdot a_n - \frac{nc^2}{4aM''(1+\lambda)} \cdot g_n \sin \mu t = 0,$$

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} + \frac{c^2}{8\pi a^2 k M''(1+\lambda)} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''(1+\lambda)} \cdot b_n + \frac{nc^2}{4aM''(1+\lambda)} \cdot f_n \sin \mu t = 0.$$

Nun sieht man leicht, dass wenn

$$a_n = p \sin(\mu t + \varrho),$$
$$b_n = q \sin(\mu t + \varrho)$$

gesetzt wird, p, q, ϱ sich so bestimmen lassen, dass die damit erhaltenen Werthe von a_n und b_n den beiden partiellen Differentialgleichungen genügen. Setzt man nämlich die obigen Werthe von a_n und b_n und die daraus abgeleiteten Werthe

$$\frac{da_n}{dt} = p\mu \cos(\mu t + \varrho),$$

$$\frac{db_n}{dt} = q\mu \cos(\mu t + \varrho),$$

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} = -p\mu^2 \sin(\mu t + \varrho),$$

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} = -q\mu^2 \sin(\mu t + \varrho)$$

in die angeführten Gleichungen ein, so erhält man, wenn man Kürze halber $1/[\pi a^2 k] = w'$, und entweder, nach dem Ohm'schen Gesetze, $\lambda = 0$ setzt, oder M'' für $M''(1+\lambda)$ schreibt,

$$-p\mu^2 \sin(\mu t + \varrho) + \frac{p\mu c^2 w'}{8M''} \cos(\mu t + \varrho) + \frac{pn^2 c^2 N''}{2a^2 M''} \cdot \sin(\mu t + \varrho) - \frac{c^2 n}{4aM''} \cdot g_n \sin \mu t = 0,$$

$$-q\mu^2 \sin(\mu t + \varrho) + \frac{q\mu c^2 w'}{8M''} \cos(\mu t + \varrho) + \frac{qn^2 c^2 N''}{2a^2 M''} \cdot \sin(\mu t + \varrho) + \frac{c^2 n}{4aM''} \cdot f_n \sin \mu t = 0.$$

Entwickelt man hierin Sinus und Kosinus der Summe nach Sinus und Kosinus der Theile, so erhält man

$$\left(\frac{\mu c^2 w'}{8M''}\cdot p\sin\varrho+\left(\mu^2-\frac{n^2c^2N''}{2a^2M''}\right)\cdot p\cos\varrho+\frac{c^2n}{4aM''}\cdot g_n\right)\sin\mu t$$
$$+\left(\left(\mu^2-\frac{n^2c^2N''}{2a^2M''}\right)\cdot p\sin\varrho-\frac{\mu c^2w'}{8M''}\cdot p\cos\varrho\right)\cos\mu t=0,$$

$$\left(\frac{\mu c^2 w'}{8M''}\cdot q\sin\varrho+\left(\mu^2-\frac{n^2c^2N''}{2a^2M''}\right)\cdot q\cos\varrho-\frac{c^2n}{4aM''}\cdot f_n\right)\sin\mu t$$
$$+\left(\left(\mu^2-\frac{n^2c^2N''}{2a^2M''}\right)\cdot q\sin\varrho-\frac{\mu c^2w'}{8M''}\cdot q\cos\varrho\right)\cos\mu t=0.$$

Sollen nun diese beiden Gleichungen für jeden Werth von t gelten, so erhält man für $\cos\mu t=0$ die beiden Gleichungen

$$\frac{\mu c^2 w'}{8M''}\cdot p\sin\varrho+\left(\mu^2-\frac{n^2c^2N''}{2a^2M''}\right)\cdot p\cos\varrho+\frac{c^2n}{4aM''}\cdot g_n=0,$$
$$\frac{\mu c^2 w'}{8M''}\cdot q\sin\varrho+\left(\mu^2-\frac{n^2c^2N''}{2a^2M''}\right)\cdot q\cos\varrho-\frac{c^2n}{4aM''}\cdot f_n=0,$$

und für $\sin\mu t=0$ noch die dritte Gleichung, nämlich

$$\left(\mu^2-\frac{n^2c^2N''}{2a^2M''}\right)\sin\varrho-\frac{\mu c^2w'}{8M''}\cdot\cos\varrho=0,$$

aus denen p, q, ϱ so bestimmt werden, dass den beiden partiellen Differentialgleichungen durch die darnach bestimmten Werthe von a_n und b_n genügt wird. Man erhält nämlich

$$\varrho=\operatorname{arc\,tang}\frac{\mu a^2c^2w'}{4(2\mu^2a^2M''-n^2c^2N'')},$$

$$p=-\frac{ac^2n}{2(2\mu^2a^2M''-n^2c^2N'')}\cdot g_n\cos\varrho=-\frac{2ac^2n}{\sqrt{16(2\mu^2a^2M''-n^2c^2N'')^2+\mu^2a^4c^4w'^2}}\cdot g_n,$$

$$q=+\frac{ac^2n}{2(2\mu^2a^2M''-n^2c^2N'')}\cdot f_n\cos\varrho=+\frac{2ac^2n}{\sqrt{16(2\mu^2a^2M''-n^2c^2N'')^2+\mu^2a^4c^4w'^2}}\cdot f_n.$$

Fügt man zu den hierdurch bestimmten particularen Werthen von a_n und b_n, welche den partiellen Differentialgleichungen Genüge leisten, noch die Art. 13 für a_n und b_n, für den Fall, wo $f_n=0$ und $g_n=0$ war, gefundenen Werthe hinzu, so geben die beiden Summen die vollständigen Integralwerthe von a_n und b_n, nämlich

$$a_n=p\sin(\mu t+\varrho)+Ae^{-\varepsilon t}\cdot\sin\left(mt+\arcsin\frac{a^0{}_n}{A}\right),$$
$$b_n=q\sin(\mu t+\varrho)+Be^{-\varepsilon t}\cdot\sin\left(mt+\arcsin\frac{b^0{}_n}{B}\right),$$

worin A und B sowie ε und m die Art. 13 angegebene Bedeutung haben. Wenn m einen imaginären Werth hat, treten für die hinzugefügten Glieder die Art. 17 entwickelten Werthe von a_n und b_n ein. Es leuchtet aber ein, dass für wachsende Werthe von t die hinzugefügten Glieder abnehmen, und dass sie, wie Art. 17 gezeigt worden, schon nach Verlauf eines sehr kleinen Bruchtheils einer Sekunde als verschwindend betrachtet werden können, von wo an also die Bewegung der Elektricität im kreisförmigen Leiter eine gleichförmige periodisch wiederkehrende wird, deren Hervorbringung der Zweck der beschriebenen Methode mit dem rotirenden Magnete war.

Setzt man diese Werthe von a_n und b_n, mit Weglassung der mit der Zeit verschwindenden Glieder in die Gleichungen

$$E = \Sigma\left(a_n \sin\frac{ns}{a} + b_n \cos\frac{ns}{a}\right),$$

$$i = -\frac{a}{2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

ein, so ergeben sich für die regelmässig fortdauernde elektrische Schwingung folgende Gesetze der Vertheilung der freien Elektricität und der Strömungen im kreisförmigen Leiter:

$$E = \Sigma\sin(\mu t + \varrho)\left(p\sin\frac{ns}{a} + q\cos\frac{ns}{a}\right),$$

$$i = -\frac{a\mu}{2}\Sigma\frac{1}{n}\cos(\mu t + \varrho)\left(q\sin\frac{ns}{a} - p\cos\frac{ns}{a}\right),$$

worin p, q, ϱ die oben angeführten Werthe haben. Nun ergiebt sich aber aus jenen Werthen

$$p = -\frac{2n}{\mu a w'}\sin\varrho \cdot g_n,$$

$$q = +\frac{2n}{\mu a w'}\sin\varrho \cdot f_n.$$

Werden diese Werthe von p und q in beiden Gleichungen substituirt, so wird

$$E = \frac{2}{\mu a w'}\Sigma n\sin\varrho\sin(\mu t + \varrho)\left(f_n\cos\frac{ns}{a} - g_n\sin\frac{ns}{a}\right),$$

$$i = -\frac{1}{w'}\Sigma\sin\varrho\cos(\mu t + \varrho)\left(f_n\sin\frac{ns}{a} + g_n\cos\frac{ns}{a}\right),$$

oder, wenn $\sin(\mu t + \varrho)$ und $\cos(\mu t + \varrho)$ entwickelt werden,

$$E = \frac{2}{\mu a w'} \sin \mu t \cdot \Sigma n \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a}\right)$$

$$+ \frac{2}{\mu a w'} \cos \mu t \cdot \Sigma n \sin \varrho^2 \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a}\right),$$

$$i = \frac{1}{w'} \sin \mu t \cdot \Sigma \sin \varrho^2 \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right)$$

$$- \frac{1}{w'} \cos \mu t \cdot \Sigma \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right).$$

Wenn man hierin endlich

$$\frac{\Sigma \sin \varrho^2 \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right)}{\Sigma \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right)} = \operatorname{tang} \gamma,$$

$$\frac{\Sigma n \sin \varrho^2 \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a}\right)}{\Sigma n \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a}\right)} = \operatorname{tang} \gamma',$$

$$\left(\Sigma \sin \varrho^2 \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right)\right)^2 + \left(\Sigma \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right)\right)^2 = k^2,$$

$$\left(\Sigma n \sin \varrho^2 \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a}\right)\right)^2 + \left(\Sigma n \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a}\right)\right)^2 = k'^2$$

setzt, so erhält man

$$E = \frac{2}{\mu a w'} \cdot k' \sin(\mu t + \gamma'),$$

$$i = -\frac{1}{w'} \cdot k \cos(\mu t + \gamma).$$

Setzt man aber

$$\Sigma \sin \varrho^2 \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right) = f,$$

$$\Sigma \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right) = g,$$

$$\frac{df}{ds} = f', \qquad \frac{dg}{ds} = g',$$

so erhält man

$$E = \frac{2}{\mu w'} \sqrt{f'^2 + g'^2} \cdot \sin\left(\mu t + \text{arc tang}\frac{f'}{g'}\right),$$

$$i = -\frac{1}{w'} \sqrt{f^2 + g^2} \cdot \cos\left(\mu t + \text{arc tang}\frac{f}{g}\right),$$

woraus die Gleichung $di/ds = -\frac{1}{2}\, dE/dt$ leicht abgeleitet werden kann.

21.

Gleichheit der Phasen und Amplituden elektrischer Schwingungen in kreisförmigen Leitern.

Beachtet man, dass die von dem rotirenden Magnet auf den *ganzen* Leitungsdraht ausgeübte elektromotorische Kraft durch

$$\sin \mu t \cdot \int ds \cdot \Sigma\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)$$

dargestellt wird, und dass, wenn diese ganze Kraft nicht $= 0$ sein soll, g_0 einen bestimmten endlichen Werth haben müsse, so lässt sich der gefundene Werth von i übersichtlicher darstellen, wenn man in den angegebenen Werthen von tang γ und k^2 die ersten Glieder der als Summen dargestellten Reihen, nämlich die Glieder, welche der Stellenzahl $n = 0$ entsprechen, auf folgende Weise absondert, indem man mit ϱ_0 den Werth von ϱ für $n = 0$ bezeichnet:

$$\text{tg}\,\gamma = \frac{g_0 \sin\varrho_0^2 + \sum\limits_1^\infty \sin\varrho^2\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)}{g_0 \sin\varrho_0 \cos\varrho_0 + \sum\limits_1^\infty \sin\varrho\cos\varrho\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)},$$

$$\begin{aligned} k^2 = g_0^2 \sin\varrho_0^2 &+ 2g_0 \sin\varrho_0 \cos\varrho_0 \cdot \sum_1^\infty \sin\varrho\cos\varrho\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right) \\ &+ 2g_0 \sin\varrho_0^2 \cdot \sum_1^\infty \sin\varrho^2\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right) \\ &+ \left(\sum_1^\infty \sin\varrho\cos\varrho\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)\right)^2 \\ &+ \left(\sum_1^\infty \sin\varrho^2\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Da nun hierin

$$\sin\varrho = \frac{\mu a^2 c^2 w'}{\sqrt{16\,(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')^2 + \mu^2 a^4 c^4 w'^2}},$$

$$\cos\varrho = \frac{4\,(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')}{\sqrt{16\,(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')^2 + \mu^2 a^4 c^4 w'^2}}$$

war, so ergeben sich die Werthe von $\sin \varrho_0$ und $\cos \varrho_0$, wenn der Werth von M'' für $n = 0$ mit M_0'' bezeichnet wird,

$$\sin \varrho_0 = \frac{c^2 w'}{\sqrt{64 \mu^2 M_0''^2 + c^4 w'^2}}, \qquad \cos \varrho_0 = \frac{8 \mu M_0''}{\sqrt{64 \mu^2 M_0''^2 + c^4 w'^2}}.$$

Bedenkt man ausserdem, dass auch für sehr lange und dünne Leiter und für die grössten darstellbaren Rotationsgeschwindigkeiten des kleinen Magnets die Quotienten $\mu a^2 w'/N''$ und $\mu a/c$ sehr kleine Brüche sind, so leuchtet ein, dass mit hinreichender Näherung für alle Werthe von $n > 0$

$$\sin \varrho = \frac{\mu a^2 w'}{4 n^2 N''}, \qquad \cos \varrho = 1$$

gesetzt werden kann. Hieraus leuchtet ein, dass, da schon $\mu a^2 w'/N''$ ein sehr kleiner Bruch ist, $\sin \varrho = \mu a^2 w'/[4 n^2 N'']$ um so mehr als verschwindend betrachtet werden darf, je grösser die Stellenzahl n ist. Es wird daher meist auch für sehr lange und dünne Leiter und bei sehr grossen Rotationsgeschwindigkeiten des kleinen Magnets näherungsweise

$$\gamma = \varrho_0 \quad \text{und} \quad k = g_0 \sin \varrho_0$$

angenommen werden können, wonach

$$i = -\frac{g_0}{w'} \sin \varrho_0 \cos (\mu t + \varrho_0)$$

gefunden wird.

Da g_0/w' und ϱ_0 von s unabhängige konstante Werthe haben, so geht daraus hervor, dass die elektrischen Schwingungen in allen Theilen eines kreisförmigen Leiters gleichzeitig gleiche *Phase* und gleiche *Amplitude* haben, auch wenn die von dem rotirenden Magnet ausgeübten elektromotorischen Kräfte auf die verschiedenen Theile des Leiters sehr ungleich vertheilt sind.

Aus dieser Gleichheit der Schwingungsphasen und Schwingungsamplituden in allen Theilen des kreisförmigen Leiters geht hervor, dass die Stromintensität in irgend einem Punkte stets der mittleren Stromintensität im ganzen Leiter gleich ist. Das Gesetz für die Mittelwerthe der Stromintensitäten in geschlossenen Leitern in ihrer Abhängigkeit von den Mittelwerthen der elektromotorischen Kräfte ist aber schon Art. 9 entwickelt worden, wo sich ergab, wenn der Mittelwerth der von aussen herrührenden elektromotorischen Kräfte mit $[1/2\pi a] . S$ bezeichnet und

$$\frac{8}{c^2} \int M_0'' ds + \frac{4\pi a}{r \mathfrak{E}} = p, \qquad \frac{2\pi a}{\pi a^2 k} = w = 2\pi a w'$$

gesetzt wird, dass

$$i = \frac{1}{p} e^{-\frac{wt}{p}} \cdot \int e^{\frac{wt}{p}} \cdot S dt$$

ist. Wendet man nun dieses Gesetz auf unseren Fall an, wo in einem Leiter elektrische Schwingungen von einem rotirenden Magnet hervorgebracht werden, und wo der Mittelwerth der vom rotirenden Magnet auf den Leiter ausgeübten elektromotorischen Kräfte

$$\frac{1}{2\pi a} \cdot S = g_0 \sin \mu t$$

war, so erhält man

$$i = \frac{2\pi a g_0}{p} e^{-\frac{wt}{p}} \cdot \int e^{\frac{wt}{p}} \cdot \sin \mu t \cdot dt = \frac{2\pi a g_0}{p} \cdot p \frac{\frac{w}{p} \sin \mu t - \mu \cos \mu t}{\frac{w^2}{p^2} + \mu^2}$$

$$= -\frac{2\pi a g_0}{\mu p \sqrt{\left(\frac{w}{\mu p}\right)^2 + 1}} \cdot \cos\left(\mu t + \text{arc tang} \frac{w}{\mu p}\right).$$

Da nun $p = [8/c^2] . \int M_0'' ds + 4\pi a/[r\mathfrak{E}] = [8/c^2] . \int M_0'' (1 + \lambda) ds$, und $w = 2\pi a w'$ ist, so erhält man, wenn auch hier wie Art. 20 zur Vereinfachung M_0'' statt $M_0'' (1 + \lambda)$ geschrieben wird,

$$\frac{w}{\mu p} = \frac{\pi a c^2 w'}{4 \mu \int M_0'' ds} = \text{tg}\, \varrho_0, \quad \frac{w}{\mu p \sqrt{\left(\frac{w}{\mu p}\right)^2 + 1}} = \frac{2\pi a w'}{\mu p \sqrt{\left(\frac{w}{\mu p}\right)^2 + 1}} = \sin \varrho_0,$$

folglich übereinstimmend mit dem oben für *kreisförmige* Leiter gefundenen Resultate,

$$i = -\frac{g_0 \sin \varrho_0}{w'} \cdot \cos(\mu t + \varrho_0).$$

Da nun aber das obige Gesetz, für die Mittelwerthe der Stromintensitäten in geschlossenen Leitern in ihrer Abhängigkeit von den Mittelwerthen der elektromotorischen Kräfte, Art. 9 nicht blos auf *kreisförmige* Leiter beschränkt, sondern unabhängig von der Betrachtung der Gestalt des geschlossenen Leiters gefunden worden war, so ergiebt sich daraus, dass das daraus für den Fall, wo die von einem rotirenden Magnet herrührenden elektromotorischen Kräfte gegeben sind, abgeleitete Gesetz ebenfalls für geschlossene Leiter von beliebiger Gestalt gilt.

Das angeführte Resultat, dass *Phasen* und *Amplituden* elektrischer Schwingungen in kreisförmigen Leitern überall gleich seien, beruht auf

der Voraussetzung, dass die Quotienten $\mu a^2 w'/N''$ und $\mu a/c$ sehr kleine Brüche sind. Da nun diese Quotienten mit der Länge und Feinheit des Leiters und mit der Rotationsgeschwindigkeit des kleinen Magnets wachsen, so ist es von Interesse, die Werthe derselben für einige Beispiele von langen und feinen Leitern bei grossen Rotationsgeschwindigkeiten des kleinen Magnets wirklich zu berechnen. Werden dazu die drei schon Art. 16 als Beispiele gebrauchten Leitungsdrähte gewählt, so ergeben sich die in folgender Tafel berechneten Werthe.

	1. Draht	2. Draht	3. Draht
a	1000	1000000	1000000
w'	$\frac{1}{120697 \cdot 10^{12}}$	$\frac{1}{120697 \cdot 10^{12}}$	$\frac{1}{12070 \cdot 10^{12}}$
N'' (für $n=1$)	15,119	28,935	31,237
$100 \frac{a^2 w'}{N''}$	$\frac{1}{18248 \cdot 10^6}$	$\frac{1}{34939}$	$\frac{1}{3770}$
$100 \frac{a}{c}$	$\frac{1}{4394500}$	$\frac{1}{4394}$	$\frac{1}{4394}$

Die beiden letzten Reihen dieser Tafel enthalten die Werthe der beiden Quotienten für die drei zum Beispiel genommenen Drähte, wenn $\mu = 100$, d. i. bei 15,965 Umdrehungen des Magnets in 1 Sekunde. Man sieht, dass in allen diesen Fällen die Werthe dieser beiden Quotienten sehr kleine Brüche sind, indessen erkennt man daraus auch, da diese Werthe bei 159,65 Umdrehungen in 1 Sekunde 10 Mal grösser, bei 1596,5 Umdrehungen in 1 Sekunde 100 Mal grösser sein würden, dass doch wirklich Fälle vorkommen können, wo jene Quotienten Brüche von erheblicher Grösse werden, und wo also das Gesetz der Gleichheit der *Phasen* und *Amplituden* in allen Theilen des kreisförmigen Leiters nicht mehr gelten würde.

22.

Vertheilung der freien Elektricität während der elektrischen Schwingung in einem kreisförmigen Leiter.

Das Gesetz der Vertheilung der freien Elektricität während der elektrischen Schwingung in einem kreisförmigen Leiter ist in dem, Art. 20 gefundenen Ausdruck für die Dichtigkeit E enthalten, nämlich

$$E = \frac{2}{\mu a w'} \cdot k' \sin(\mu t + \gamma'),$$

worin der Koefficient k' durch die Gleichung

$$k'^2 = \left(\Sigma n \sin\varrho^2 \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)\right)^2 + \left(\Sigma n \sin\varrho\cos\varrho \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)\right)^2$$

bestimmt war.

Man sieht hieraus, dass auch die Stärke der Ladung mit freier Elektricität in jedem Punkte des kreisförmigen Leiters proportional dem Sinus eines mit t proportional wachsenden Bogens wechselt, dass aber das Ladungsmaximum $= 2k'/[\mu a w']$, welches für den Sinus $= 1$ Statt findet, in verschiedenen Punkten des Leiters verschieden ist, und zwar, dass näherungsweise in denjenigen Punkten die Aenderung von Element zu Element am grössten ist, wo die von dem rotirenden Magnet ausgeübte elektromotorische Kraft von ihrem Mittelwerthe am meisten abweicht; wo diese elektromotorische Kraft ihrem Mittelwerthe gleich ist, ist näherungsweise auch die Ladung gleich, und zwar $= 0$. Es würde also in dem ganzen kreisförmigen Leiter nirgends freie Elektricität vorhanden sein, wenn der rotirende Magnet auf alle Punkte desselben gleich wirkte, wobei vorausgesetzt ist, dass der kreisförmige Leiter, unabhängig vom rotirenden Magnet, keine Ladung von freier Elektricität besitze.

Da nämlich nach dem vorhergehenden Artikel $\sin\varrho$ und $\cos\varrho$ für $n = 0$ endliche Werthe behalten, so leuchtet ein, dass für obigen Werth von k'^2 geschrieben werden kann

$$k'^2 = \left(\sum_1^\infty n \sin\varrho^2 \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)\right)^2 + \left(\sum_1^\infty n \sin\varrho\cos\varrho \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)\right)^2.$$

Ferner kann, unter den im vorigen Artikel angeführten Voraussetzungen,

$$\sin\varrho = \frac{\mu a^2 w'}{4n^2 N''}, \qquad \cos\varrho = 1$$

gesetzt, und, wenn $\sin\varrho$ einen sehr kleinen Werth hat, der erste Theil von k'^2, welcher unter dem Summenzeichen den Faktor $\sin\varrho^2$ enthält, gegen den zweiten vernachlässigt werden, wonach also

$$k' = \frac{\mu a^2 w'}{4} \sum_1^\infty \frac{1}{nN''} \left(f \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)$$

erhalten wird. Hieraus ergiebt sich nun

$$\frac{dk'}{ds} = -\frac{\mu a w'}{4} \sum_1^\infty \frac{1}{N''} \left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right).$$

Ist endlich $\log[8a/\alpha]$ eine sehr grosse Zahl und konvergirt ferner die Reihe $\Sigma\,(f_n \sin(ns/a) + g_n \cos(ns/a))$ so rasch, dass alle Glieder der Reihe

für $n > \nu$ vernachlässigt werden können, während $2\,[1 + \frac{1}{3} + \ldots 1/(2\nu - 1)] + \nu^2 \alpha/[8a]$ gegen $\log[8a/\alpha]$ verschwindet, so darf $N'' = 2 \log [8a/\alpha]$ und

$$\frac{dk'}{ds} = -\frac{\mu a w'}{8 \log \frac{8a}{\alpha}} \left(\sum_0^\nu \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) - g_0 \right)$$

gesetzt werden.

Nun ist aber der Faktor

$$\sum_0^\nu \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) - g_0$$

die Differenz der im Punkte s von dem rotirenden Magnet ausgeübten elektromotorischen Kraft von ihrem Mittelwerthe in der ganzen Länge des Leiters; also ist dk'/ds, oder die Aenderung von k' im Verhältniss zur Aenderung von s, jener Differenz proportional.

Von der Stärke dieser Ladungen hängt, wie man leicht sieht, das Ueberspringen elektrischer Funken und der Grad der nothwendigen *Isolirung* des Leiters ab, wenn solches Ueberspringen vermieden werden soll, ein Gegenstand, der einer ausführlicheren Erörterung bedarf, aber erst dann, wenn es sich um Leiter handelt, die nicht blos einen einfachen Kreis, sondern ein System sehr nahe aneinander liegender Spiralwindungen bilden, ein Fall, der von der Betrachtung hier ausgeschlossen worden ist.

23.

Leitfaden für die Beobachtungen.

Es bleibt noch übrig, die Resultate der vorhergehenden Entwickelung als Leitfaden zu den *Beobachtungen* zu benutzen, durch welche jene Resultate an der Erfahrung geprüft werden sollen. Eines solchen Leitfadens bedarf es besonders, wenn keine Analogien mit anderen Bewegungserscheinungen vorliegen, welche dazu benutzt werden können, und es geht aus dem Vorhergehenden hervor, dass solche Analogien in vielen Beziehungen hier fehlen.

Es kommt nämlich bei mangelnden Analogien mit anderen schon bekannten und erforschten Bewegungserscheinungen vor Allem auf Bestimmung von *Beobachtungsobjekten* an, die besonders wichtig und *genauerer Bestimmung durch Beobachtungen* fähig sind. Ferner kommt es auf die nähere Kenntniss der *Verhältnisse* an, unter welchen über diese Beobachtungsobjekte die genauesten Bestimmungen zu erlangen sind. Es leuchtet nun ein, dass die genauere Erörterung dieser *Verhältnisse* am zweckmässigsten mit der Erörterung der *Hülfsmittel* zu

ihrer wirklichen Darstellung und mit der *Ausführung der Beobachtungen* selbst verbunden wird, was zusammen den Gegenstand des folgenden Abschnitts dieser Abhandlung bilden wird. Am Schlusse dieses Abschnitts sollen daher nur kurz diejenigen *Beobachtungsobjekte* bezeichnet werden, die nach der vorhergehenden Entwickelung als besonders *wichtig und einer genaueren Bestimmung durch Beobachtungen fähig* erscheinen.

Die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit*, die bei anderen Bewegungserscheinungen von so grosser Wichtigkeit ist, scheint nach dem, was schon Art. 18 darüber bemerkt worden, hier nicht dazu gerechnet werden zu können, es bieten sich dafür aber verschiedene andere Gegenstände der Beobachtung dar.

Es sind hauptsächlich *drei* Gegenstände, welche sich nach den entwickelten Gesetzen als besonders zur Prüfung der aufgestellten Gesetze geeignete Beobachtungsgegenstände herausstellen, nämlich *erstens* die Vergleichung der Schwingungsphasen und der Schwingungsamplituden der Elektricität an verschiedenen Stellen eines langen geschlossenen Leiters, auf welchen ein rotirender Magnet inducirend wirkt; *zweitens* das Gesetz der Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets; *drittens* endlich bietet sich noch ein wichtiger Gegenstand für Beobachtungen in der *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude* der durch einen rotirenden Magnet in einem geschlossenen Leitungsdraht hervorgebrachten elektrischen Schwingungen von der diesem Leitungsdrahte gegebenen *Gestalt* dar.

Die *Gleichheit der Schwingungsphase und der Schwingungsamplitude*, welche nach den entwickelten Gesetzen auch in sehr langer geschlossener Kette und bei grosser Rotationsgeschwindigkeit in allen Theilen Statt finden soll, ist ein Gegenstand, der zur Prüfung an der Erfahrung sich um so mehr eignet, je unerwarteter dieses Resultat erscheint. Denn ohne genauere Entwickelung der Verhältnisse würde wohl bei einer sehr langen Kette, wo alle Bewegungen von einer Stelle ausgehen und bei ihrer Verbreitung einer sehr starken Dämpfung oder Absorption unterworfen sind, erwartet werden, dass auch bei fortgesetzter Erregung von Schwingungen alle Bewegungen immer nur sehr geschwächt zu den entferntesten Theilen der Kette gelangten. Da ferner die Verbreitung von der Erregungsstelle nach beiden Seiten geschieht, dürfte man erwarten, dass bei dem Wechsel positiver und negativer Schwingungen durch das Zusammentreffen von entgegengesetzten Seiten an einigen Stellen *Verstärkung*, an anderen *Aufhebung* Statt finden werde, wie bei Interferenzerscheinungen. Endlich, wenn auch in Folge solcher Begegnung Schwingungen, die in allen Theilen der Kette vollkommen synchron sind, *möglich* wären, so dürfte man doch erwarten, dass dieser *mögliche* Fall an besondere Bedingungen, z. B. an bestimmte Rotations-

geschwindigkeiten geknüpft wäre, nicht aber, dass in allen Theilen der Kette solche synchronische Schwingungen stets, *bei jeder Rotationsgeschwindigkeit*, sich bildeten. Das angeführte Resultat ist daher nach allen Analogien, welche die Verbreitung von Bewegung in anderen bekannten Fällen bietet, höchst unerwartet, und eignet sich daher besonders zur Prüfung der Resultate der auf unsere bisherige Kenntniss von der Elektricität gebauten Theorie an der Erfahrung.

Die *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit* des Magnets eignet sich ferner von einer anderen Seite dazu, nämlich von Seiten der *quantitativen Prüfung* des entwickelten Gesetzes, durch Beobachtungen und Messungen, die nach wachsender Rotationsgeschwindigkeit in Reihen geordnet werden.

Endlich, wenn es auch noch gelänge, über die *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Gestalt der Kette* feinere Bestimmungen durch genaue Beobachtungen und Messungen zu gewinnen, so würde dadurch nicht blos eine neue Prüfung der entwickelten Gesetze, sondern auch eine wesentliche Ergänzung unserer bisherigen Kenntniss von der Elektricität selbst, aus der diese Gesetze abgeleitet worden, erlangt werden. Nach unserer bisherigen Kenntniss muss zwar der Elektricität als einem Körper eine *Masse* zugeschrieben werden, und diese Masse übt auf eine andere ähnliche Masse eine *Kraft* aus; es fehlt aber noch an der Kenntniss des *Verhältnisses* jener Masse zu dieser Kraft. Die Kenntniss dieses *Verhältnisses* war nun auch nicht nöthig, so lange es sich um *Gleichgewichtserscheinungen* oder um *beharrliche Bewegungen* handelte, wo die Kenntniss der *Kräfte* genügte; die verschiedenen Elektricitätsmengen konnten dabei, statt nach ihren Massen, nach der Grösse der *Kräfte* unterschieden werden, die sie auf eine und dieselbe Elektricitätsmenge in der Einheit der Entfernung ausübten, und diese letztere Elektricitätsmenge konnte durch die *Kraft* bestimmt werden, die sie auf eine *gleiche* Elektricitätsmenge in der Einheit der Entfernung ausübte. Eine so bestimmte Elektricitätsmenge war nun wirklich die sogenannte *elektrostatische Maasseinheit.* Handelt es sich aber nicht um blosses *Gleichgewicht* oder um blosse *Erhaltung einer schon vorhandenen Bewegung*, sondern soll einer Elektricitätsmenge *neue Bewegung* ertheilt werden, welche sie vorher nicht besass, so reicht die blosse Kenntniss der Kräfte nicht aus, sondern es bedarf auch der Kenntniss der *Masse* der in Bewegung zu setzenden Elektricität, oder des *Verhältnisses* dieser Masse zu der von ihr auf die elektrostatische Maasseinheit in der Einheit der Entfernung ausgeübten Kraft, d. i. der Kenntniss der *Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten, welche auf die Masseneinheit* (Milligramm) *Elektricität gehen.* Diese Zahl ist oben mit r bezeichnet worden und die *Masse* jeder in *elektrostatischen Maass-*

einheiten bestimmten Elektricitätsmenge $\mathfrak{E}$ wird damit $= [1/r] . \mathfrak{E}$ gefunden. Es leuchtet ein, dass wenn nun auf diese *Masse* irgend eine *Kraft* f wirkt, der *Quotient* dieser Kraft durch die Masse $[1/r] . \mathfrak{E}$, auf welche sie wirkt, die *Geschwindigkeit* der von der Kraft der Masse in der Zeiteinheit ertheilten Bewegung $= fr/\mathfrak{E}$ giebt.

Unsere Kenntniss vorhandener Elektricitätsmengen nach *elektrostatischen Maasseinheiten* ist nun aber in der That durch die Beobachtungen auf die in den Körpern vertheilten *freien* Elektricitätsmengen beschränkt und erstreckt sich nicht auf die im *neutralen* Fluidum enthaltenen Elektricitätsmengen. Ebenso ist unsere Kenntniss der Kräfte f auf solche beschränkt, welche auf *freie* Elektricitätsmengen wirken, während von denjenigen Kräften, welche auf das *neutrale* Fluidum wirken, durch die Beobachtungen nur die Kenntniss des mit dem Namen *elektromotorischer Kraft* bezeichneten Koefficienten f' erlangt wird, welcher mit der unbekannten *Zahl der im neutralen Fluidum enthaltenen elektrostatischen Maasseinheiten* $\mathfrak{E}$ multiplicirt werden muss, um f zu erhalten, also $f = f' \cdot \mathfrak{E}$. Dagegen brauchen wir auch in der ganzen Elektrodynamik nicht die *Geschwindigkeit* selbst, sondern nur die *Stromdichtigkeit* und deren Aenderungen zu erforschen, d. i. das Produkt der in der strömenden Elektricität enthaltenen *Zahl elektrostatischer Maasseinheiten* $\mathfrak{E}$ in jene *Geschwindigkeit* $rf/\mathfrak{E}$, d. i. $rf = f' \cdot r\mathfrak{E}$, wo die *elektromotorische Kraft* f' aber schon bekannt, also blos das Produkt $r\mathfrak{E}$ zu bestimmen ist.

Ist hiernach, in Uebereinstimmung mit der vorhergegangenen Entwickelung zur Bestimmung der *Stromdichtigkeiten* und deren Aenderungen, nicht die Kenntniss der Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten r, welche auf die Masseneinheit (Milligramme) gehen, selbst nöthig, sondern bloss die Kenntniss des Produkts $r\mathfrak{E}$, so leuchtet ein, dass umgekehrt *aus Beobachtungen der Stromdichtigkeiten* und deren Aenderungen auch nur die Kenntniss dieses Produkts $r\mathfrak{E}$ erworben werden kann; es leuchtet aber zugleich auch die Wichtigkeit von der Kenntniss dieses Produkts $r\mathfrak{E}$ ein, deren Erwerbung, nach dem durch die entwickelten Gesetze gegebenen Leitfaden, durch feine und genaue Beobachtungen über die *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Gestalt der Kette* zu versuchen, sich als das Zweckmässigste herausstellt.

Hierzu ist aber die genaueste Kenntniss der *Verhältnisse*, unter welchen über diese Abhängigkeit sichere Bestimmungen zu erlangen sind, nothwendig, deren Erörterung, wie schon bemerkt, im folgenden Abschnitte dieser Abhandlung mit der Erörterung der Mittel zur wirklichen Darstellung verbunden werden soll.

II. *Schwingungsbeobachtungen.*

24.

Methode der Beobachtung.

Nach dem im vorigen Abschnitte für die Beobachtungen gegebenen Leitfaden sollen hauptsächlich die *Amplituden-* und *Phasendifferenzen elektrischer Schwingungen* in geschlossenen Leitern beobachtet und gemessen werden. Zu diesen Beobachtungen und Messungen lassen sich nun aber keine *Galvanometer*, wie zur Beobachtung und Messung der *Intensitäten beharrlicher Ströme* gebrauchen. Denn ist im Multiplikator eines Galvanometers eine *elektrische Schwingung*, statt eines beharrlichen Stromes, vorhanden, so kann die Galvanometernadel nicht in Ruhe und Gleichgewicht bleiben, sondern muss gleichfalls Schwingungen machen, die desto kleiner werden, je kleiner der Bruchtheil ist, welchen die elektrische Schwingungsdauer von der Schwingungsdauer der Magnetometernadel bildet; würden nun aber diese Schwingungen verschwindend klein, so würde sich die Galvanometernadel ganz ebenso verhalten, wie wenn gar keine elektrische Schwingung im Multiplikator vorhanden wäre, sie würde ohne irgend eine Ablenkung in derselben Gleichgewichtslage verharren, so dass aus der Beobachtung des Galvanometers über das Vorhandensein einer elektrischen Schwingung im Multiplikator gar nichts bestimmt werden könnte. Die Beobachtung *elektrischer Schwingungen*, und namentlich die Messung ihrer *Amplituden-* und *Phasendifferenzen*, fordert daher, dass der geschlossene Leiter, in welchem die Schwingungen Statt finden, nicht blos einen *Multiplikator*, wie zu einem *Galvanometer*, sondern auch ein als Drehwaage aufgehangenes *Solenoid* bildet, welches zusammen mit dem *Multiplikator* ein *Elektrodynamometer* darstellt, dessen Konstruktion schon in der ersten Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen (Abhandlung bei Begründung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig 1846)[1]) beschrieben, und dessen Gebrauch zur Beobachtung *elektrischer Schwingungen* daselbst im Allgemeinen erörtert und an einem Beispiele erläutert worden ist.

Es soll nun hier im Besonderen die Methode, aus Dynamometerbeobachtungen *Amplituden-* und *Phasendifferenzen elektrischer Schwingungen* in geschlossenen Leitern zu bestimmen, näher betrachtet werden, wobei zur Vereinfachung der Betrachtung vorausgesetzt werden möge, dass der vom Leiter, in welchem die Elektricität schwingt, gebildete *Multiplikator*, gleich dem Multiplikator einer Tangenten-Boussole, einen

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 35 und 123.]

vertikalen Ring von grösserem Halbmesser bilde, in dessen Mittelpunkte das in einem möglichst kleinen Raume koncentrirte, von demselben Leiter gebildete, *Solenoid*, welches an die Stelle der drehbaren *Nadel* im Galvanometer tritt, aufgehangen sei.

Zwischen dieser *Nadel* und jenem vom Leiter, in welchem die elektrische Schwingung Statt findet, gebildeten *Solenoide* findet nun aber der wesentliche Unterschied Statt, dass die *Nadel* ein *konstantes magnetisches Moment* besitzt, auf welches der beharrliche Strom im Multiplikator wirkt, während das *Solenoid* ein *galvanisches Moment* besitzt, was zwar nach dem Ampère'schen Gesetze, bei gleicher Grösse, dem magnetischen Nadelmomente ganz *äquivalent* sein würde, das aber bei einer *elektrischen Schwingung* im Solenoide nicht konstant, sondern mit der Phase der elektrischen Schwingung *variabel* ist. Auf dieses *variable galvanische Moment* des Solenoids wirkt nun ferner vom Multiplikator aus kein beharrlicher Strom, sondern die im Multiplikator vorhandene *elektrische Schwingung,* deren Einwirkung auf das Solenoid ebenfalls mit der Schwingungsphase *variabel* ist.

Bezeichnet man mit a und n den mittleren Halbmesser und die Zahl der Umwindungen des *Multiplikators*, und ebenso mit a' und n' die des *Solenoids*, ferner mit i und i' die Strömungsintensitäten im Multiplikator und Solenoide, nach dem in der Galvanometrie gebrauchten *absoluten magnetischen Maasse* ausgedrückt, wonach $[c/\sqrt{8}].idt$ und $[c/\sqrt{8}].i'dt$ die Menge positiver Elektricität ist, welche während des Zeitelements dt durch den Querschnitt des Leiters geht, so sind $n\pi a^2 i$ und $n'\pi a'^2 i'$ die *galvanischen Momente* des Multiplikators und Solenoids. Das doppelte Produkt dieser beiden galvanischen Momente dividirt durch den Kubus des Abstands des im Mittelpunkte koncentrirten Solenoids vom Multiplikatorringe a giebt die vom Multiplikator auf das Solenoid ausgeübte *Direktionskraft,* welche mit dem Sinus des Winkels, den die Solenoidaxe mit der Multiplikatoraxe bildet, multiplicirt, oder, was dasselbe ist, mit dem Kosinus des Ablenkungswinkels φ multiplicirt, den die Solenoidaxe mit der Ringebene des Multiplikators bildet, das vom Multiplikator auf das Solenoid ausgeübte *Drehungsmoment* darstellt, nämlich

$$= 2\frac{n\pi a^2 i . n'\pi a'^2 i'}{a^3} \cdot \cos\varphi.$$

Bei der vollkommenen Analogie, die hierin zwischen der Theorie des *Elektrodynamometers* mit der des *Galvanometers* Statt findet, bedarf es keiner weiteren Erörterung hierüber, sondern wir können sogleich, bei Betrachtung des Gebrauchs des Instruments, auf den Fall übergehen, wenn in dem Leitungsdrahte, zu dem auch der Multiplikator und das

Solenoid gehören, *elektrische Schwingungen* vorhanden sind, wo also die *Strömungsintensitäten* i und i' mit dem Sinus eines mit der Zeit t proportional wachsenden Winkels wechseln.

Bezeichnen in diesem Falle i und i' die grössten Strömungsintensitäten, welche den grössten Sinuswerthen entsprechen, so können die Strömungsintensitäten für irgend einen Augenblick am Ende der Zeit t durch $i \sin(\mu t + \gamma)$ und $i' \sin(\mu t + \gamma')$ dargestellt werden. Die Entfernung eines schwingenden Theilchens im Multiplikator oder Solenoid von seiner Gleichgewichtslage während dieser Schwingung wird hiernach für denselben Augenblick, wenn $\mathfrak{E}$ die Menge positiver Elektricität, welche in der Längeneinheit des Leiters enthalten ist, bezeichnet, durch $[i/\mu\mathfrak{E}]\cos(\mu t + \gamma)$ und $[i'/\mu\mathfrak{E}]\cos(\mu t + \gamma')$ dargestellt, worin $i/[\mu\mathfrak{E}]$ und $i'/[\mu\mathfrak{E}]$ die *Schwingungsamplitude* ist, um deren Bestimmung es sich handelt. — Doch wie man bei Strömen auf Kenntniss der Stromgeschwindigkeit selbst verzichtet und sich mit dem Produkt derselben in den unbekannten Faktor $\mathfrak{E}$ begnügt, ebenso begnügt man sich hier mit der Bestimmung des Produkts dieser Schwingungsamplitude in denselben Faktor $\mathfrak{E}$, weil die Beobachtungen uns nur gestatten, dieses Produkt in *absoluten Maassen* auszudrücken.

Mit diesen neuen Bezeichnungen der Strömungsintensitäten, für diesen Fall, erhält man nun das vom Multiplikator auf das Solenoid ausgeübte Drehungsmoment

$$= 2\frac{n\pi a^2 i \,.\, n'\pi a'^2 i'}{a^3} \sin(\mu t + \gamma)\sin(\mu t + \gamma') \,.\, \cos\varphi\,,$$

worin i und i' von der Zeit t unabhängige konstante Werthe haben.

Es leuchtet ein, dass das bewegliche Solenoid, unter der Einwirkung dieses Drehungsmoments, dessen Grösse sich mit der Zeit t fortwährend ändert, gar nicht zur Ruhe gelangen kann; es fragt sich daher, welche *Beobachtungen* lassen sich bei dieser fortwährenden Bewegung des Solenoids machen, und was lässt sich aus diesen Beobachtungen bestimmen. Zur Beantwortung dieser Frage müssen die *Bewegungsgesetze des unter Einwirkung eines solchen veränderlichen Drehungsmoments stehenden Solenoids entwickelt werden.*

Zur Vereinfachung dieser Entwickelung kann man sich zunächst an den Fall halten, wo die *Strömungsintensitäten im Multiplikator und im Solenoide immer gleich* sind, wo also

$$i = i' \text{ und } \gamma = \gamma' = 0$$

gesetzt werden kann. Für diesen Fall ergiebt sich das variable Drehungsmoment, welches auf das Solenoid wirkt,

$$= 2\frac{\pi^2 n n' a'^2}{a} \cdot i^2 (\sin \mu t)^2 \cos\varphi\,,$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$= \frac{\pi^2 nn'a'^2}{a} \cdot i^2 (1 - \cos 2\mu t) \cos \varphi .$$

Aus der Konstruktion des *Elektrodynamometers* ist aber bekannt, dass das Solenoid *bifilar* aufgehangen ist, woraus sich bei der gegebenen Länge nebst Abstande der beiden Aufhängungsdrähte und bei dem von ihnen getragenen Solenoidgewichte eine *statische Direktionskraft* für das Solenoid ergiebt, die leicht bestimmt werden kann, und mit S bezeichnet werden soll. Ist nun diese bifilare Suspension des Solenoids *in normaler Weise* so regulirt, dass das aus der *statischen Direktionskraft* resultirende Drehungsmoment $= 0$ ist, wenn die Solenoidaxe der Ringebene des Multiplikators parallel, oder wenn der *Ablenkungswinkel* $\varphi = 0$ ist, so ergiebt sich für jeden beliebigen Werth von φ das auf das Solenoid wirkende *statische Drehungsmoment*

$$= - S \sin \varphi .$$

Fügt man dieses *statische* Drehungsmoment obigem *elektrodynamischen* hinzu, so giebt die Summe beider auf das Solenoid wirkenden Drehungsmomente, dividirt durch das Trägheitsmoment des Solenoids K, die Drehungsbeschleunigung des Solenoids $d^2\varphi/dt^2$ im Augenblicke am Ende der Zeit t, woraus die *Bewegungsgleichung des Solenoids* folgt, nämlich

$$\frac{\pi^2 nn'a'^2}{a} \cdot i^2 (1 - \cos 2\mu t) \cos \varphi - S \sin \varphi = K \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot$$

Setzt man hierin

$$\varphi = v + a ,$$

indem man für v den durch folgende Gleichung bestimmten *konstanten* Werth annimmt:

$$\operatorname{tang} v = \frac{\pi^2 nn'a'^2}{aS} \cdot i^2 ,$$

folglich $d^2\varphi/dt^2 = d^2a/dt^2$, so erhält man

$$\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{S}{K} [(1 + (1 - \cos 2\mu t) \operatorname{tang} v^2) \cos v \sin a + \cos 2\mu t \,.\, \sin v \cos a] = 0.$$

Unter der Voraussetzung, dass v und a kleine Werthe haben (welche in der Regel zulässig ist, weil das mit Spiegel versehene Solenoid ebenso wie eine Magnetometernadel beobachtet werden soll, wobei die Ablenkung des Solenoids stets innerhalb enger durch die Skalenlänge gegebener Grenzen bleiben muss), kann geschrieben werden

$$\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{S}{K} (a \sec v + \cos 2\mu t \,.\, \sin v) = 0 ,$$

woraus durch Integration erhalten wird:

$$a = \frac{\sin v}{4\mu^2 \frac{K}{S} - \sec v} \cdot \cos 2\mu t + A \sin (t - B) \sqrt{\frac{S \sec v}{K}},$$

wo A und B die beiden Integrationskonstanten sind. Bezeichnet man nun mit τ und ϑ die Schwingungsdauer des Solenoids, welche der statischen Direktionskraft S und dem Trägheitsmomente K entspricht, und die Schwingungsdauer der Elektricität im Leitungsdrahte, so ist

$$\frac{K}{S} = \frac{\tau^2}{\pi^2} \text{ und } \mu = \frac{\pi}{\vartheta};$$

folglich ist

$$a = \frac{\sin v}{4 \frac{\tau^2}{\vartheta^2} - \sec v} \cdot \cos \frac{2\pi}{\vartheta} t + A \sin \frac{\pi}{\tau} (t - B) \sqrt{\sec v},$$

oder, für den angenommenen kleinen Werth von v, und $A = 0$ gesetzt (d. h. abgesehen von derjenigen Schwingung, welche das Solenoid machen würde, wenn es blos unter der Einwirkung der statischen Direktionskraft S und der elektrodynamischen $nn'\pi^2 a'^2 i^2 / a$ stände, da diese Schwingung durch bekannte Beruhigungsmittel bei den Beobachtungen leicht zu dämpfen ist),

$$a = \frac{\vartheta^2}{4\tau^2 - \vartheta^2} \cdot v \cos \frac{2\pi}{\vartheta} t.$$

Als Beispiel diene der Fall, der in den folgenden Beobachtungen vorkommen wird, wo in Sekunden ausgedrückt

$$\tau = 15, \quad \vartheta = \frac{1}{520}$$

war, und wo sich also

$$a = \frac{1}{243 \, . \, 10^6} \cdot v \cos \frac{2\pi}{\vartheta} t$$

ergiebt, d. h., wo a gegen v ganz verschwindet. Dasselbe findet bei allen Beobachtungen, welche hier betrachtet werden sollen, Statt.

Wenn a verschwindet, kann nun die *konstante Ablenkung des Solenoids* v mit grösster Genauigkeit unmittelbar beobachtet werden, und man findet daraus

$$i = \frac{1}{\pi a'} \sqrt{\frac{a S \operatorname{tang} v}{nn'}},$$

wodurch, wenn aus Zählung der Umdrehungen des rotirenden Magnets die Schwingungsdauer ϑ bekannt ist, die elektrische Schwingung im geschlossenen Leiter vollständig bestimmt wird, nämlich

$$i \sin\frac{\pi}{\vartheta}t = \frac{\sin\frac{\pi}{\vartheta}t}{\pi a'} \cdot \sqrt{\frac{aS\operatorname{tang} v}{nn'}}.$$

Wäre im geschlossenen Leiter, statt der elektrischen Schwingung, ein *konstanter Strom* von der Intensität $i\sqrt{\frac{1}{2}}$ vorhanden, so würde das vom Multiplikator auf das Solenoid ausgeübte Drehungsmoment

$$= \frac{\pi^2 nn'a'^2}{a} i^2 \cos\varphi$$

sein, und dieses Drehungsmoment mit dem statischen Drehungsmoment $- S\sin\varphi$ zusammen müsste beim Gleichgewichte $= 0$ sein, woraus die *Ablenkung des Solenoids* φ *beim Gleichgewichte*

$$\varphi = v$$

folgen würde. Hiernach lässt sich das Resultat obiger Betrachtung so aussprechen: *Wenn die Schwingungsdauer der Elektricität im geschlossenen Leiter ein sehr kleiner Bruchtheil von der statischen Schwingungsdauer des Solenoids ist, verhält sich das Solenoid gerade so, wie wenn im Leiter ein konstanter Strom vorhanden wäre, dessen Intensität zum Intensitäts-Maximum* i *der bei der elektrischen Schwingung Statt findenden Strömungen sich verhält wie* $1 : \sqrt{2}$.

Es findet alsdann eine Ablenkung des Solenoids Statt, die sich ebenso beobachten lässt, wie wenn ein *konstanter Strom* im geschlossenen Leiter vorhanden wäre, und wird aus dieser beobachteten Ablenkung (nach demselben Gesetz wie bei Galvanometern) die Intensität des *konstanten Stroms* berechnet, von welcher sie hervorgebracht werden würde, so braucht diese Intensität nur mit $\sqrt{2}$ multiplicirt zu werden, um das *Intensitäts-Maximum* i der bei der elektrischen Schwingung Statt findenden Strömungen, oder mit $c/[2\mu\mathfrak{E}]$ multiplicirt zu werden, um die *Amplitude* der elektrischen Schwingung im geschlossenen Leiter zu erhalten, wobei jedoch, wie schon bemerkt, $\mathfrak{E}$ als unbekannter Koefficient unbestimmt gelassen werden muss und nur $ci/[2\mu]$ nach *absoluten Maassen* ausgedrückt werden kann. Es ist hierdurch die Aufgabe gelöst, *die durch einen mit bekannter Geschwindigkeit rotirenden Magnet in einem geschlossenen Leiter hervorgebrachte elektrische Schwingung mit dem Elektrodynamometer zu beobachten und zu bestimmen.*

Die Lösung dieser Aufgabe ist jedoch hierbei auf den Fall beschränkt geblieben, wo Multiplikator und Solenoid benachbarten Theilen des geschlossenen Leiters angehören, in welchen kein merklicher Unterschied der Schwingungsamplitude und der Schwingungsphase der Elektricität Statt findet. Gehörten nun aber Multiplikator und Solenoid zwei Theilen des geschlossenen Leiters an, in welchen die Schwingungsdauer der Elektricität zwar dieselbe wäre, aber die Strömungsmaxima i, i' sowohl wie die Schwingungsphasen λ, λ' unterschieden werden müssten, so lässt sich der Anfangspunkt der Zeit t doch immer so wählen, dass das arithmetische Mittel beider Schwingungsphasen $(\lambda + \lambda')/2 = 0$ ist. Es lassen sich dann die mit der elektrischen Schwingung verbundenen Strömungsintensitäten in diesen beiden Theilen des geschlossenen Leiters durch

$$i \sin \frac{\pi}{\vartheta}(t + \lambda) \quad \text{und} \quad i' \sin \frac{\pi}{\vartheta}(t - \lambda)$$

darstellen.

Man beobachtet alsdann *erstens* die Ablenkung des Solenoids v, wenn Multiplikator und Solenoid beide dem ersten Theile des geschlossenen Leiters angehören. Aus dieser Beobachtung lässt sich nach den gefundenen Regeln das Intensitäts-Maximum i der Strömungen bei der elektrischen Schwingung in diesem Theile bestimmen, nämlich

$$i = \frac{1}{\pi a'}\sqrt{\frac{aS \operatorname{tang} v}{nn'}}.$$

Zweitens beobachtet man die Ablenkung des Solenoids v', wenn Multiplikator und Solenoid beide dem anderen Theile des geschlossenen Leiters angehören, und findet das Intensitäts-Maximum i' der Strömungen bei der diesem Theile vorhandenen elektrischen Schwingung

$$i' = \frac{1}{\pi a'}\sqrt{\frac{aS \operatorname{tang} v'}{nn'}}.$$

Drittens endlich beobachtet man die Ablenkung des Solenoids v'', wenn der Multiplikator dem ersteren, das Solenoid dem letzteren Theile des geschlossenen Leiters angehört. Aus dieser dritten Beobachtung lässt sich dann auch noch der *Unterschied der Schwingungsphasen* 2λ in den beiden Theilen des geschlossenen Leiters bestimmen. Es ist nämlich alsdann die *Bewegungsgleichung des Solenoids* nach den vorausgegangenen Angaben folgende:

$$2\,\frac{\pi^2 nn' a'^2}{a} \cdot ii' \sin(\mu t + \lambda)\sin(\mu t - \lambda) \cdot \cos\varphi - S\sin\varphi = K\,\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

wofür, da $\sin(\mu t+\lambda)\sin(\mu t-\lambda)=\sin\mu t^2-\sin\lambda^2=\frac{1}{2}(1-\cos 2\mu t-2\sin\lambda^2)$ ist, geschrieben werden kann:

$$\frac{\pi^2 nn'a'^2}{a}\cdot ii'(1-\cos 2\mu t-2\sin\lambda^2)\cos\varphi - S\sin\varphi = K\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Man setze hierin

$$\varphi = u + a,$$

worin

$$\operatorname{tang} u = \frac{\pi^2 nn'a'^2}{aS}\cdot ii'$$

genommen wird. Da hiernach $d^2\varphi/dt^2 = d^2a/dt^2$ ist, so erhält man

$$\frac{d^2a}{dt^2}+\frac{S}{K}\left(\left(1+(1-\cos 2\mu t-2\sin\lambda^2)\operatorname{tg}u^2\right)\cos u\sin a+(\cos 2\mu t+2\sin\lambda^2)\sin u\cos a\right)=0.$$

Unter der Voraussetzung, dass u und a kleine Werthe haben, wird

$$\frac{d^2a}{dt^2}+\frac{S}{K}\left((1-2\sin\lambda^2\sin u^2)\frac{a}{\cos u}+(\cos 2\mu t+2\sin\lambda^2)\sin u\right)=0,$$

oder, wenn $\beta=(1-2\sin\lambda^2\sin u^2)\,a$, $S'=(1-2\sin\lambda^2\sin u^2)\,S$,

$$\frac{d^2\beta}{dt^2}+\frac{S'}{K}\left(\sec u\cdot\beta+(\cos 2\mu t+2\sin\lambda^2)\sin u\right)=0.$$

Hieraus wird durch Integration

$$\beta=\frac{\sin u}{4\mu^2\frac{K}{S'}-\sec u}\cdot\cos 2\mu t-\sin 2u\sin\lambda^2+A\sin(t-B)\sqrt{\frac{S'\sec u}{K}},$$

$$a=\frac{S\sin u}{4\mu^2K-S'\sec u}\cdot\cos 2\mu t-\frac{\sin 2u\,.\,\sin\lambda^2}{1-2\sin u^2\sin\lambda^2}+A'\sin(t-B)\sqrt{\frac{S'\sec u}{K}}$$

erhalten. Verschwindet nun bei schnellen Schwingungen der Elektricität und nach Beruhigung des Solenoids, ebenso wie in dem vorhergehenden Falle, der erste und letzte Theil von a, so erhält man den mit v'' bezeichneten konstanten Werth der Ablenkung φ, nämlich

$$v''=u-\frac{\sin 2u\cdot\sin\lambda^2}{1-2\sin u^2\sin\lambda^2},$$

woraus

$$\sin\lambda^2=\frac{u-v''}{2\sin u\,(\cos u+[u-v'']\sin u)}$$

sich ergiebt. Hiernach wird also, da u aus den durch die vorhergehenden Beobachtungen bestimmten Werthen von i und i' mittelst der

Gleichung tang $u = [\pi^2 nn'a'^2/a] . ii'$ schon bekannt ist, *die Aufgabe gelöst, aus der beobachteten Ablenkung v'' den mit 2λ bezeichneten Phasenunterschied der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen der geschlossenen Kette zu bestimmen.*

25.

Die Kommutatoren.

Die Ausführung der angeführten Beobachtungen nach der im vorhergehenden Artikel beschriebenen Methode würde, um den Zweck einer genauen Vergleichung der *Schwingungsamplituden* und *Schwingungsphasen* an zwei Stellen eines geschlossenen Leiters zu erfüllen, bei geringen Verschiedenheiten derselben eine sehr grosse Feinheit und Genauigkeit verlangen, wie kaum zu erreichen sein würde, wenn sie *einzeln und unabhängig von einander* ausgeführt werden müssten. Die Erreichung dieses Zweckes kann aber dadurch ausserordentlich erleichtert werden, dass diese Beobachtungen *paarweise* mit einander verbunden, an demselben geschlossenen Leiter, bei derselben Rotation des Magnets, *gleichzeitig* gemacht werden. Es sind dazu *zwei möglichst gleichförmig konstruirte Elektrodynamometer* erforderlich, deren Multiplikatoren und Solenoide Theile derselben geschlossenen Kette bilden. Die wesentlichste Bedingung, welche bei zwei solchen derselben Kette angehörigen *Elektrodynamometern* erfüllt werden muss, wenn ein System genau korrespondirender Beobachtungen mit ihnen ausgeführt werden soll, besteht darin, dass die *Schwingungsdauer* der bifilar aufgehangenen Solenoide der beiden Elektrodynamometer genau übereinstimme, was sich am leichtesten erreichen lässt, wenn in der Konstruktion der Elektrodynamometer das Mittel gegeben ist, den Abstand der Aufhängungsdrähte bei dem einen oder bei beiden Solenoiden beliebig zu reguliren, wodurch die Schwingungsdauer des einen Solenoids mit der des anderen in genaue Uebereinstimmung gebracht werden kann. Befinden sich dann vor Beginn einer Beobachtungsreihe beide Solenoide *in vollkommener Ruhe*, so lässt sich eine längere Beobachtungsreihe in solcher Weise ausführen, dass alle *beobachteten Elongationen* der *beiden* durch elektrische Schwingungen in der Kette in Bewegung gesetzten Solenoide paarweise genau für *gleiche Zeiten* gelten.

Weit weniger als in der Schwingungsdauer kommt die vollkommene Uebereinstimmung beider Elektrodynamometer in anderen Beziehungen in Betracht. Denn man sieht leicht ein, dass, wenn beide Elektrodynamometer in der geschlossenen Kette dicht hinter einander gestellt werden, so dass beide einem Theile der Kette angehören, in welchem

keine merklichen Unterschiede der Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen Statt finden, durch gleichzeitige korrespondirende Beobachtungen an beiden Instrumenten, die sich bei gleicher Schwingungsdauer der Solenoide längere Zeit fortsetzen lassen, eine sehr genaue Vergleichung beider Instrumente gewonnen werden kann, wonach alle mit dem einen Instrumente gemachten Beobachtungen genau so reducirt werden können, dass sie dieselben Resultate geben, die man bei vollkommener Gleichheit dieses Instruments mit dem anderen erhalten haben würde.

Dieses vorausgesetzt, können die beiden genau mit einander verglichenen Elektrodynamometer an zwei verschiedenen weit von einander entfernten Stellen eines und desselben geschlossenen Leiters eingeschaltet werden, und es kann dann bei einer elektrischen Schwingung im Leiter durch gleichzeitige Beobachtungen beider Instrumente eine viel feinere Vergleichung der *Schwingungsamplituden* an beiden Stellen der Kette gewonnen werden, als es möglich sein würde, wenn ein und dasselbe Elektrodynamometer an den beiden Stellen zu verschiedenen Zeiten eingeschaltet und beobachtet werden sollte, wobei vorausgesetzt werden müsste, dass die Rotation des Magnets zu beiden Zeiten vollkommen gleich wäre, eine Voraussetzung, der wirklich nie ganz genügt werden kann, und die durch jene gleichzeitig gemachten korrespondirenden Beobachtungen ganz erspart wird.

Die beiden Elektrodynamometer können ferner auch dazu dienen, dass, nach genauer Vergleichung derselben unter einander, das *Solenoid* des einen Elektrodynamometers in einen anderen entfernten Theil des geschlossenen Leiters versetzt wird, während der *Multiplikator* desselben Instruments an seiner früheren Stelle bleibt, und es können alsdann gleichzeitige korrespondirende Beobachtungen mit diesem und mit dem anderen, unverrückt an seiner Stelle gebliebenen, Elektrodynamometer gemacht werden, aus denen sich dann mit grösster Feinheit jeder noch so geringe *Phasenunterschied* der elektrischen Schwingung an den beiden von einander weit entfernten Stellen des geschlossenen Leiters erkennen lässt, ohne dass es nöthig ist, eine vollkommen gleiche Rotation des Magnets zu zwei verschiedenen Zeiten vorauszusetzen.

Endlich ist es nun für die Genauigkeit und Sicherheit der aus diesen Beobachtungen abzuleitenden Resultate von grosser Wichtigkeit, dass die verschiedenen Beobachtungsreihen, nämlich *erstens* die zur Vergleichung der beiden Instrumente und *zweitens* die zur Vergleichung der Schwingungsamplituden oder Schwingungsphasen an zwei verschiedenen Stellen des geschlossenen Leiters, während möglichst gleichförmig fortgesetzter Drehung des Magnets unmittelbar nach einander abwechselnd ausgeführt und wiederholt werden, wozu erforderlich ist, dass

ohne Störung der Beobachtungen die Versetzung entweder eines ganzen Elektrodynamometers oder des einen Bestandtheils, z. B. des Solenoids, zwischen zwei Beobachtungen *momentan* ausgeführt werden könne, was sich mit Hülfe zweckmässig eingerichteter *Kommutatoren* leicht erreichen lässt.

Diese *Kommutatoren*, wie sie zu den folgenden Versuchen gebraucht wurden, bestehen in einer Anzahl von Doppelzellen, d. i. paarweise leitend verbundener Zellen, zu denen die Enden der verschiedenen mit einander zu verbindenden Theile des Leitungsdrahts geführt sind. Diese Doppelzellen können dann unter einander wieder paarweise verbunden werden, und zwar auf zwei verschiedene Weisen mit einander kombinirt, indem nämlich bei jeder Doppelzelle die vordere Zelle von der hinteren unterschieden wird. Die eine Art paarweiser Verbindung der Doppelzellen unter einander kann nämlich durch ein festes System von Verbindungsdrähten geschehen, die gleichzeitig in alle Vorderzellen eingetaucht werden; die andere Art paarweiser Verbindung der Doppelzellen unter einander kann durch ein anderes festes System von Verbindungsdrähten geschehen, die gleichzeitig in alle Hinterzellen eingetaucht werden. Und diese beiden verschiedenen Systeme von Verbindungsdrähten können sich wie zwei Arme eines Hebels verhalten, so dass, wenn das eine System eintaucht, das andere heraustaucht, und umgekehrt. Es leuchtet leicht ein, dass durch einen solchen Kommutator mit sechs *Doppelzellen* ein Theil des Leitungsdrahts aus seiner bisherigen Verbindung mit zwei anderen Theilen des Leitungsdrahts herausgenommen, die beiden letzteren Theile dabei unter sich verbunden, und endlich zwei bisher verbundene Theile des Leitungsdrahts getrennt und zwischen ihnen jener herausgenommene Theil eingesetzt werden kann. Dies Alles geschieht durch einen momentan auszuführenden *Wechsel*, nämlich durch Drehung eines Hebels, wodurch das eine System von Verbindungsdrähten in die Vorderzellen getaucht wird, während das andere System aus den Hinterzellen herausgezogen wird, oder umgekehrt. — Ausserdem werden Kommutatoren *mit vier Doppelzellen* gebraucht, zwar nicht während der Beobachtungen, aber vorher. Vor Beginn der Beobachtungen sollen nämlich die Solenoide der beiden Elektrodynamometer beruhigt werden, wozu *erstens* ein Strom nöthig ist, welcher durch den Multiplikator und durch das Solenoid des zu beruhigenden Dynamometers geht, *zweitens* ein Kommutator mit vier Doppelzellen, von denen zwei mit den Enden des Multiplikatordrahts, die beiden anderen mit den Enden des Solenoiddrahts verbunden sind. Durch diesen Kommutator kann der Multiplikator mit dem Solenoid nach Belieben bald *parallel*, bald *kreuzweis* verbunden werden. Bei der einen Verbindungsweise übt der Strom im Multiplikator auf das von demselben Strome durchströmte Solenoid ein

positives, bei der anderen ein *negatives* Drehungsmoment aus, und das Solenoid wird beruhigt, wenn die erstere Verbindungsweise während der *Rückschwingung*, die letztere während der *Hinschwingung* hergestellt wird. Da diese Wirkung eines im Multiplikator und Solenoid gleichzeitig vorhandenen Stroms ganz unabhängig von der *Richtung* des Stroms ist, so kann dazu, statt eines beharrlichen Stroms, *die vom rotirenden Magnet in der Kette inducirte wechselnde Strömung* gebraucht werden, wodurch es möglich wird, diese Beruhigung der Dynamometer, nachdem die Rotation des Magnets begonnen, *den Beobachtungen unmittelbar vorausgehen zu lassen.*

Sollen nun aber alle diese Operationen, nämlich die Beruhigung der beiden Dynamometer und sodann alle zur Vergleichung der Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen an zwei verschiedenen Stellen der Kette erforderlichen Beobachtungen, während fortgesetzter Drehung des Magnets, nach einander ohne Unterbrechung ausgeführt werden, so sind dazu im Ganzen fünf Kommutatoren erforderlich, mit denen die verschiedenen Theile der Kette auf eine näher zu erörternde Weise planmässig verbunden werden müssen.

Zur leichteren Uebersicht sollen *erstens* die fünf Kommutatoren, *zweitens* die verschiedenen Theile der Kette, welche mit den Kommutatoren zu verbinden sind, genau bezeichnet und unterschieden werden. Fig. 1 S. 196 wird sodann zur Uebersicht der ganzen Anordnung und aller Verbindungen im Einzelnen dienen.

Der *erste* mit A bezeichnete Kommutator ist erforderlich, entweder um das eine *Elektrodynamometer* (Multiplikator und Solenoid zusammen genommen) abwechselnd an zwei verschiedene Stellen des Leitungsdrahts zu versetzen, oder um das *Solenoid* dieses Elektrodynamometers abwechselnd an zwei verschiedene Stellen des Leitungsdrahts zu versetzen, während der zugehörige Multiplikator an seiner Stelle bleibt. Es ist dazu ein Kommutator mit sechs Doppelzellen nöthig, von denen zwei für die beiden Enden des zu versetzenden Elektrodynamometers oder Solenoids, zwei für die beiden Enden des Leitungsdrahts an der einen Einschaltungsstelle, und endlich zwei für die beiden Enden des Leitungsdrahts an der anderen Einschaltungsstelle nöthig sind.

Der *zweite* mit B bezeichnete Kommutator ist erforderlich als *Hülfskommutator*, durch dessen Einstellung bestimmt wird, ob *Multiplikator sammt Solenoid* oder ob das *Solenoid* des einen Elektrodynamometers allein durch Wechsel des Kommutators A abwechselnd an zwei verschiedene Stellen des Leitungsdrahts versetzt werde, wozu ebenfalls ein Kommutator mit sechs Doppelzellen nöthig ist.

Der *dritte* und *vierte* Kommutator, nämlich C und C', werden beide zur Beruhigung der Solenoide vor Beginn der Beobachtungen gebraucht.

Es sind dazu Kommutatoren mit vier Doppelzellen nöthig, von denen zwei für die beiden Enden des Solenoiddrahts und zwei für die des zugehörigen Multiplikators nebst dem übrigen Leitungsdraht, von welchem jedoch der zum anderen Elektrodynamometer gehörige Theil auszuschliessen ist, damit während der Beruhigung des einen Solenoids die Ruhe des anderen nicht gestört werde.

Der *fünfte* mit D bezeichnete Kommutator ist endlich erforderlich, um die Verbindung der Dynamometer mit den Kommutatoren C und C' bald für die Beruhigung des einen Solenoids, bald für die des anderen einzurichten. Es ist dazu ein Kommutator mit vier Doppelzellen nöthig, von denen zwei für die beiden Enden des Leitungsdrahts an der Einschaltungsstelle des Kommutators, die beiden anderen für zwei Verbindungsdrähte, durch welche der Strom zum Leitungsdraht mit Umgehung des einen oder anderen Elektrodynamometers geführt werden kann.

Beim *geschlossenen Leitungsdrahte* sind folgende Theile zu unterscheiden, welche durch die Kommutatoren auf verschiedene Weise verbunden werden können.

Der *erste* mit a bezeichnete Draht ist der *Multiplikatordraht des ersten Dynamometers*, dessen Enden zu zwei Doppelzellen des Kommutators C führen, nebst *zwei kurzen Verbindungsdrähten* der beiden anderen Doppelzellen dieses Kommutators mit zwei Doppelzellen des Kommutators B. Diese verschiedenen Bestandtheile des Drahts a, die während der Beobachtungen immer auf gleiche Weise verbunden bleiben, sollen durch Ziffern, a^{I}, a^{II}, a^{III}, unterschieden werden.

Der *zweite* mit b bezeichnete Draht ist der *Solenoiddraht des ersten Dynamometers*, dessen Enden mit einer Doppelzelle des Kommutators B und mit einer Doppelzelle des Kommutators A verbunden sind.

Der *dritte* und *vierte* mit c und d bezeichnete Draht sind zwei *kurze Verbindungsdrähte* zweier Doppelzellen des Kommutators B mit zwei Doppelzellen des Kommutators A, deren Widerstand als verschwindend klein betrachtet werden darf.

Der *fünfte* mit e bezeichnete Draht ist *eins von den beiden sehr langen Drahtstücken*, welche bei den Beobachtungen gebraucht werden, um entweder die beiden Dynamometer von einander zu entfernen oder um das Solenoid des ersten Dynamometers von seinem Multiplikator zu entfernen, indem von beiden Verbindungen zwischen den beiden Drahtenden des einen Dynamometers mit denen des anderen, oder zwischen den beiden Drahtenden des Multiplikators und den beiden Drahtenden des Solenoids, jede durch ein solches langes Drahtstück vermittelt wird. Die beiden Enden des langen Drahtstücks e sind mit zwei Doppelzellen des Kommutators A verbunden.

Der *sechste* mit f bezeichnete Draht ist die ganze übrige Leitungskette, und besteht aus dem *Induktorringe* des rotirenden Magnets, ferner aus dem *zweiten der beiden eben erwähnten langen Drahtstücke*, sodann aus dem *Drahte des zweiten Dynamometers*, des Solenoids sowohl als des Multiplikators, und endlich aus *einem zum ersten Drahte zurückführenden Verbindungsdraht*. Diese verschiedenen Bestandtheile des Drahts f, die während der Beobachtungen immer auf gleiche Weise verbunden bleiben, sollen durch Ziffern, f^{I}, f^{II}, f^{III}, f^{IV}, f^{V}, unterschieden werden. Zwischen dem Solenoiddraht f^{III} und dem Multiplikatordraht f^{IV} des zweiten Dynamometers ist der Kommutator C' eingeschaltet, der aber während der Beobachtungen nicht gebraucht wird. Ebenso ist im Verbindungsdrahte f^{V} eine Einschaltungsstelle für den Kommutator D, die aber geschlossen bleibt, weil auch dieser Kommutator während der Beobachtungen nicht gebraucht wird.

Hiernach ist nun zu besserer Veranschaulichung Fig. 1 gezeichnet worden, wo die einzelnen Doppelzellen der Kommutatoren A, B, C, C', D

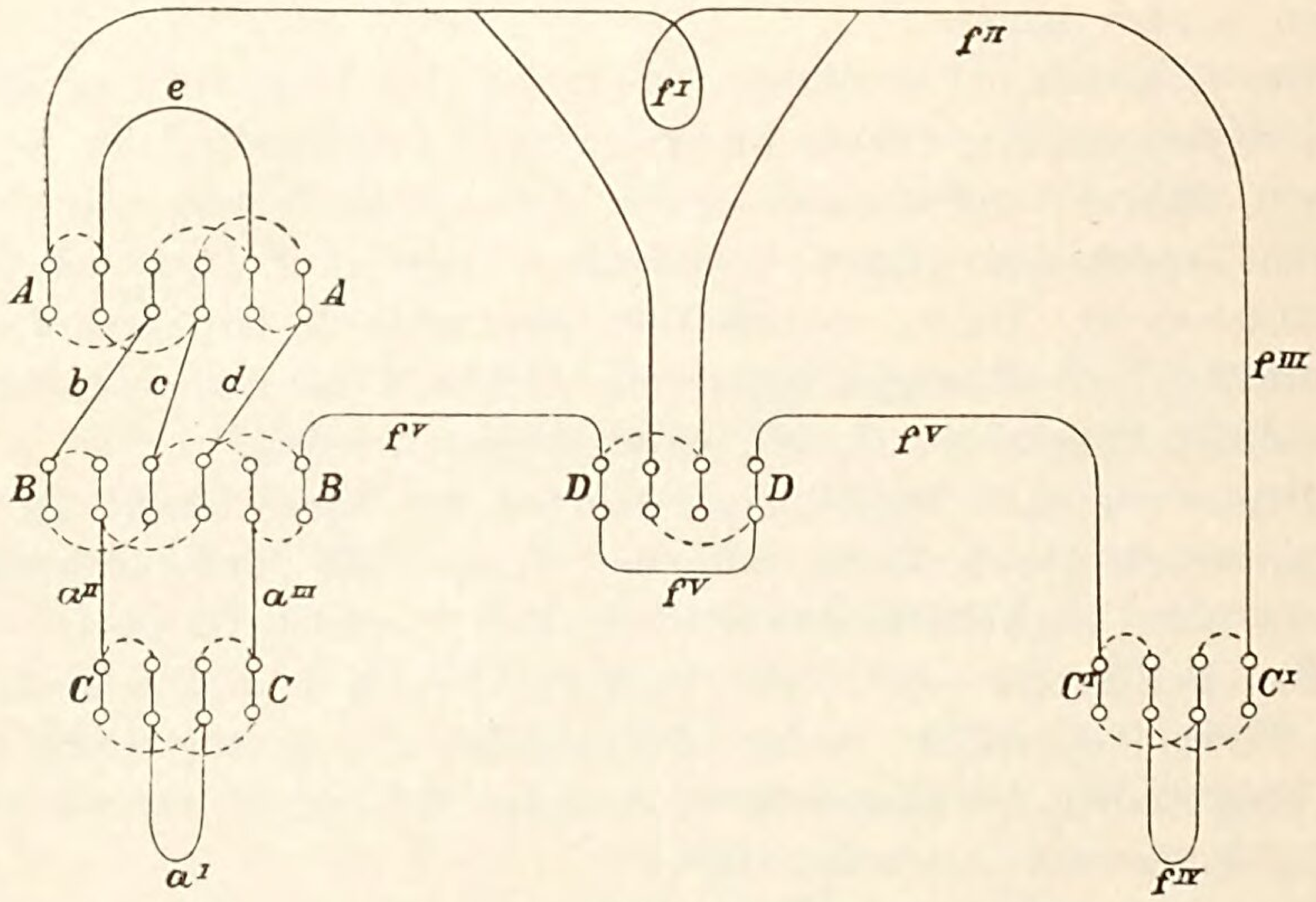


Fig. 1.

durch das Zeichen ⚲ bezeichnet und die eine von den beiden Verbindungsweisen durch punktirte Bögen auf der oberen Seite, die andere durch punktirte Bögen auf der unteren Seite angedeutet sind.

Zur Versetzung *des ersten Dynamometers*, welches aus dem Multiplikator a^{I} und dem Solenoid b besteht, von der einen Einschaltungsstelle zur anderen während der Beobachtungen, werden die Kommutatoren C, C', welche die *obere* Einstellung behalten, und D, welcher durch einen seine erste und letzte Zelle verbindenden Draht, nach der

Beruhigung der Solenoide, ganz von der Kette ausgeschlossen wird, nicht gebraucht, sondern die Versetzung wird, nachdem durch den Kommutator *B* die durch punktirte Bögen auf der *oberen* Seite angedeuteten Verbindungen hergestellt sind, blos durch Wechsel der Einstellung des Kommutators *A* bewerkstelligt. Denn bei der durch punktirte Bögen auf der *oberen* Seite angedeuteten Einstellung des Kommutators *A* wird bei der angegebenen Einstellung des Kommutators *B* eine geschlossene Kette gebildet, wo die bezeichneten Drähte in folgender Ordnung auf einander folgen:

$$abefdca;$$

bei der durch punktirte Bögen auf der *unteren* Seite angedeuteten Einstellung des Kommutators *A* wird eine geschlossene Kette gebildet, wo die Ordnung der Drähte folgende ist:

$$abfdeca.$$

Löst man f in seine Theile f^{I}, f^{II}, f^{III}, f^{IV}, f^{V} auf, und stellt die ganze geschlossene Kette durch die vier Seiten eines Rechtecks dar, wo die beiden langen, mit e und f^{II} bezeichneten Seiten die langen Verbindungsdrähte bedeuten, so stellt Fig. 2 den *ersteren*, Fig. 3 den *letzteren* Fall dar. Die Stelle des Induktors f^{I}, mit dem rotirenden Magnet, ist noch besonders mit einem + bezeichnet worden, die beiden Stellen der Multiplikatoren a und f^{IV} durch grössere ◯, die beiden Stellen der Solenoide b und f^{III} durch kleinere ○. Der Induktor f^{I} mit dem rotirenden Magnet befindet sich stets in der oberen Rechteckseite, das Dynamometer $f^{\mathrm{III}}\,f^{\mathrm{IV}}$ befindet sich stets in der gegenüberliegenden unteren Rechteckseite. Die Stelle des anderen Dynamometers ab dagegen wird gewechselt und befindet sich im *ersteren* Falle in der unteren Reckteckseite neben dem ersteren Dynamometer $f^{\mathrm{III}}\,f^{\mathrm{IV}}$, dem Induktor f^{I} gegenüber, im *letzteren* Falle in der oberen Rechteckseite, neben dem Induktor f^{I}, dem Dynamometer $f^{\mathrm{III}}\,f^{\mathrm{IV}}$ gegenüber. Das Dynamometer ab wird also durch den Wechsel des Kommutators *A* bald an einer vom Induktor f^{I} sehr entfernten Stelle der Kette, bald an einer ihm sehr nahen Stelle eingeschaltet, wie es für die *erste Beobachtungsreihe* verlangt wurde.

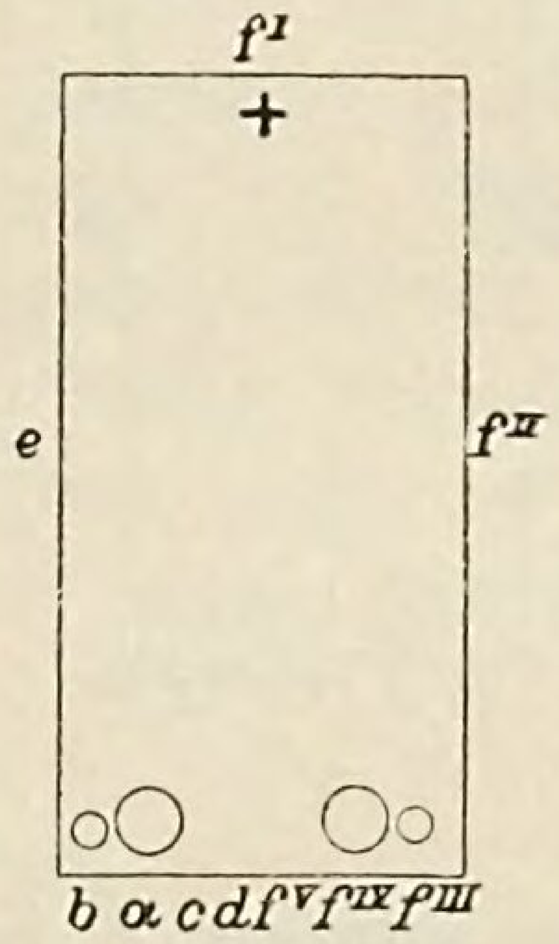


Fig. 2.

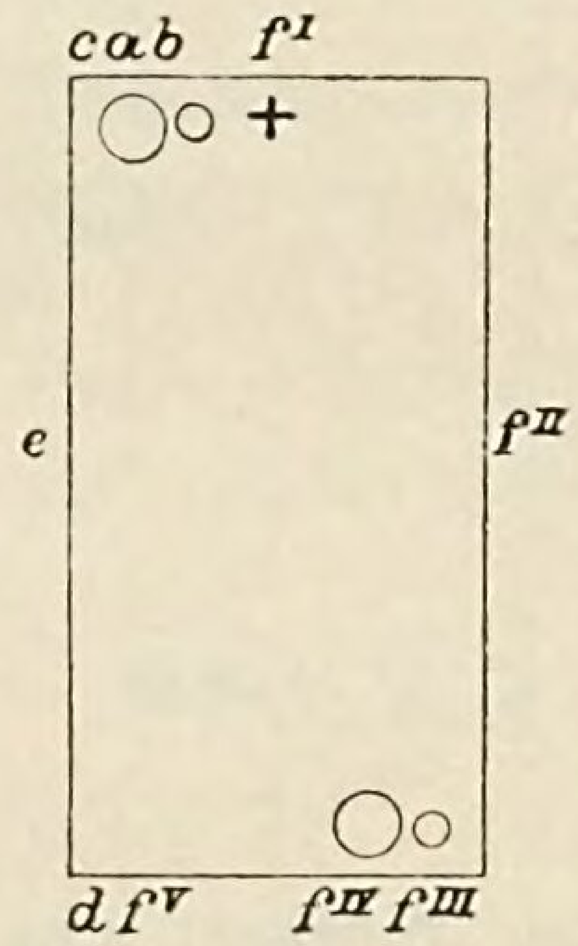


Fig. 3.

Zur Versetzung *des Solenoids b* des ersten Dynamometers von einer Einschaltungsstelle zur anderen während der Beobachtungen werden gleichfalls die Kommutatoren C, C' und D nicht gebraucht, sondern die Versetzung wird, nachdem durch den Kommutator B die durch punktirte Bögen auf der *unteren* Seite angedeuteten Verbindungen hergestellt sind, blos durch Wechsel der Einstellung des Kommutators A bewerkstelligt. Denn bei der durch punktirte Bögen auf der *oberen* Seite angedeuteten Einstellung des Kommutators A wird alsdann eine geschlossene Kette gebildet, wo die Ordnung der Drähte folgende ist:

$$adcbefa;$$

bei der durch punktirte Bögen auf der *unteren* Seite angedeuteten Einstellung des Kommutators A wird eine geschlossene Kette gebildet, wo die Ordnung der Drähte folgende ist:

$$adecbfa.$$

Der *erstere* Fall wird durch Fig. 4, der *letztere* durch Fig. 5 dargestellt. Man sieht, dass dabei die Stelle des Induktors f^{I}, die des Dynamometers $f^{\mathrm{III}}\,f^{\mathrm{IV}}$ und auch die des Multiplikators a immer unverändert bleiben, und dass blos die Stelle des Solenoids b gewechselt wird, welche im *ersteren* Falle in der unteren Rechteckseite, neben dem Multiplikator a, dem Induktor f^{I} gegenüber, im *letzteren* Falle in der oberen Rechteckseite, neben dem Induktor f^{I}, dem Multiplikator a gegenüber, sich befindet. Das Solenoid b wird also durch den Wechsel des Kommutators A bald an einer vom Multiplikator a sehr entfernten Stelle der Kette, bald an einer ihm sehr nahen Stelle eingeschaltet, wie es für die *zweite Beobachtungsreihe* verlangt wurde.

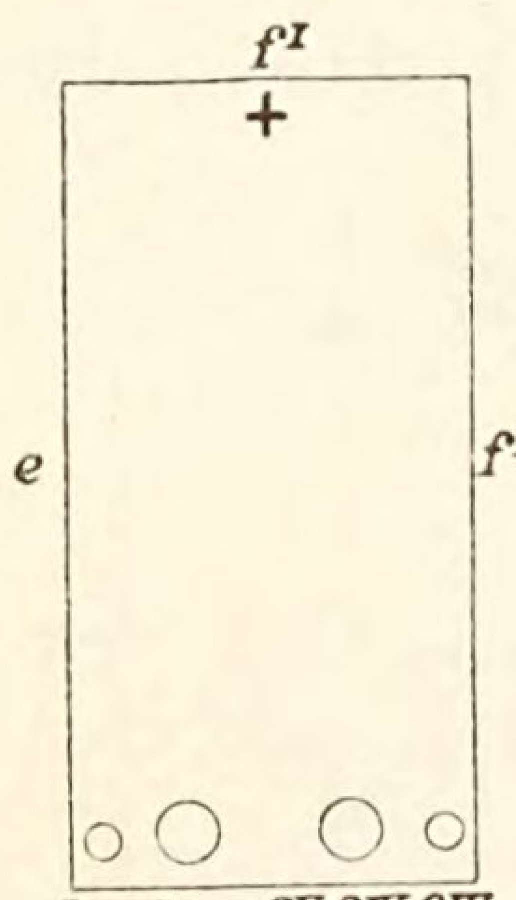


Fig. 4.

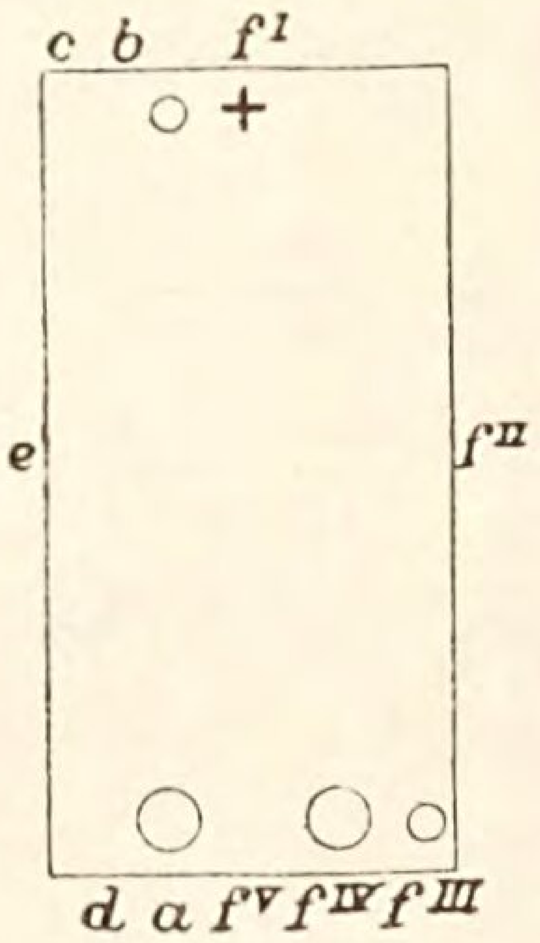


Fig. 5.

Zur Beruhigung der Solenoide vor Beginn der Beobachtungen wird das die erste und vierte Doppelzelle des Kommutators D verbindende Stück des Drahts f^{V} herausgenommen. Zur Beruhigung des Solenoids des *ersten* Dynamometers b erhält sodann der Kommutator D die *obere* durch einen punktirten Bogen angedeutete Einstellung, wodurch der Draht f^{II} nebst dem zweiten Dynamometer $f^{\mathrm{III}}\,f^{\mathrm{IV}}$ ausgeschlossen wird, und je nach der Einstellung des Kommutators C eine geschlossene Kette mit folgender Drahtordnung gebildet wird:

bei der *oberen* Einstellung von C: $a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}bef^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{V}}a^{\mathrm{III}}a^{\mathrm{I}}$,

bei der *unteren* Einstellung von C: $a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{III}}cdf^{\mathrm{V}}f^{\mathrm{I}}eba^{\mathrm{II}}a^{\mathrm{I}}$,

wobei für die Kommutatoren *A* und *B* die oberen Einstellungen angenommen sind. Man sieht daraus, dass bei gegebener Stromrichtung im Multiplikator a^{I} die Stromrichtung im Solenoide b, bei der *oberen* Einstellung von C, $a^{II}be$, bei der *unteren* Einstellung, eba^{II}, also entgegengesetzt ist, wonach also in diesen beiden Fällen entgegengesetzt gleiche Drehungsmomente auf das Solenoid b ausgeübt werden, von denen das eine stets zur *Dämpfung* der Solenoidbewegung benutzt werden kann.

Zur Beruhigung des Solenoids des *zweiten* Dynamometers f^{III} erhält der Kommutator *D* die *untere* durch einen punktirten Bogen angedeutete Einstellung, wodurch die Drähte $eba^{II}a^{I}a^{III}$, zu denen das erste Dynamometer mit gehört, ausgeschlossen werden, und je nach der Einstellung des Kommutators C^{I} eine geschlossene Kette mit folgender Drahtordnung gebildet wird:

bei der *oberen* Einstellung von C^{I}: $f^{IV}f^{V}f^{I}f^{II}f^{III}f^{I}$,
bei der *unteren* Einstellung von C^{I}: $f^{IV}f^{III}f^{II}f^{I}f^{V}f^{IV}$.

Man sieht, dass bei gegebener Stromrichtung im Multiplikator f^{IV} die Stromrichtung im Solenoide f^{III} bei der *oberen* Einstellung von $C^{I}f^{II}f^{III}f^{IV}$, bei der *unteren* Einstellung $f^{IV}f^{III}f^{II}$, also entgegengesetzt ist, wonach also in diesen beiden Fällen entgegengesetzt gleiche Drehungsmomente auf das Solenoid f^{III} ausgeübt werden, von denen das eine stets zur *Dämpfung* der Solenoidbewegung benutzt werden kann.

Nach hergestellter Beruhigung beider Solenoide wird der Kommutator *D* geöffnet und zur Verbindung seiner ersten und letzten Zelle das herausgenommene Drahtstück f^{V} wieder eingesetzt.

26.

Die langen Leitungsdrähte.

Bei Versetzung *des Solenoids* eines Elektrodynamometers, oder bei Versetzung *des ganzen Elektrodynamometers* (Solenoids und Multiplikators) von einer Einschaltungsstelle der geschlossenen Kette zur anderen ist es von wesentlicher Bedeutung für die Beobachtungen, dass die beiden Leitungsdrähte, welche die beiden Einschaltungsstellen mit einander verbinden, von nahe gleicher und sehr grosser Länge sind. Es sind daher schon im vorigen Artikel zwei Theile der geschlossenen Kette, nämlich die Drähte e und f^{II}, als sehr lange Drähte besonders angeführt worden, welche zu diesem Zwecke dienen. Bei der zu den folgenden Versuchen gebrauchten Kette hatte jeder von diesen beiden Drähten eine Länge von 36600 Metern oder fast 5 Meilen.

Bei der grossen Länge der ganzen Kette, welche diese beiden langen Drähte enthält, leuchtet von selbst ein, dass es praktisch unausführbar ist, dem geschlossenen Leiter eine genaue Kreisform zu geben, wie bei der Entwickelung der Gesetze im vorigen Abschnitte der Einfachheit wegen angenommen wurde. Aber auch abgesehen von dieser grossen Länge, welche der geschlossene Leiter besitzen soll, würde die einfache Kreisform keine Anwendung finden können bei einer Kette, die zum Zweck der Beobachtungen einen *Induktorring* für den rotirenden Magnet und *zwei Dynamometer* enthalten muss, wozu Stücke des Leitungsdrahts verwendet werden, deren Gestalt und Lage durch die für die Konstruktion dieser Instrumente geltenden Regeln gegeben ist.

Offenbar hat diese in der Wirklichkeit unvermeidliche Abweichung des geschlossenen Leiters in seiner Gestalt von der Kreisform Einfluss auf die im Leiter vom rotirenden Magnet hervorgebrachten elektrischen Schwingungen, und das Gesetz, wonach die Amplitude der elektrischen Schwingungen von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets abhängt, wird dadurch wesentlich verändert. Handelt es sich aber nicht um Beobachtungen, durch welche die Amplitude genau bestimmt und gemessen, sondern nur um solche, durch welche die Amplituden an zwei verschiedenen Stellen des geschlossenen Leiters verglichen werden sollen (oder durch welche blos die Phasendifferenz an beiden Stellen bestimmt werden soll), so scheint eine Abweichung von der Kreisform von geringer Bedeutung. Denn wenn, den im vorigen Abschnitte entwickelten Gesetzen gemäss, an zwei von einander weit entfernten Stellen *eines kreisförmigen Leiters* auch bei sehr grossen Rotationsgeschwindigkeiten wirklich kein merklicher Unterschied in Schwingungsamplitude und Schwingungsphase Statt fände, so scheint kein Grund vorhanden zu sein, anzunehmen, dass ein solcher Unterschied durch eine blosse Abweichung des Leiters von der Kreisform hervorgebracht würde; noch mehr dürfte es aber umgekehrt gestattet sein, wenn die Beobachtungen lehren sollten, dass in einem geschlossenen Leiter, der *eine beliebige von der Kreisform ganz verschiedene Gestalt* besitzt, keine merklichen Unterschiede der Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen Statt finden, dieses Resultat als ein allgemeines zu betrachten, auch dafür, dass die Unterschiede von Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen bei vollkommener Kreisform unmerklich seien.

Es kommt aber bei diesen beiden fünf Meilen langen Drähten, welche zum geschlossenen Leiter gehören sollen, noch besonders in Betracht, dass, wenn keine Telegraphendrähte dazu benutzt werden, sondern wenn jene langen Drähte sich in dem geschlossenen Raume befinden sollen, wo die Beobachtungen gemacht werden, wie es nöthig ist, um alle für die Beobachtungen wesentlichen äusseren Umstände vollkommen

zu beherrschen, jene langen Drähte der Raumersparniss wegen nothwendig auf *Rollen* aufgewickelt werden müssen. Nun leuchtet aber ein, dass bei bald plötzlich entstehenden, bald wieder plötzlich verschwindenden elektrischen Strömungen, wie bei den durch schnelle Rotation eines Magnets hervorgebrachten elektrischen Schwingungen Statt finden, alle Windungen des auf einer Rolle aufgewickelten Leitungsdrahts nach den Gesetzen der *Volta-Induktion* elektromotorische Kräfte wechselseitig auf einander ausüben müssen, die sich zu einer starken *Dämpfungskraft* summiren, wodurch die Amplitude der elektrischen Schwingungen sehr verkleinert wird, so dass dieselbe bei grösseren Rotationsgeschwindigkeiten des Magnets auch mit den feinsten Dynamometern nicht mehr würde beobachtet werden können. Für die Ausführung der Beobachtungen ist daher die Auffindung einer Methode von grösster Wichtigkeit, die langen Drähte so auf *Rollen* zu wickeln, dass eine solche *wechselseitige Induktion der Drahtwindungen auf einander* vermieden wird.

Dieser Zweck kann nun, wenn die Drähte gut umsponnen sind, auf die einfachste und vollkommenste Weise dadurch erreicht werden, dass die beiden *Hälften* eines jeden auf *eine Rolle* zu wickelnden Stücks vorher zusammengelegt und zu einem *Doppeldraht* vereint werden. Diese Vereinigung geschieht am besten dadurch, dass beide Hälften, von denen jede schon umsponnen ist und die durch diese doppelte Umspinnung von einander isolirt gehalten werden, *nochmals zusammen mit Seide oder Baumwolle umsponnen werden.* Verbindet man sodann die beiden Hälften *am einen Ende* mit einander, so wird von ihnen ein Leiter gebildet, durch welchen ein vom anderen offenen Ende eintretender und durch die eine Drahthälfte hingehender Strom *fast auf demselben Wege*, durch die andere Drahthälfte, zu dem offenen Ende zurückgeführt wird. Das Ende, an welchem die beiden Drahthälften mit einander verbunden sind, wird sodann an der zur Aufwickelung bestimmten Rolle befestigt und sodann der ganze *Doppeldraht auf diese Rolle aufgewunden*, so dass das Ende, an welchem die beiden Drahthälften unverbunden geblieben sind, frei oben auf zu liegen kommt, und der ganze Doppeldraht mit diesen unverbundenen Enden der beiden Drahthälften in die übrige Kette eingeschaltet werden kann.

Auf diese Weise werden alle einem solchen Doppeldrahte angehörigen Stromelemente *paarweise* so geordnet, dass, wenn keine merklichen Unterschiede in Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen vorkommen, lauter gleiche und entgegengesetzt gerichtete Stromelemente dicht neben einander liegen. Es leuchtet aber ein, dass von solchen Paaren von Stromelementen, auch bei schnellstem Wechsel der Intensität, keine elektromotorische Kraft auf irgend ein anderes entfernteres Leiterelement ausgeübt werden kann, und dass daher dieser Doppeldraht,

wie er auch beim Aufwickeln auf die Rolle gewunden worden sein möge, in Folge dieser Windungen keine Dämpfungskraft erhalten hat, durch welche die vom rotirenden Magnet hervorgebrachten elektrischen Schwingungen geschwächt würden, wie es der Fall gewesen sein würde, wenn der Draht einfach und seiner ganzen Länge nach auf gleiche Weise aufgewunden worden wäre.

Ohne die eben beschriebene Methode würden schnelle elektrische Schwingungen in einer so langen Leitungskette, zwar nicht in Folge des grossen Widerstands der Kette, sondern in Folge der wechselseitigen Induktion aller Windungen auf einander, in welchen die elektrischen Strömungen so rasch entstehen und verschwinden, ganz verschwindend klein und ihre Beobachtung daher unausführbar werden. Es bedarf hierbei kaum der Bemerkung, dass dieselbe Methode auch in anderen Fällen nützliche Anwendung finden kann, wo ähnliche Verhältnisse vorhanden sind, unter welchen dieselbe Methode Aehnliches leisten wird.

Es gilt dies namentlich für *elektrische Telegraphen* von grosser Ausdehnung, wo ebenfalls zum Zweck der Telegraphenzeichen elektrische Strömungen in sehr langer Kette sehr schnell entstehen und verschwinden sollen. Es ist auch wirklich schon bemerkt worden, dass durch die Dämpfungskräfte, welche die Elektricität in den einzelnen Drahtelementen dabei ausübt und, besonders unter dem Einfluss eines umschliessenden Konduktors, erleidet, grosse Hindernisse durch Verzögerungen für die Zeichengebung hervorgebracht werden, von denen man fürchtet, dass sie die weitere Ausdehnung besonders der unterseeischen Telegraphenlinien, z. B. von Europa nach Amerika, ganz abgesehen von den mit Legung und Erhaltung derselben verbundenen technischen Schwierigkeiten, vereiteln könnten. Es kommen dabei nicht blos die Kräfte, welche die Elektricitäten in den verschiedenen Drahtelementen wechselseitig auf einander ausüben, in Betracht, sondern auch diejenigen Kräfte, welche die Elektricität jedes Drahtelements auf die *benachbarten Leiter* ausübt und von ihnen erleidet, und selbst diejenigen Kräfte, welche vom *Erdmagnetismus*, bei seiner Veränderlichkeit, auf die Elektricität der einzelnen Drahtelemente ausgeübt werden. Alle hieraus für schnelle Zeichengebung bei sehr grosser Ausdehnung der Kette erwachsenden Hindernisse können durch Anwendung der obigen Methode ganz oder fast ganz beseitigt werden, wonach immer zwei Drahtelemente dicht neben einander zu liegen kommen, in denen die elektrische Strömung und Ladung nahe *gleich aber entgegengesetzt* sind. Es leuchtet daraus von selbst die Regel ein, dass bei weiterer Ausdehnung der Telegraphenlinie ein Kabel anzufertigen ist, in welchem dicht neben dem Drahte, welcher den Strom hinführt, ein zweiter Draht, der ihn zurückführt, sich befindet, wonach also auf die Zurückführung des Stroms durch die

Erde verzichtet werden muss. Dass die Isolirung dieser im Kabel dicht neben einander liegenden Drähte von einander keine Schwierigkeit findet, scheint das Beispiel unserer Kette zu beweisen, wo die beiden durch eine gemeinschaftliche Umspinnung fest zusammengedrückten Drähte nur dadurch von einander isolirt wurden, dass jeder für sich, vor der Zusammenlegung, mit Seide umsponnen war. Die Dicke der isolirenden Schicht betrug hierbei noch nicht $\frac{1}{10}$ Millimeter und doch war die Isolirung für Ströme, die so stark waren, dass die Länge der Skalen für die Beobachtung der von ihnen hervorgebrachten Dynamometerablenkungen kaum hinreichte, als vollkommen zu betrachten, wie aus den damit gemachten, später zu beschreibenden, Beobachtungen sich ergeben wird.

27.

Beobachtungen zur Vergleichung der Amplitude der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen einer langen geschlossenen Kette.

Nach der in den vorhergehenden Artikeln erörterten Anordnung sind nun vier Beobachtungsreihen, sämmtlich an einem Tage, am 28. September 1860, gemacht worden, *abwechselnd* zur Vergleichung der *Amplitude* und zur Bestimmung des *Phasenunterschiedes* an zwei weit von einander entfernten Stellen der oben beschriebenen langen geschlossenen Kette, während durch einen schnell rotirenden Magnet elektrische Schwingungen darin erregt wurden. Die beiden zur Vergleichung der *Amplitude* gemachten Beobachtungsreihen sollen jedoch, wenn sie auch nicht unmittelbar nach einander gemacht worden sind, in diesem Artikel *beide zusammen* betrachtet werden, ebenso wie im folgenden Artikel die *beiden* zur Bestimmung des *Phasenunterschiedes* gemachten Beobachtungsreihen.

Die korrespondirenden Beobachtungen an den beiden Elektrodynamometern wurden von Herrn Schering und von mir gemacht, während die Herren Klinkerfues und H. Weber die gleichförmige Drehung des Magnets in der Induktorrolle ausführten und deren Geschwindigkeit bestimmten. Es wurde diese Geschwindigkeit möglichst nahe auf 260 Umdrehungen in 1 Sekunde erhalten, wovon nur geringe Abweichungen vorkamen, die sich in kleinen Schwankungen der Solenoid-Ablenkungen beider Dynamometer zu erkennen gaben.

Die *Schwingungsdauer der Solenoide* beider Dynamometer war so regulirt, dass sie gleich gross war und fast genau 15 Sekunden betrug. Dabei war aber die Empfindlichkeit der beiden Instrumente doch sehr verschieden, was daher rührte, dass zu den beiden Solenoiden zwar gleich grosse Rollen, aber von verschiedener Drahtstärke und daher von

verschiedener Zahl von Umwindungen, genommen worden waren. Das *empfindlichere* Dynamometer, dessen Solenoid eine grössere Zahl von Umwindungen hatte, wurde zu denjenigen Beobachtungen gebraucht, durch die abwechselnd die Schwingungsamplitude an zwei verschiedenen Stellen der Leitungskette bestimmt werden sollte, während das *weniger empfindliche* Dynamometer zu den korrespondirenden Beobachtungen diente, um den Einfluss kleiner Schwankungen in der Rotationsgeschwindigkeit in Rechnung zu bringen, wozu dasselbe an einer bestimmten Stelle des Leitungsdrahts immer unverrückt bleiben musste.

Erste Reihe.

Die erste Beobachtungsreihe wurde nach der Art. 24 vorgeschriebenen Anordnung zum Zweck der Vergleichung der *Intensität* oder Schwingungsamplitude der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen der langen geschlossenen Kette gemacht.

Alle *Beobachtungen* sind in Theilen einer Millimeterskale ausgedrückt, deren Bild in einem 2100 Skalentheile von ihr entfernten, am Solenoid befestigten, Planspiegel auf die bei Magnetometern gewöhnliche Weise mit einem Fernrohre beobachtet wurde. Um bei den Beobachtungen die ganze Ausdehnung der Skale benutzen zu können, da das Solenoid von seiner Ruhelage stets nur nach einer und derselben Seite abgelenkt wurde, waren die Ablesungsfernröhre nebst ihren Skalen vor den Spiegeln so aufgestellt worden, dass die Ruhelage der Solenoide bei ruhendem Magnet oder bei gelöster Kette nicht, wie gewöhnlich, dem über dem Fernrohr gelegenen Mittelpunkte der Skale, sondern einem Punkte nahe am Anfang der Skale entsprach.

Während der ganzen Beobachtungsreihe wurde *die Drehung des Magnets* gleichmässig fortgesetzt. Zwischen den einzelnen durch Nummern unterschiedenen Beobachtungssätzen wurde der Art. 25 beschriebene *Kommutator A* kommutirt, nämlich das erste Mal, wo er vorher offen gewesen war, wurde er geschlossen, nachher wurde *obere* und *untere* Einstellung blos vertauscht. Der *Kommutator B* befand sich dabei in der *oberen Einstellung* fortwährend geschlossen, ebenso wie die beiden 4zelligen *Kommutatoren C* und *C'*, die vor dem Beginn der Beobachtungen zur Beruhigung der Solenoide gebraucht worden waren, während der 4zellige Kommutator *D* geöffnet und durch Wiedereinsetzen des die erste und vierte Zelle verbindenden Drahtstücks, welches während der Beruhigung der beiden Solenoide herausgenommen worden war, aus der Kette ganz ausgeschlossen wurde.

Vor dem Beginn der Beobachtungen waren die Solenoide der beiden Dynamometer, wie Art. 25 auseinandergesetzt worden, möglichst

beruhigt worden. — Da die Einstellung der drei Kommutatoren B, C, C' während der ganzen Beobachtungsreihe unverändert blieb, so ist in den Ueberschriften der einzelnen Sätze dieser Beobachtungsreihe nur bemerkt, ob die Kette geöffnet oder geschlossen war und in letzterem Falle, ob die *obere* oder *untere Einstellung des Kommutators A* nach dem Schema Art. 25 Statt fand. — Bei *geschlossener Kette*, wo die Solenoide in grösserer Bewegung waren, sind aus den nach einander beobachteten Elongationen *die zweiten Mittel* zur Bestimmung des *Ruhestands* genommen worden.

Obere Einstellung des Kommutators B.

Satz 1. Kette geöffnet.

Dynamometer 1. Beobachtete Elongationen	Dynamometer 1. Ruhestand	Dynamometer 2. Beobachtete Elongationen	Dynamometer 2. Ruhestand
52,9		+ 11,4	
16,2	34,55	— 12,0	— 0,30
52,6	34,40	+ 11,2	— 0,40
16.6	34,60	— 11,9	— 0,35
52,5	34,55	+ 11,0	— 0,45
16,9	34,70	— 11,4	— 0,20
	Mittel 34,56		Mittel — 0,34

Satz 2. Kette geschlossen. Obere Einstellung des Kommutators *A*.

Dynamometer 1. Beobachtete Elongationen	Dynamometer 1. Ruhestand	Dynamometer 2. Beobachtete Elongationen	Dynamometer 2. Ruhestand
901,7		638,2	
854,7	876,55	606,8	621,38
895,1	877,93	633,7	622,35
866,8	880,82	615,2	624,52
894,6	882,70	634,0	625,83
874,8		620,1	
	Mittel 879,50		Mittel 623,52

Satz 3. Kette geschlossen. Untere Einstellung des Kommutators *A*.

Dyn. 1 Elongationen	Ruhestand	Dyn. 2 Elongationen	Ruhestand
843,1		596,2	
908,8	872,35	644,9	617,95
828,7	870,45	585,8	616,60
915,6	873,72	649,9	619,10
835,0	879,35	590,8	623,20
931,8		661,3	
	Mittel 873,97		Mittel 619,21

Satz 4. Kette geschlossen. Obere Einstellung des Kommutators *A*.

Dyn. 1 Elongationen	Ruhestand	Dyn. 2 Elongationen	Ruhestand
811,4		574,2	
941,8	880,90	668,5	624,65
828,6	890,82	587,4	631,87
964,3	887,95	684,2	629,68
794,6	872,93	562,9	619,13
938,2		666,5	
	Mittel 883,15		Mittel 626,33

Satz 5. Kette geschlossen. Untere Einstellung des Kommutators *A*.

Dyn. 1 Elongationen	Ruhestand	Dyn. 2 Elongationen	Ruhestand
796,7		564,7	
978,0	885,60	694,1	628,20
789,7	887,47	559,9	629,45
992,5	884,35	704,1	627,15
762,7	876,35	540,5	621,37
987,5		700,4	
	Mittel 883,44		Mittel 626,55

Satz 6. Kette geschlossen. Obere Einstellung des Kommutators *A*.

Dyn. 1 Elongationen	Ruhestand	Dyn. 2 Elongationen	Ruhestand
748,3		531,5	
1007,5	877,80	714,5	622,93
747,9	879,30	531,2	623,97
1013,9	880,67	719,0	624,97
747,0	876,65	530,7	622,13
998,7		708,1	
	Mittel 878,61		Mittel 623,50

Satz 7. Kette geschlossen.

Untere Einstellung des Kommutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
742,8		527,6	
1011,1	880,28	716,2	624,38
756,1	883,47	537,5	626,77
1010,6	882,45	715,9	626,00
752,5	879,43	534,7	623,80
1002,1		709,9	
	Mittel 881,41		Mittel 625,24

Vergleicht man die korrespondirenden Ablenkungen der beiden gleichzeitig beobachteten Dynamometer, welche man erhält, wenn man den bei *geöffneter* Kette (Satz 1) beobachteten Ruhestand von dem bei *geschlossener* Kette beobachteten abzieht, und beschränkt sich dabei zunächst auf diejenigen Fälle (Satz 2, 4, 6), wo beide Dynamometer ihre Stelle in der Kette symmetrisch dicht neben einander, von beiden Seiten durch die beiden langen Leitungsdrähte vom Induktor des rotirenden Magnets geschieden, erhalten hatten, wo also immer gleiche Schwingungsamplitude und Schwingungsphase in beiden Dynamometern zugleich Statt finden musste, so giebt das Verhältniss der beobachteten Ablenkungen beider Dynamometer zu einander *das Verhältniss ihrer Empfindlichkeit*. Hiernach erhält man die Empfindlichkeit des *ersten* Dynamometers in Theilen der des *zweiten* ausgedrückt:

$$\text{aus Satz 1 und 2: } \frac{844{,}94}{623{,}86} = 1{,}3544,$$

$$\text{aus Satz 1 und 4: } \frac{848{,}59}{626{,}67} = 1{,}3541,$$

$$\text{aus Satz 1 und 6: } \frac{844{,}05}{623{,}84} = 1{,}3530,$$

im Mittel also *das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers zu der des zweiten* wie

$$1{,}3538 : 1.$$

Nach dieser Vergleichung der Empfindlichkeit beider Dynamometer unter einander können die beobachteten Ablenkungen des einen abwechselnd an zwei verschiedenen Stellen der Kette eingeschalteten Dynamometers, mit Hülfe der beobachteten Ablenkungen des anderen immer an derselben Stelle der Kette gebliebenen Dynamometers, so reducirt werden, wie wenn die Ablenkungen an den beiden Stellen der Kette *gleichzeitig mit ganz gleichen Dynamometern* beobachtet worden wären. Es kann

nämlich aus den korrespondirenden Ablenkungen des Hülfsdynamometers nun immer die Ablenkung des Hauptdynamometers berechnet werden, wie sie beobachtet worden sein würde, wenn das Hauptdynamometer an seiner ursprünglichen Stelle, für welche die Vergleichung seiner Empfindlichkeit mit der des anderen Dynamometers gilt, geblieben wäre, und diese für die *erste Stellung* des Hauptdynamometers in der Kette *berechnete Ablenkung* lässt sich dann mit der in der *zweiten Stellung* des Hauptdynamometers wirklich *beobachteten Ablenkung* vergleichen.

Multiplicirt man nämlich mit der gefundenen Verhältnisszahl 1,3538 die beobachteten Ablenkungen des Hülfsdynamometers im 3., 5. und 7. Satze, nämlich, nach Abzug des Satz 1 gefundenen Ruhestands,

619,55, 626,89, 625,58,

so erhält man die Ablenkungen, welche am Hauptdynamometer beobachtet worden sein würden, wenn letzteres seine Stellung in der Kette, so wie sie beim 2., 4. und 6. Satze gewesen war, behalten hätte.

In der folgenden Tafel sind die Werthe dieser *berechneten Ablenkungen* in der *zweiten* Kolumne enthalten; in der *dritten* Kolumne sind die zu der Zeit, für welche diese *berechneten Ablenkungen des Hauptdynamometers an Stelle I* galten, wirklich *beobachteten Ablenkungen des Hauptdynamometers an Stelle II* angegeben; in der *vierten* Kolumne endlich sind die Unterschiede zwischen beiden bemerkt worden.

Satz	Berechnete Ablenkung für Stelle I	Beobachtete Ablenkung für Stelle II	Unterschied
3.	838,75	839,41	+ 0,66
5.	848,69	848.88	+ 0,19
7.	846,92	846,85	— 0,07
Mittel	844,78	845,05	+ 0,26

Diese in Skalentheilen beobachteten Ablenkungen, mit dem 2100 Skalentheile betragenden Abstande des Spiegels von der Skale dividirt, geben nun aber die Tangenten der doppelten Winkel, welche Art. 24 mit v, v' bezeichnet worden sind. Es ist also

$$\text{für Stelle I:}\quad \operatorname{tang} v = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \tfrac{844.78}{2100} = 0{,}193\,601,$$

$$\text{für Stelle II:}\quad \operatorname{tang} v' = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \tfrac{845.05}{2100} = 0{,}193\,656.$$

Nun verhalten sich aber nach Art. 24 die Quadrate der Intensitäten i, i', oder *die Quadrate der Amplituden der elektrischen Schwingungen* an den beiden verglichenen Stellen I und II, wohin das Hauptdynamo-

meter durch die obere und untere Einstellung des Kommutators A versetzt wurde, wie

$$i^2 : i'^2 = \text{tang}\, v : \text{tang}\, v' ;$$

folglich erhält man hieraus

$$i' = 1{,}000142 \,.\, i.$$

Die Stelle I befindet sich aber in der Kette fast 5 Meilen weit von dem Induktor, in welchem der rotirende Magnet sich befindet, entfernt, während die Stelle II sehr nahe beim Induktor liegt. Es scheint sich also hieraus zwar zu ergeben, dass die Amplitude der durch den rotirenden Magnet in der ganzen Kette hervorgebrachten elektrischen Schwingungen in grosser Entfernung von dem Induktor, von wo die Erregung ausging, nämlich an der mit I bezeichneten Stelle, etwas kleiner sei als ganz in der Nähe des Induktors, an der Stelle II; doch ist der gefundene Unterschied so ausserordentlich gering, dass er auch bei grösster Genauigkeit der Beobachtungen sich nicht mehr sicher verbürgen lässt, er beträgt nämlich kaum $\frac{1}{7000}$ von der ganzen Schwingungsamplitude, welche der ganzen Dynamometer-Ablenkung entspricht. In der That ergeben also diese Beobachtungen, dass an zwei fast 5 Meilen von einander entfernten Stellen der Kette auch durch die genauesten Beobachtungen *gar kein Unterschied in der Amplitude der elektrischen Schwingungen mit Sicherheit nachgewiesen werden kann.*

Was die *Genauigkeit der Beobachtungen* betrifft, so leuchtet zwar ein, dass eine nähere Bestimmung derselben aus so wenigen Wiederholungen, wie diese erste Beobachtungsreihe enthält, noch nicht gewonnen werden kann; indess darf man, da keine Abweichung vom Mittelwerthe 0,40 Skalentheil übersteigt, diesen Mittelwerth aus allen drei Beobachtungen bis auf einen Skalentheil wohl als zuverlässig betrachten, was dem 845. Theile der ganzen Schwingungsamplitude entspricht. — Eine solche Genauigkeit der Intensitätsmessungen *elektrischer Schwingungen* übertrifft die Genauigkeit, welche bisher in den Intensitätsmessungen fast aller anderer Schwingungen hat erreicht werden können. In der *Akustik* und *Optik* hängt von der Schwingungsamplitude die Intensität des Schalles und Lichtes ab, und es ist bekannt, wie weit die Intensitätsmessungen des Schalles und Lichtes hinter jener Genauigkeit zurückbleiben. Nur die nach der Gauss'schen Methode gemachten Beobachtungen der Schwingungsamplitude einer Magnetnadel oder überhaupt einer unifilar oder bifilar aufgehangenen Drehwaage gewähren gleiche und unter günstigen Verhältnissen eine noch etwas grössere Genauigkeit. — Es verdient dabei bemerkt zu werden, dass dieselbe Genauigkeit mit demselben Induktor und mit denselben Dynamometern, welche zur Hervorbringung und zur Beobachtung der elektrischen

Schwingungen, von denen 520 in jeder Sekunde Statt fanden, in einer fast 10 Meilen langen Kette, dienten, ebenso gut erreichbar gewesen wäre, auch wenn die Zahl der elektrischen Schwingungen über 1000 in 1 Sekunde, und die Länge der Kette über 30 Meilen gestiegen wäre, ohne dass es dabei einer Verstärkung des Drahts der verlängerten Kette bedurft hätte; denn es war bei den beschriebenen Versuchen die elektrische Schwingung und deren Wirkung absichtlich verkleinert worden, nämlich *erstens* durch Ausschluss der einen Hälfte des Induktors, auf welche der rotirende Magnet wirkte, *zweitens* durch Verstärkung der statischen Direktionskraft der Solenoide beider Dynamometer; die Länge der Skale würde sonst für die Beobachtungen nicht ausgereicht haben. Beim Gebrauch des ganzen Induktors und durch Verminderung der statischen Direktionskraft der Solenoide, wodurch ihre Schwingungsdauer leicht von 15 auf 20 Sekunden vergrössert werden konnte, würden die beobachteten Wirkungen bei einer viel längeren Kette noch ebenso gross gewesen sein.

Um jeden Zweifel zu beseitigen, dass diese Genauigkeit nur scheinbar sei und die Uebereinstimmung der in obiger Beobachtungsreihe nur drei Mal wiederholten Beobachtungen nur zufällig sei, ist endlich noch eine *zweite Beobachtungsreihe*, ganz nach derselben Anordnung und an dem nämlichen Tage ausgeführt worden, deren Resultate zur Vergleichung mit der vorhergehenden in der folgenden Tafel auf dieselbe Weise zusammengestellt worden sind.

Zweite Reihe.

Die der ersten Reihe vorausgeschickten Bemerkungen gelten auch für die zweite Reihe.

Obere Einstellung des Kommutators B.

Satz 1. Kette geöffnet.				Satz 2. Kette geschlossen. Obere Einstellung des Kommutators *A*.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.		Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
30,3	32,35	— 8,5	— 1,65	858,7		615,7	
34,4	32,35	+ 5,2	— 1,55	904,2	879,00	636,1	623,83
30,3	32,20	— 8,3	— 1,65	848,9	879,68	607,4	624,47
34,1	32,20	+ 5,0	— 1,50	916,7	880,52	647,0	625,15
30,3	32,25	— 8,0	— 1,55	839,8	876,00	599,2	621,90
34,2		+ 4,9		907,7		642,2	
Mittel	32,27	Mittel	— 1,58	Mittel	878,80	Mittel	623,84

Satz 3. Kette geschlossen.
Untere Einstellung des Kommutators *A*.

Satz 4. Kette geschlossen.
Obere Einstellung des Kommutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.		Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
837,0		596,0		792,5		554,0	
918,8	880,60	649,0	624,70	964,0	881,38	683,1	623,30
847,8	885,58	604,8	628,67	805,0	884,72	573,0	628,07
927,9	881,70	656,1	625,75	964,9	880,70	683,2	625,22
823,2	880,00	586,0	624,38	788,0	879,35	561,5	624,25
945,7		669,4		976,5		690,8	
Mittel 881,97		Mittel 625,87		Mittel 881,54		Mittel 625,21	

Satz 5. Kette geschlossen.
Untere Einstellung des Kommutators *A*.

Satz 6. Kette geschlossen.
Obere Einstellung des Kommutators *A*.

794,0		566,4		783,2		559,9	
962,4	875,90	678,5	621,10	961,1	877,62	679,0	623,15
784,8	876,73	561,0	621,93	805,1	875,53	574,7	621,42
974,9	879,92	687,2	623,95	930,8	869,10	657,3	617,10
785,1	874,35	560,4	620,02	809,7	872,52	579,1	619,68
952,3		672,1		939,9		663,2	
Mittel 876,73		Mittel 621,75		Mittel 873,69		Mittel 620,34	

Satz 7. Kette geschlossen.
Untere Einstellung des Kommutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
783,5		560,8	
969,6	878,25	682,9	623,13
790,3	881,72	565,9	625,67
976,7	882,28	688,0	626,08
785,4	882,12	562,4	625,95
981,0		691,0	
Mittel 881,09		Mittel 625,21	

Für das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers, in Theilen der des zweiten ausgedrückt, erhält man aus den Beobachtungen dieser zweiten Reihe folgende Werthe:

aus Satz 1 und 2: $\frac{846{,}53}{625{,}42} = 1{,}3535$,

aus Satz 1 und 4: $\frac{849{,}27}{626{,}79} = 1{,}3549$,

aus Satz 1 und 6: $\frac{841{,}42}{621{,}92} = 1{,}3529$,

im Mittel also das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers zu der des zweiten wie

1,3538 : 1.

Multiplicirt man nun mit dieser Verhältnisszahl 1,3538 die beobachteten Ablenkungen des zweiten Dynamometers, welches seine Stelle in der Kette bei allen Beobachtungen immer beibehalten hat, nämlich die Ablenkungen, welche sich aus der Differenz der Ruhestände bei geöffneter Kette in Satz 1 und bei geschlossener Kette in Satz 3, 5, 7 ergeben:

627,45, 623,33, 626,79,

so geben die Produkte

849,45, 843,86, 848,55

die Grösse der Ablenkungen, welche am ersten Dynamometer, wenn dasselbe seine Stelle in der Kette, die es während der Beobachtungen Satz 2, 4, 6 hatte, beibehalten hätte, beobachtet worden wären, während die aus den Ruheständen Satz 3, 5, 7 entnommenen Ablenkungen der veränderten Stellung des Dynamometers in der Kette entsprechen. In der folgenden Tafel sind die der ursprünglichen Stellung mit denen der veränderten Stellung des ersten Dynamometers in der Kette entsprechenden Ablenkungen zusammengestellt worden.

Satz	Berechnete Ablenkung für Stelle I	Beobachtete Ablenkung für Stelle II	Unterschied
3.	849,45	849,70	+ 0,25
5.	843,86	844,46	+ 0,60
7.	848,55	848,82	+ 0,27
Mittel	847,29	847,66	+ 0,37

Hieraus ergiebt sich ebenso, wie bei der vorigen Beobachtungsreihe, zur Vergleichung der Schwingungsamplitude oder der Strömungsintensität an der Stelle I und II,

für Stelle I: $\text{tang}\, v = \text{tang}\, \tfrac{1}{2} \text{arc tang}\, \frac{847{,}29}{2100} = 0{,}194\,134$,

für Stelle II: $\text{tang}\, v' = \text{tang}\, \tfrac{1}{2} \text{arc tang}\, \frac{847{,}66}{2100} = 0{,}194\,212$,

folglich, da nach Art. 24

$$i^2 : i'^2 = \text{tang}\, v : \text{tang}\, v'$$

ist, ergiebt sich hieraus

$$i' = 1{,}000201 \,.\, i.$$

Der Unterschied der Schwingungsamplitude beträgt also zwischen den beiden Stellen, von denen die eine fast 5 Meilen vom Induktor des rotirenden Magnets entfernt war, während die andere dicht beim Induktor sich befand, kaum $\frac{1}{5000}$ von der ganzen Schwingungsamplitude, welche der ganzen Dynamometerablenkung entspricht. Es leuchtet ein, dass auch dieser Unterschied zu gering ist, um auch bei grösster Genauigkeit der Beobachtungen verbürgt werden zu können, und es wird daher auch durch diese zweite Beobachtungsreihe die Bestätigung erhalten, dass *an zwei fast 5 Meilen von einander entfernten Stellen der Kette gar kein Unterschied in der Amplitude der elektrischen Schwingungen mit Sicherheit nachgewiesen werden kann.*

28.

Beobachtungen zur Bestimmung des Unterschieds der Phase der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen einer langen geschlossenen Kette.

Bei gleicher Anordnung, wie die für die beiden vorhergehenden Beobachtungsreihen beschriebene, wurde eine *dritte* Beobachtungsreihe, aber nicht zur Vergleichung der Schwingungsamplituden, sondern zur Bestimmung des *Phasenunterschieds* der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen einer langen Kette ausgeführt. Es wurde zu diesem Zwecke, ebenso wie bei den vorhergehenden Beobachtungsreihen, zwischen den einzelnen durch Nummern unterschiedenen Beobachtungssätzen der Art. 25 beschriebene *Kommutator A*, wenn er vorher geöffnet gewesen war, geschlossen, oder, wenn er geschlossen gewesen war, kommutirt, das heisst, es wurden *obere* und *untere* Einstellung mit einander vertauscht. Dagegen wurde dabei *Kommutator B* zwar fortwährend geschlossen erhalten, aber in der *unteren* (statt früher in der oberen) *Einstellung*. Die beiden 4zelligen *Kommutatoren C und C'* endlich, die vor dem Beginn der Beobachtungen zur Beruhigung der Solenoide gebraucht worden waren, wurden während der Beobachtungen wieder gerade ebenso geschlossen und eingestellt erhalten wie früher. Der Kommutator *D* wurde, nach Beruhigung der Solenoide,

vor dem Beginn der Beobachtungen geöffnet und durch einen seine erste und letzte Zelle verbindenden Draht ganz aus der Kette ausgeschlossen.

Dritte Reihe.

Untere Einstellung des Kommutators B.

Satz 1. Kette geöffnet.				Satz 2. Kette geschlossen. Obere Einstellung des Kommutators *A*.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.		Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
33,9	35,95	— 3,5	— 3,70	849,5		995,0	
38,0	35,95	— 3,9	— 3,65	917,7	883,25	263,1	626,67
33,9	35,95	— 3,4	— 3,20	848,1	889,37	985,5	630,87
38,0	35,95	— 3,0	— 3,40	943,6	889,15	289,4	629,60
33,9	36,00	— 3,8	— 3,45	821,3	875,85	954,1	619,50
38,1		— 3,1		917,2		280,4	
Mittel 35,96		Mittel — 3,48		Mittel 884,41		Mittel 626,66	

Satz 3. Kette geschlossen. Untere Einstellung des Kommutators *A*.				Satz 4. Kette geschlossen. Obere Einstellung des Kommutators *A*.			
812,8		940,0		943,2		363,1	
956,7	882,55	317,6	625,27	809,5	875,45	873,8	619,30
804,0	876,10	925,9	620,57	939,6	873,17	366,5	617,70
939,7	873,35	312,9	618,70	804,0	875,20	864,0	618,62
810,0	878,10	923,1	622,32	953,2	880,35	380,0	622,13
952,7		330,2		811,0		864,5	
Mittel 877,52		Mittel 621,72		Mittel 876,04		Mittel 619,44	

Satz 5. Kette geschlossen. Untere Einstellung des Kommutators *A*.				Satz 6. Kette geschlossen. Obere Einstellung des Kommutators *A*.			
925,7		366,2		919,8		369,0	
836,3	881,82	879,8	625,35	845,1	886,12	881,2	627,52
929,0	877,45	375,6	622,35	934,5	885,68	378,7	627,53
815,5	875,10	858,4	618,15	828,6	880,35	871,5	624,62
940,4	879,10	380,2	621,40	929,7	878,32	376,8	622,53
820,1		866,8		825,3		865,0	
Mittel 878,37		Mittel 621,81		Mittel 882,62		Mittel 625,55	

Satz 7. Kette geschlossen.

Untere Einstellung des Kommutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
898,0		367,5	
850,5	875,77	870,9	619,52
904,1	872,63	368,8	619,13
831,8	870,10	868,0	618,45
912,7	868,52	369,0	615,77
816,9		857,1	
	Mittel 871,76		Mittel 618,22

Für das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers, in Theilen der des zweiten ausgedrückt, erhält man aus den Beobachtungen dieser dritten Reihe folgende Werthe:

$$\text{aus Satz 1 und 2: } \frac{848{,}45}{630{,}14} = 1{,}3464,$$

$$\text{aus Satz 1 und 4: } \frac{840{,}08}{622{,}92} = 1{,}3486,$$

$$\text{aus Satz 1 und 6: } \frac{846{,}66}{629{,}03} = 1{,}3460,$$

im Mittel also das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers zum zweiten wie

$$1{,}3470 : 1.$$

Multiplicirt man nun mit dieser Verhältnisszahl 1,3470 die beobachteten Ablenkungen des zweiten Dynamometers, welches seine Stelle in der Kette bei allen Beobachtungen immer beibehalten hat, nämlich die Ablenkungen, welche sich aus der Differenz der Ruhestände bei geöffneter Kette in Satz 1 und bei geschlossener Kette in Satz 3, 5, 7 ergeben:

625,20, 625,29, 621,70,

so geben die Produkte

842,15, 842,26, 837,44

die Grösse der Ablenkungen, welche am ersten Dynamometer, wenn das Solenoid diejenige Stelle, die es während der Beobachtungen Satz 2, 4, 6 hatte, beibehalten hätte, beobachtet worden wären, während die aus den Ruheständen Satz 3, 5, 7 entnommenen Ablenkungen der veränderten Stellung des Solenoids in der Kette entsprechen. In der folgenden

Tafel sind die der ursprünglichen mit denen der veränderten Stellung des Solenoids entsprechenden Ablenkungen des ersten Dynamometers zusammengestellt worden.

Satz	Berechnete Ablenkung für Stelle I des Solenoids	Beobachtete Ablenkung für Stelle II des Solenoids	Unterschied
3.	842,15	841,56	— 0,59
5.	842,26	842,41	+ 0,15
7.	837,44	835,80	— 1,64
Mittel	840,62	839,92	— 0,70

Auch diese Beobachtungsreihe ist nochmals wiederholt worden, um die diesen Beobachtungen zuzuschreibende Genauigkeit daran zu erproben, und wir wollen diese *vierte* Beobachtungsreihe sogleich folgen lassen.

Vierte Reihe.

Untere Einstellung des Kommutators B.

Satz 1. Kette geöffnet.				Satz 2. Kette geschlossen. Obere Einstellung des Kommutators *A*.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.		Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
44,8	36,50	+ 4,3	— 1,25	840,9		592,2	
28,2	36,35	— 6,8	— 1,25	917,6	879,82	650,3	621,70
44,5	36,20	+ 4,3	— 1,15	843,2	880,80	594,0	622,37
27,9	36,25	— 6,6	— 1,20	919,2	882,23	651,2	623,40
44,6	36,35	+ 4,2	— 1,30	847,3	884,05	597,2	624,70
28,1		— 6,8		922,4		653,2	
Mittel 36,33		Mittel — 1,23		Mittel 881,72		Mittel 623,04	

Satz 3. Kette geschlossen. Untere Einstellung des Kommutators *A*.				Satz 4. Kette geschlossen. Obere Einstellung des Kommutators *A*.			
794,5		559,9		772,9		543,9	
970,1	882,67	687,4	623,90	1005,7	886,77	712,1	626,20
796,0	882,95	560,9	624,00	762,8	883,15	536,7	623,57
969,7	885,48	686,8	625,82	1001,3	882,50	708,8	623,15
806,5	887,97	568,8	627,70	764,6	882,25	538,3	623,00
969,2		686,4		998,5		706,6	
Mittel 884,77		Mittel 625,36		Mittel 883,67		Mittel 623,98	

Satz 5. Kette geschlossen.
Untere Einstellung des Kommutators *A*.

Satz 6. Kette geschlossen.
Obere Einstellung des Kommutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.		Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
744,1		524,2		988,3		698,9	
1023,3	883,92	724,3	624,45	779,0	883,07	550,1	623,95
745,0	883,75	525,0	624,32	986,0	879,20	696,7	621,00
1021,7	885,80	723,0	625,80	765,8	878,93	540,5	620,75
754,8	883,37	532,2	624,15	998,1	884,37	705,3	624,72
1002,2	879,68	709,2	621,60	775,5		547,8	
759,5		535,8					
Mittel 883,30		Mittel 624,06		Mittel 881,39		Mittel 622,61	

Satz 7. Kette geschlossen.
Untere Einstellung des Kommutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
960,0		678,2	
805,4	884,25	570,5	625,37
966,2	882,20	682,3	623,75
791,0	876,15	559,9	619,38
956,4	875,35	675,4	618,87
797,6		564,8	
Mittel 879,49		Mittel 621,84	

Für das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers, in Theilen der des zweiten ausgedrückt, erhält man aus den Beobachtungen dieser vierten Reihe folgende Werthe:

$$\text{aus Satz 1 und 2: } \frac{845{,}39}{624{,}27} = 1{,}3542,$$

$$\text{aus Satz 1 und 4: } \frac{847{,}34}{625{,}21} = 1{,}3553,$$

$$\text{aus Satz 1 und 6: } \frac{845{,}06}{623{,}84} = 1{,}3546,$$

im Mittel also das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers zu der des zweiten wie

$$1{,}3547 : 1.$$

Multiplicirt man nun mit dieser Verhältnisszahl 1,3547 die beobachteten Ablenkungen des zweiten Dynamometers, welches seine Stelle in der

Kette bei allen Beobachtungen immer beibehalten hat, nämlich die Ablenkungen, welche sich aus der Differenz der Ruhestände bei geöffneter Kette in Satz 1 und bei geschlossener Kette in Satz 3, 5, 7 ergeben:

626,59, 625,29, 623,07,

so geben die Produkte

848,84, 847,10, 844,10

die Grösse der Ablenkungen, welche am ersten Dynamometer, wenn das Solenoid die Stelle in der Kette, die es während der Beobachtungen Satz 2, 4, 6 hatte, beibehalten hätte, beobachtet worden wären, während die aus den Ruheständen Satz 3, 5, 7 entnommenen Ablenkungen der veränderten Stellung des Solenoids des ersten Dynamometers in der Kette entsprechen. In der folgenden Tafel sind die der ursprünglichen mit denen der veränderten Stellung des Solenoids in der Kette entsprechenden Ablenkungen zusammengestellt worden.

Satz	Berechnete Ablenkung für Stelle I des Solenoids	Beobachtete Ablenkung für Stelle II des Solenoids	Unterschied
3.	848,84	848,44	— 0,40
5.	847,10	846,97	— 0,13
7.	844,10	843,16	— 0,94
Mittel	846,68	846,19	— 0,49

Vergleicht man mit diesen aus der *vierten* Beobachtungsreihe gefundenen Mittelwerthen die aus der *dritten* Beobachtungsreihe erhaltenen, so ergiebt sich das Verhältniss der Ablenkungen an beiden Stellen so übereinstimmend, dass es für alle weiteren Betrachtungen offenbar genügt, die Mittel aus beiden Reihen in Rechnung zu bringen, nämlich für die Ablenkung des Solenoids

an Stelle I 843,65,
an Stelle II 843,055.

Hieraus ergeben sich nun zur Bestimmung des Unterschieds der Schwingungsphasen an Stelle I und II nach Art. 24 die Werthe

$$u = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} \tfrac{843,65}{2100} = 10^0\ 56'\ 37{,}0'',$$

$$v'' = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} \tfrac{843,055}{2100} = 10^0\ 56'\ 11{,}7''.$$

Die letztere Angabe würde noch einer kleinen Korrektion bedürfen, wenn man nach dem Ergebniss des vorhergehenden Artikels nicht die

Schwingungsamplitude an den beiden Stellen I und II als gleich betrachten, sondern den kleinen Unterschied, der sich ergeben, ungeachtet er in keiner Weise verbürgt werden kann, in Rechnung bringen wollte. Es würde dann $v'' = 10^0\ 56'\ 13{,}2''$ zu setzen sein. Indess werden wir uns hier an die erstere Angabe halten, weil gar kein Grund vorhanden ist, eine solche Ungleichheit der Schwingungsamplitude, da sie erfahrungsmässig gar nicht sicher festgestellt werden kann, anzunehmen.

Hiernach ergiebt sich endlich zur Bestimmung des Phasenunterschieds 2λ an den beiden Stellen I und II nach Art. 24

$$\sin\lambda^2 = \frac{u - v''}{2\sin u\,(\cos u + [u - v'']\sin u)} = 0{,}000\,329,$$

folglich

$$2\lambda = 2^0\ 4'\ 43'',$$

was etwa dem 87. Theile der Schwingungsdauer entspricht.

Auch diese Bestimmung des *Phasenunterschieds* beruht auf einer so kleinen Differenz in den beobachteten Ablenkungen, welche nur $\frac{3}{5}$ Skalentheil betrug, dass sie *ebenso wenig als erfahrungsmässig sicher festgestellt betrachtet werden kann, wie die geringe Verschiedenheit der Schwingungsamplitude im vorhergehenden Artikel.*

29.

Resultat der Prüfung.

Die Art. 27, 28 beschriebenen Beobachtungen dienen den im vorhergehenden Abschnitte entwickelten Gesetzen in Beziehung auf das Verhalten der *Schwingungsamplituden* und *Schwingungsphasen* an verschiedenen Stellen eines geschlossenen Leiters zur Prüfung, und es ist dadurch die Gleichheit von Amplituden und Phasen noch für sehr schnelle Schwingungen in einem sehr langen geschlossenen Leitungsdrahte bestätigt gefunden worden. Die zu diesen Beobachtungen gebrauchte Methode gleichzeitiger correspondirender Beobachtungen an zwei in ihrer Schwingungsdauer genau übereinstimmenden Dynamometern gestattete dabei eine sehr grosse Genauigkeit, und es würde sich damit diese Prüfung noch viel weiter erstrecken lassen, wenn die Mittel zu noch schnellerer Rotation des Magnets und zur Herstellung noch längerer Leitungsketten vorhanden wären. Eine solche weitere Ausdehnung dieser Prüfung würde aber, wie es scheint, die darauf zu verwendende Mühe und den Aufwand nicht hinreichend lohnen, und es dürfte deren Ausdehnung bis zu 520 Schwingungen in 1 Sekunde und bis 10 Meilen Länge der Kette bei den beschriebenen Beobachtungen schon genügen.

Zwar leuchtet ein, dass auch dann, wenn Amplituden und Phasen elektrischer Schwingungen in geschlossenen Ketten im Allgemeinen nicht überall gleich wären, doch ihre Verschiedenheiten desto kleiner werden müssten, je *grösser* die von der Rotationsgeschwindigkeit abhängige *Schwingungsdauer* und je *kürzer* der *Leitungsdraht* wäre, so dass diese Unterschiede bei immer wachsender Schwingungsdauer und abnehmender Länge des Leitungsdrahts endlich unmerklich werden müssten. Es kann daher die beabsichtigte Prüfung ihren Zweck nur dann erreichen, wenn sie sich beträchtlich über die Grenzen hinaus erstreckt, innerhalb deren eine solche Ausgleichung in jedem Falle Statt finden müsste, und es fragt sich also, ob eine Leiterlänge von 10 Meilen und eine Schwingungsdauer von $\frac{1}{520}$ Sekunde dazu genüge.

Man denke sich von einem Punkte der Kette einen *einfachen Wellenzug* ausgehend und betrachte denselben während des *ersten Umlaufs*. Die Wellendauer betrage $\frac{1}{520}$ Sekunde und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit sei die normale $c\sqrt{\frac{1}{2}} = 41\,950$ Meilen. In diesem Falle würde, wenn er sich darstellen liesse, eine *Abnahme der Amplitude* der von dem Wellenzuge hervorgebrachten elektrischen Schwingung mit der Entfernung von der Stelle, von welcher der Wellenzug ausgeht, und für jeden Augenblick ein mit derselben Entfernung wachsender *Phasenunterschied* Statt finden, die sich beide leicht bestimmen liessen.

Für einen solchen *einfachen Wellenzug* kann nämlich die Verschiebung eines elektrischen Theilchens σ durch folgende Gleichung dargestellt werden:

$$\sigma = Ae^{-\varepsilon t} \cdot \sin 520\,\pi\left(t - \frac{s}{c}\sqrt{2}\right),$$

worin nach Art. 15 $\varepsilon = c^2/[16\pi a^2 k M'']$ und $M'' = 2\log(8a/\alpha)$ näherungsweise gesetzt werden darf. Da nun ferner nach Art. 16 $1/[\pi\alpha^2 k] = w'$ $= 16 \,.\, 10^6/[\pi\alpha^2 \,.\, c^2]$, folglich $\varepsilon = 10^6/[2\pi a^2 \log(8a/\alpha)]$, und für unsere Kette $2\pi a = 76 \,.\, 10^6$ Millimeter und $\alpha = \frac{1}{8}$ Millimeter betrug, so erhält man

$$\varepsilon = 477\,000.$$

Einer Entfernung $s = 38 \,.\, 10^6$ Millimeter (etwa 5 Meilen) entspricht nun bei der Fortpflanzung der Zeitraum $t = [s/c] \,.\, \sqrt{2} = \frac{1}{8177}$ Sekunde, folglich das Verhältniss der Amplituden am Ausgangspunkte und in 5 Meilen Entfernung davon:

$$1 : e^{-\varepsilon t} = 1 : e^{-54,7} = 573 \,.\, 10^{21} : 1,$$

wonach also die *Amplitude* in 5 Meilen Entfernung so klein geworden ist, dass sie gegen die am Ausgangspunkte des Wellenzugs ganz verschwindet.

Der *Phasenunterschied* für einen gegebenen Augenblick am Ausgangspunkte des Wellenzugs und in der Entfernung $= s$ davon wird durch $520\,[\pi s/c]\,.\sqrt{2}$ dargestellt, also, für $s = 38\,.\,10^6$, durch $0{,}0636\,.\,\pi = 10^0\,27'$, ein Phasenunterschied, der bei der Genauigkeit, welche die Beobachtungen nach dem vorhergehenden Artikel gestatten, keineswegs als unmerklich betrachtet werden kann.

Nach diesem aus der Betrachtung der Elementarwellen entnommenen Ueberschlage dürfen die in den vorhergehenden Artikeln beschriebenen Versuche als hinreichend zur Prüfung der im vorigen Abschnitte in Beziehung auf die Verhältnisse der Amplituden und der Phasen elektrischer Schwingungen in geschlossenen Leitern aufgestellten Gesetze betrachtet werden.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass die gefundene Gleichheit der Schwingungsamplitude an verschiedenen weit von einander entfernten Stellen des geschlossenen Leitungsdrahts zugleich auch als Beweis dienen kann, dass dieser mit Seide umsponnene Draht für elektrische Strömungen, wie sie durch den rotirenden Magnet hervorgebracht wurden, als hinreichend isolirt zu betrachten ist; denn bei unvollkommener Isolation hätten die Strömungen in den vom Induktor entfernteren Theilen der Kette schwächer als in den dem Induktor näher liegenden sein müssen.

30.

Beobachtungen über die Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets.

Nachdem *die Gleichheit der Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen* für die längste Kette und für die grösste Rotationsgeschwindigkeit des Magnets, welche sich mit den gegebenen Mitteln darstellen liessen, bestätigt worden ist, woraus von selbst einleuchtet, dass diese Gleichheit um so mehr bei kürzeren Ketten und kleineren Rotationsgeschwindigkeiten Statt finde, so bleibt für die *quantitative Prüfung* der im vorhergehenden Abschnitte entwickelten Gesetze hauptsächlich nur noch die Prüfung des Gesetzes der *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets,* für die nämliche Kette, übrig.

Aus der Gleichheit der Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen in allen Theilen eines geschlossenen Leiters geht von selbst hervor, dass die Intensität der Strömung in irgend einem Punkte stets der *mittleren* Strömungsintensität im ganzen Leiter gleich ist. Das Gesetz für die *Mittelwerthe der Strömungsintensitäten* in geschlossenen

Leitern in ihrer Abhängigkeit von den *Mittelwerthen der elektromotorischen Kräfte* ist nun Art. 9, unabhängig von der Betrachtung der Gestalt des geschlossenen Leiters, entwickelt worden, und es ist daraus Art. 21 das Gesetz dieser Abhängigkeit für den Fall näher bestimmt worden, wo dieser *Mittelwerth der elektromotorischen Kräfte* sich proportional dem Sinus eines mit der Zeit proportional wachsenden Bogens ändert, was Statt findet, wenn die elektromotorischen Kräfte durch *Rotation eines kleinen Magnets* hervorgebracht werden. Wurde nämlich hiernach die *mittlere elektromotorische Kraft* $= g_0 \sin \mu t$ gesetzt, so ergab sich für die *mittlere Stromintensität* das Gesetz

$$i = -\frac{g_0}{w'} \cdot \sin \varrho_0 \cos(\mu t + \varrho_0),$$

worin w' den Widerstand der Längeneinheit des Leiters bezeichnete, und $\tang \varrho_0 = \pi a c^2 w' / [4 \mu \int M''_0 ds]$ war. Nach diesem Gesetze hängt aber die Strömungsintensität i bei einer gegebenen Kette und bei gegebener Stärke und Lage des Magnets, für die der Widerstand w' und der von der Gestalt der Kette abhängige Koefficient $\int M''_0 ds$, so wie auch der von der Stärke des Magnets und seiner Lage zur geschlossenen Kette abhängige Faktor g_0 bestimmte Werthe haben, blos noch von der durch μ zu bestimmenden grösseren oder kleineren *Rotationsgeschwindigkeit* ab, indem $\mu/[2\pi]$ die Zahl der Umdrehungen in der Zeiteinheit bezeichnet.

Ausser dem Gesetze der *Abhängigkeit der Strömungsintensität von der Rotationsgeschwindigkeit* des Magnets könnte zwar ferner auch noch der *absolute Werth der Strömungsintensität* i in seiner Abhängigkeit von den *absoluten Werthen der Konstanten* w', $\int M''_0 ds$, und g_0 einer Prüfung unterworfen werden; doch was die Abhängigkeit von w' und g_0 betrifft, so ist dieselbe für verschwindende Werthe von μ schon geprüft, wo $\varrho_0 = \pi/2$ und folglich

$$i = \frac{g_0}{w'}$$

erhalten wird, was das bekannte und durch die Erfahrung fest begründete Ohm'sche Gesetz ist; was aber die Abhängigkeit von $\int M''_0 ds$ betrifft, so würde diese Prüfung leicht zu machen sein, sobald nur analytische Methoden vorhanden wären, den Werth der Konstanten $\int M''_0 ds$ aus der Gestalt des geschlossenen Leiters leicht zu bestimmen. Die Kenntniss dieses Werthes für einen *kreisförmigen* Leiter genügt nicht, weil die Beobachtungen, zu denen ein *Induktor* und zwei *Dynamometer* nothwendig sind, mit einem kreisförmigen Leiter nicht ausgeführt werden können.

Die Ausführung der verlangten *quantitativen Prüfung* fordert aber eine genaue Kenntniss der Instrumente, mit welchen die Beobachtungen

gemacht werden, insbesondere eine genaue Kenntniss von den gebrauchten *Dynamometern*. Eine zweckmässige Einrichtung zur Regulirung der gegenseitigen Lage des *Multiplikators* und *Solenoids* jedes Dynamometers, sowie zur Regulirung der *Schwingungsdauer des Solenoids* vorausgesetzt, kommt es dabei vorzüglich auf eine zweckmässige *Aufstellung* und sodann auf die *Prüfung des Instruments* an. Die *Aufstellung* des Dynamometers soll so geschehen, dass die *Solenoidaxe horizontal und dem magnetischen Meridiane parallel* ist; die *Axe des das Solenoid umschliessenden Multiplikators* soll ebenfalls *horizontal sein, und mit der Solenoidaxe einen rechten Winkel bilden*. Der Mittelpunkt des Multiplikators soll mit dem Mittelpunkte des Solenoids zusammenfallen. Ist dies näherungsweise nach äusseren Merkmalen geschehen, so bleibt zu erörtern übrig, wie man *durch Beobachtungen*, die mit dem Instrumente selbst gemacht werden, prüfen könne, ob die angeführten Bedingungen genau erfüllt sind, oder wie gross die noch vorhandenen *Abweichungen* sind, sowie, welche Versuche nöthig sind, auch diejenigen *Elemente des Instruments* zu bestimmen, deren Kenntniss nöthig ist, wenn aus den damit gemachten Beobachtungen *genaue quantitative Bestimmungen* abgeleitet werden sollen.

31.

Prüfung des Dynamometers.

Zum Zweck einer solchen Prüfung des Dynamometers lässt man den Strom einer *konstanten* Säule, welcher zugleich durch den Multiplikator einer *Tangentenboussole* geführt wird, die zur Bestimmung der *Stromintensität* dient, durch das *Solenoid*, bald *vorwärts*, bald *rückwärts*, und durch den *Multiplikator* gehen, während derselbe mit dem Solenoide bald *parallel*, bald *kreuzweise* verbunden ist, was durch einen *Kommutator*, zu dessen Doppelzellen die Enden des Solenoid- und Multiplikatordrahts geführt sind, leicht bewerkstelligt wird. In allen diesen vier Fällen wird die *Ablenkung* des Solenoids von der ursprünglichen Gleichgewichtslage auf bekannte Weise beobachtet. Aus diesen vier Beobachtungen werden 1. die Abweichung der Solenoidaxe von dem magnetischen Meridian bei der ursprünglichen Gleichgewichtslage $= \mu$, 2. die Abweichung des von der Solenoidaxe und von der Multiplikatoraxe gebildeten Winkels von einem rechten Winkel $= \delta$, 3. das Verhältniss der vom Erdmagnetismus auf das Solenoid, bei gegebener Stromintensität in demselben, ausgeübten Direktionskraft zu der statischen Direktionskraft des Solenoids $= \varepsilon$, 4. das Verhältniss der vom Multiplikator auf das Solenoid, bei gegebener Stromintensität in beiden, ausgeübten

Direktionskraft zu der statischen Direktionskraft des Solenoids $= \varkappa$ bestimmt.

Die Beobachtung giebt die *Ablenkung* des Solenoids von der ursprünglichen Gleichgewichtslage in Skalentheilen und wird die Zahl dieser Skalentheile mit dem doppelten Abstand des Spiegels von der Skale, $= R$ Skalentheilen, dividirt, so erhält man für kleinere Ablenkungen dieselben im *Bogenwerth* ausgedrückt, welcher in den angegebenen vier Fällen mit a, b, c, d bezeichnet werden möge. Es ergiebt sich dann

$$\varkappa = \frac{1}{2}\left(\frac{c+b}{c-b} + \frac{d+a}{d-a}\right),$$

$$\varepsilon = \frac{da - cb - (db - ca)\varkappa}{d+c-b-a},$$

$$\delta = \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{c+b}{c-b} - \frac{d+a}{d-a}\right),$$

$$\mu = \frac{1}{\varkappa}\Big(\varepsilon - (1 + \varkappa - \delta\varepsilon)\, a\Big).$$

Zum Beweise braucht man nur nach bekannten Gesetzen das *statische*, *erdmagnetische* und *elektrodynamische* Drehungsmoment, welche auf das Solenoid wirken, zu bestimmen, deren Summe für das bei der beobachteten Ablenkung Statt findende Gleichgewicht $= 0$ zu setzen ist.

Bezeichnet s die *statische* Direktionskraft, so ist bei einer Ablenkung $= \varphi$ von der *statischen* Gleichgewichtslage, welche Statt gefunden hatte, ehe ein Strom durch die Kette ging, das *statische* Drehungsmoment

$$= - s \sin \varphi.$$

Bezeichnet ferner i die *Stromintensität*, positiv wenn das durchströmte Solenoid einem mit seinem Nordpol nach Norden gerichteten Magnete äquivalent ist, bezeichnet mi die *erdmagnetische* Direktionskraft, wonach m das Produkt des horizontalen Theils des Erdmagnetismus in die vom Solenoiddrahte umwundene Fläche ist, bezeichnet endlich μ, wie schon bemerkt, den Winkel, den die Solenoidaxe beim statischen Gleichgewichte mit dem magnetischen Meridiane macht, so ist das *erdmagnetische* Drehungsmoment

$$= - mi \sin(\varphi + \mu),$$

oder, wenn μ sehr klein ist,

$$= - mi (\sin \varphi + \mu \cos \varphi).$$

Bezeichnet endlich $(\pi/2 + \delta)$ den Winkel, welchen die nach Osten gerichtete Multiplikatoraxe mit der nach Norden gerichteten Solenoidaxe bildet, bezeichnet ferner ei^2 die vom Multiplikator auf das Solenoid ausgeübte elektrodynamische Direktionskraft, e positiv wenn Multiplikator und Solenoid so mit einander verbunden sind, dass der Multiplikator

bei positivem i in seinen Fernwirkungen einem mit seinem Südpole nach Osten gerichteten Magnet äquivalent ist, so ist das *elektrodynamische* Drehungsmoment

$$= ei^2 \cos(\varphi - \delta),$$

oder, wenn δ sehr klein ist,

$$= ei^2 (\cos\varphi + \delta \sin\varphi).$$

Die Bedingung des Gleichgewichts des Solenoids bei der beobachteten Ablenkung φ besteht nun darin, dass die Summe dieser drei Momente $= 0$ ist, d. i.

$$-s \sin\varphi - mi(\sin\varphi + \mu\cos\varphi) + ei^2(\cos\varphi + \delta\sin\varphi) = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung mit $-s\cos\varphi$ und beachtet, dass für $\tang\varphi$ der *Bogenwerth der beobachteten Ablenkung*, d. i. a im *ersten* der vier betrachteten Fälle, gesetzt werden kann, so erhält man folgende Gleichung

$$a + \frac{mi}{s}(a + \mu) - \frac{ei^2}{s}(1 + \delta a) = 0.$$

In diesem *ersten* Falle ging der Strom durch den Solenoiddraht *vorwärts* und das Solenoid war mit dem Multiplikator *parallel* verbunden. In dem *zweiten* Falle, wo der Strom durch den Solenoiddraht ebenfalls *vorwärts* ging, aber das Solenoid mit dem Multiplikator *kreuzweise* verbunden war, bleibt die Stromintensität i positiv, aber e wechselt das Vorzeichen, während der Bogenwerth der in diesem Falle beobachteten Ablenkung b für $\tang\varphi$ zu setzen ist, wonach

$$b + \frac{mi}{s}(b + \mu) + \frac{ei^2}{s}(1 + \delta b) = 0.$$

Im *dritten* Falle, wo der Strom durch den Solenoiddraht *rückwärts* ging, das Solenoid mit dem Multiplikator aber, wie im ersten Falle, *parallel* verbunden war, wechselt i das Vorzeichen und e ist positiv wie im ersten Falle, während der Bogenwerth der in diesem Falle beobachteten Ablenkung c für $\tang\varphi$ zu setzen ist, wonach

$$c - \frac{mi}{s}(c + \mu) - \frac{ei^2}{s}(1 + \delta c) = 0.$$

Im *vierten* Falle endlich, wo der Strom durch den Solenoiddraht *rückwärts* ging, wie im dritten Falle, und das Solenoid mit dem Multiplikator *kreuzweise* verbunden war, wie im zweiten Falle, ist i negativ wie im dritten und e negativ wie im zweiten Falle, während der Bogenwerth der in diesem Falle beobachteten Ablenkung d für $\tang\varphi$ zu setzen ist, wonach

$$d - \frac{mi}{s}(d + \mu) + \frac{ei^2}{s}(1 + \delta d) = 0.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich die angegebenen Werthe von $\varkappa$, ε, δ, μ, wenn man $\varkappa$ für mi/s und ε für ei^2/s schreibt.

Als Beispiel diene das zu den folgenden Versuchen gebrauchte Dynamometer, für welches die Beobachtungen nach Skalentheilen ergeben hatten:

$$2Ra = +\,440{,}01,$$
$$2Rb = -\,443{,}81,$$
$$2Rc = +\,448{,}26,$$
$$2Rd = -\,450{,}68.$$

Es war dabei $2R = 5075$ Skalentheile. Hieraus folgt nun

$$\varkappa = 0{,}008\,484,$$
$$\varepsilon = 0{,}088\,0,$$
$$\delta = -\,0{,}039\,7,$$
$$\mu = +\,0{,}032\,3.$$

Die Werthe von $\varkappa$ und ε, die sich leicht, wenn die Stromintensität i mit Hülfe einer Tangentenboussole gemessen worden ist, auf die für die Einheit der Stromintensität geltenden Normalwerthe zurückführen lassen, geben die *Elemente für die Stärke des Solenoids und für die Empfindlichkeit des Dynamometers.* Die beiden anderen Werthe δ und μ beziehen sich dagegen auf die *Aufstellung* und geben die Abweichungen dieser Aufstellung von den für sie vorgeschriebenen Bedingungen. Es ergiebt sich nämlich daraus, dass die Solenoidaxe mit der Multiplikatoraxe, statt eines rechten Winkels, den Winkel

$$\frac{\pi}{2} + \delta = 87^0\ 43'\ 31''$$

bildet, und dass die Solenoidaxe, statt beim *statischen* Gleichgewichte mit dem magnetischen Meridiane zusammen zu fallen, davon um den Winkel

$$\mu = 1^0\ 51'$$

nach Osten abweicht. Man sieht hieraus, dass, wenn das Instrument mit feinen Gradtheilungen versehen ist, die Fehler der Aufstellung sich hiernach sehr leicht genau berichtigen lassen. — Bleiben aber auch diese kleinen Fehler der Aufstellung unverbessert, so kann man doch die mit dem Instrumente gemachten Beobachtungen verbessern und diejenigen Werthe berechnen, die man bei genauer Aufstellung erhalten haben würde.

Für den Zweck der folgenden Schwingungsversuche kommt wegen des dabei Statt findenden schnellen Wechsels des Vorzeichens von i die letztere mit μ bezeichnete Abweichung nicht in Betracht, sondern nur

die mit δ bezeichnete Abweichung, und es ergiebt sich leicht für eine in Skalentheilen beobachtete Ablenkung x' der verbesserte Werth x

$$x = x' - \frac{\delta x'^2}{2R} = x' + \frac{x'^2}{127\,780}.$$

Die in den folgenden Artikeln enthaltenen Beobachtungen waren der Anfang einer von mir und R. Kohlrausch gemeinschaftlich unternommenen Arbeit, welche durch die Krankheit und den Tod meines theuren Freundes unterbrochen worden ist. Die dabei gebrauchten Vorrichtungen zur gleichförmig schnellen Drehung des Magnets und zur Messung dieser Geschwindigkeit sind nebst den darauf sich beziehenden Beobachtungen von ihm ausgeführt worden.

32.

Erste Reihe.

Die folgende Beobachtungsreihe ist von R. Kohlrausch und mir gemeinschaftlich am 12. April 1857 ausgeführt worden. Sie betrifft die *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets*, und wurde mit vier verschiedenen Ketten gemacht, zu denen aber immer das nämliche *Dynamometer* und die nämliche *Induktorrolle* gehörten, die aus einem Stücke eines sehr feinen Kupferdrahts von ungefähr 1500 Meter Länge, mit einem Widerstande nach absolutem Maasse $= 23 \,.\, 10^{12}$, welches der konstante Theil der vier Ketten war, gebildet waren. Hierzu kam

bei der 1. Kette A ein 2800 Meter langes Stück, dessen Widerstand $= 8{,}79 \,.\, 10^{12}$,
„ „ 2. „ B „ 5600 „ „ „ „ „ $= 18 \,.\, 10^{12}$,
„ „ 3. „ C „ 8000 „ „ „ „ „ $= 27 \,.\, 10^{12}$,
„ „ 4. „ D „ 10800 „ „ „ „ „ $= 35 \,.\, 10^{12}$.

Die Skale war in einer Entfernung von 2537,5 Skalentheilen von dem am Solenoid befestigten kleinen Planspiegel fest aufgestellt, unter rechtem Winkel mit der Spiegelnormale beim statischen Gleichgewicht des Solenoids, und wurde von der Vertikalebene der Spiegelnormale im 800. Skalentheile geschnitten. Das hinter der Skale aufgestellte Fernrohr konnte so verrückt werden, dass beim statischen Gleichgewicht des Solenoids bald der 800. Skalentheil, bald ein höherer oder niederer Skalentheil am Fadenkreuz beobachtet wurde, um damit die Ablenkung des Solenoids, auch wenn sie über die halbe Skalenlänge hinausging, beobachten zu können.

Kette	Schwingungszahl m	Statische Gleichgewichtslage	Abgelenkter Stand	Ablenkung in Skalentheilen y	x'	x
	288,80	361,69	1475,85	+ 1114,16	+ 1111,84	+ 1121,51
	217,80	362,52	1242,34	+ 879,82	+ 879,80	+ 885,86
	141,77	363,13	892,45	+ 529,32	+ 526,91	+ 529,08
	106,46	363,13	710,41	+ 347,28	+ 343,61	+ 344,53
A	289,88	363,13	1480,61	+ 1117,48	+ 1115,01	+ 1124,74
	107,26	1210,44	857,52	— 352,92	— 349,96	— 349,00
	140,46	1210,44	681,63	— 528,81	— 527,08	— 524,90
	215,10	1210,44	328,91	— 881,53	— 881,42	— 875,34
	281,68	1210,44	97,05	— 1113,39	— 1109,88	— 1100,24
	106,76	800,15	630,73	— 169,42	— 169,23	— 169,01
	142,74	800,15	561,78	— 238,37	— 237,84	— 237,40
	216,80	800,15	463,11	— 337,04	— 335,55	— 334,67
B	290,26	800,15	410,90	— 389,25	— 386,95	— 385,78
	106,84	800,24	969,02	+ 168,78	+ 168,59	+ 168,81
	144,15	800,24	1040,27	+ 240,03	+ 239,49	+ 239,94
	217,90	800,24	1136,55	+ 336,31	+ 334,84	+ 335,72
	288,04	800,24	1185,91	+ 385,67	+ 383,44	+ 384,59
	107,12	800,24	897,67	+ 97,43	+ 97,39	+ 97,46
	144,32	800,24	931,32	+ 131,08	+ 131,00	+ 131,13
	214,80	800,24	971,13	+ 170,89	+ 170,69	+ 170,92
C	289,62	800,24	988,77	+ 188,53	+ 188,26	+ 188,54
	108,60	800,24	701,11	— 99,13	— 99,09	— 99,01
	143,68	800,24	669,66	— 130,58	— 130,50	— 130,37
	219,78	800,24	628,57	— 171,67	— 171,47	— 171,24
	286,90	800,24	611,76	— 188,48	— 188,21	— 187,94
	108,42	800,58	731,93	— 68,65	— 68,63	— 68,59
	144,44	800,58	711,98	— 88,60	— 88,57	— 88,51
	217,68	800,58	689,18	— 111,40	— 111,35	— 111,25
	289,56	800,58	679,54	— 121,04	— 120,97	— 120,86
D	430,80	800,58	675,17	— 125,41	— 125,33	— 125,21
	433,06	801,30	926,27	+ 124,97	+ 124,89	+ 125,01
	109,06	801,30	869,69	+ 68,39	+ 68,37	+ 68,41
	143,50	801,30	888,91	+ 87,61	+ 87,58	+ 87,64
	217,12	801,30	912,31	+ 111,01	+ 110,96	+ 111,06
	286,92	801,30	922,00	+ 120,70	+ 120,63	+ 120,74

Die Werthe von x' in der vorletzten Kolumne sind aus den in der vorhergehenden Kolumne angegebenen Ablenkungen y nach der Formel $x' = y - y^3/5075^2$ berechnet, wodurch man mit hinreichender Genauigkeit $x' = 2R \operatorname{tang} \varphi$ erhält, wenn die beobachtete Ablenkung $y = R \operatorname{tang} 2\varphi$ ist. Nur bei den Beobachtungen mit der Kette A, wobei das Fernrohr verschoben war, geben die in der drittletzten Kolumne angeführten Ablenkungen nicht unmittelbar die Werthe von $R \operatorname{tang} 2\varphi$, sondern dieselben

müssen daraus auf folgende Weise berechnet werden. Theilt man den in dieser Kolumne angegebenen Werth der Ablenkung y' in zwei Theile, nämlich in den Theil y'', welcher von dem beim statischen Gleichgewichte beobachteten Skalentheil bis zum 800. Skalentheil reicht, und in den Theil y''', welcher vom 800. Skalentheil bis zu dem bei der Ablenkung beobachteten Skalentheil reicht, so erhält man

$$y = R \operatorname{tang} 2\varphi = \frac{y'}{1 - \frac{y'' y'''}{R^2}},$$

woraus für $R = 2537{,}5$ der Werth von $x' = 2R \operatorname{tang} \varphi$ leicht berechnet werden kann.

An den so berechneten Werthen von x' war nun endlich noch die am Schlusse des vorigen Artikels angegebene Korrektion anzubringen, wonach die in der letzten Kolumne angegebenen Werthe von $x = x' + x'^2/127\,780$ berechnet sind.

33.

Berechnung der Beobachtungen.

Die beschriebenen Beobachtungen sollen dazu dienen, das im vorigen Abschnitte entwickelte Gesetz der Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets daran zu prüfen. Nach Art. 24 wird die Schwingungsamplitude durch $i/[\mu\mathfrak{E}]$ ausgedrückt, wenn i das Intensitäts-Maximum der bei der elektrischen Schwingung Statt findenden Strömungen bezeichnet. Da nun ferner nach Art. 30 die Strömungsintensität in jedem Augenblicke der Schwingung durch den Werth

$$-\frac{g_0}{w'} \sin \varrho_0 \cos(\mu t + \varrho_0)$$

gegeben ist, also das Intensitäts-Maximum der bei den elektrischen Schwingungen Statt findenden Strömungen

$$i = \frac{g_0}{w'} \sin \varrho_0,$$

worin $\operatorname{tang} \varrho_0 = \pi a c^2 w' / [4\mu \int M''_0 ds]$ war, so ergiebt sich, nach Art. 24, für die *Schwingungsamplitude* folgender Ausdruck:

$$\frac{i}{\mu\mathfrak{E}} = \frac{\pi a c^2 g_0}{\mu\mathfrak{E}\sqrt{16\mu^2 (\int M''_0 ds)^2 + \pi^2 a^2 c^4 w'^2}}.$$

Aus den Beobachtungen ergiebt sich aber nach Art. 24

$$i = \frac{1}{\pi a'} \cdot \sqrt{\frac{a S \operatorname{tang} v}{n n'}},$$

worin v die beobachtete Ablenkung des Solenoids bezeichnet, folglich ist die Schwingungsamplitude

$$\frac{i}{\mu\mathfrak{E}} = \frac{1}{\pi a'\mu\mathfrak{E}} \cdot \sqrt{\frac{aS\,\mathrm{tang}\,v}{nn'}} = \frac{\pi a c^2 g_0}{\mu\mathfrak{E}\sqrt{16\mu^2(\int M''_0 ds)^2 + \pi^2 a^2 c^4 w'^2}}.$$

Für den Zweck der Prüfung der aufgestellten Gesetze an den Beobachtungen ergiebt sich hieraus der in der letzten Kolumne der Beobachtungstafel im vorhergehenden Artikel mit $\pm x = 2R\,\mathrm{tang}\,v$ bezeichnete Werth

$$\pm x = \frac{\pi^4 a a'^2 nn' c^4 g_0^2}{16\mu^2(\int M''_0 ds)^2 + \pi^2 a^2 c^4 w'^2} \cdot \frac{2R}{S}.$$

Nun ist aber μ/π die in der Tafel mit m bezeichnete Schwingungszahl, und g_0 ist, nach den Gesetzen der magnetischen Induktion, der Rotationsgeschwindigkeit proportional, oder es ist $g_0 = mg'_0$, wenn g'_0 den Werth von g_0 für die Schwingungszahl $m = 1$ bezeichnet; folglich ist

$$\pm x = \frac{\pi^2 a a'^2 nn' c^4 g'^2_0 m^2}{16(\int M''_0 ds)^2 . m^2 + a^2 c^4 w'^2} \cdot \frac{2R}{S},$$

oder, wenn

$$C = \frac{\pi^2 a'^2 nn' g'^2_0}{a w'^2} \cdot \frac{2R}{S}, \qquad P = \frac{16(\int M''_0 ds)^2}{a^2 c^4 w'^2}$$

gesetzt wird,

$$C - Px - \frac{x}{m^2} = 0,$$

worin C und P konstante Werthe für alle Beobachtungen sind, welche mit derselben Kette, mit demselben rotirenden Magnet und mit demselben Dynamometer gemacht worden. Der Werth von x, von dessen Vorzeichen abgesehen wird, ist hierbei immer *positiv* zu nehmen.

Hiernach ergeben sich aus den in der Tafel des vorigen Artikels enthaltenen Beobachtungen folgende Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten C und P für die Kette A:

$$C - 1\,121{,}51\,P - \frac{1121{,}51}{288{,}80^2} = 0,$$

$$C - 885{,}86\,P - \frac{885{,}86}{217{,}80^2} = 0,$$

$$C - 529{,}08\,P - \frac{529{,}08}{141{,}77^2} = 0,$$

$$C - 344{,}53\,P - \frac{344{,}53}{106{,}46^2} = 0,$$

$$C - 1\,124{,}74\,P - \frac{1124{,}74}{289{,}88^2} = 0,$$

$$C - 349{,}00\,P - \frac{349{,}00}{107{,}26^2} = 0,$$

$$C - 524{,}90\,P - \frac{524{,}90}{140{,}46^2} = 0,$$

$$C - 875{,}34\,P - \frac{875{,}34}{215{,}10^2} = 0,$$

$$C - 1\,100{,}24\,P - \frac{1\,100{,}24}{281{,}68^2} = 0,$$

woraus die wahrscheinlichsten Werthe von C und P erhalten werden, nämlich:

$$C = 0{,}037\,978, \qquad P = 0{,}000\,021\,865.$$

Berechnet man auf gleiche Weise die Werthe von C und P für die Ketten B, C und D, so erhält man die in folgender Tafel zusammengestellten Resultate.

Kette	C	P
A	0,037 978	0,000 021 865
B	0,022 795	0,000 047 050
C	0,015 174	0,000 068 093
D	0,011 869	0,000 087 274

Berechnet man hiermit endlich die Werthe von x aus den gegebenen Werthen von m, so erhält man, nach den Werthen von m geordnet, folgende Vergleichung der berechneten Werthe von x mit den aus den Beobachtungen gefundenen.

A				B			
m	Beobachteter Werth von x	Berechneter Werth von x	Unterschied	m	Beobachteter Werth von x	Berechneter Werth von x	Unterschied
106,46	344,53	344,96	— 0,43	106,76	169,01	169,12	— 0,11
107,26	349,00	349,11	— 0,11	106,84	168,81	169,28	— 0,47
140,46	524,91	523,48	+ 1,43	142,74	237,40	237,13	+ 0,27
141,77	529,08	530,29	— 1,21	144,15	239,94	239,51	+ 0,43
215,10	875,34	873,50	+ 1,84	216,80	334,67	333,63	+ 1,04
217,80	885,86	884,34	+ 1,52	217,90	335,72	334,68	+ 1,04
281,68	1100,24	1101,83	— 1,59	288,04	384,59	385,69	— 1,10
288,80	1121,51	1121,81	— 0,30	290,26	385,78	386,89	— 1,11
289,88	1124,74	1124,77	— 0,03				
C				D			
107,12	97,46	97,74	— 0,28	108,42	68,59	68,87	— 0,28
108,60	99,01	99,25	— 0,24	109,06	68,41	69,27	— 0,86
143,68	130,37	130,21	+ 0,16	143,50	87,64	87,38	+ 0,26
144,32	131,13	130,69	+ 0,44	144,44	88,51	87,79	+ 0,72
214,80	170,92	169,04	+ 1,88	217,12	111,06	109,41	+ 1,65
219,78	171,24	170,89	+ 0,35	217,68	111,25	109,52	+ 1,73
286,90	187,94	189,10	— 1,16	286,92	120,74	119,38	+ 1,36
289,62	188,54	189,64	— 1,10	289,56	120,86	119,69	+ 1,17
				430,80	125,21	128,09	— 2,88
				433,06	125,01	128,17	— 3,16

Mit dieser ersten Prüfung lässt sich nun noch eine zweite verbinden. Nach dem aufgestellten Gesetze sollen nämlich die beiden Konstanten C und P dem Quadrate des mittleren Widerstands der Längeneinheit des Leitungsdrahts w' umgekehrt proportional sein; doch sind die übrigen Grössen, von denen die Werthe dieser Konstanten nach den angeführten Formeln:

$$C=\frac{\pi^2 a'^2 nn' g'^2_0}{aw'^2}\cdot\frac{2R}{S}, \qquad P=\frac{16\,(\int M''_0 ds)^2}{a^2c^4w'^2}$$

abhängen, nicht für alle vier Ketten, auf welche sich die im vorigen Artikel beschriebenen Beobachtungen beziehen, gleich, sondern die Grösse g'_0, von der die Konstante C abhängt, und die Grösse $\int M''_0 ds$, von der die Konstante P abhängt, haben für jede Kette einen besonderen Werth. Bezeichnet man nun aber mit l die Länge des ganzen Leitungsdrahts, welche ebenfalls für die vier Ketten verschiedene Werthe hat, und beachtet, dass $g'_0 \sin \mu t$ für die Zeit t die vom rotirenden Magnet bei derjenigen Geschwindigkeit, für die $m=1$ ist, *im Mittel auf jede Längeneinheit des ganzen Leitungsdrahts* ausgeübte elektromotorische Kraft bezeichnet; so ergiebt sich, dass $lg'_0 \sin \mu t$ für die Zeit t die vom rotirenden Magnet bei derjenigen Geschwindigkeit, für die $m=1$ ist, *auf den ganzen Leitungsdraht* ausgeübte elektromotorische Kraft bezeichnet. Da aber der rotirende Magnet blos auf den allen vier Ketten gemeinsamen Induktordraht inducirend wirkte, so ergiebt sich hieraus, dass lg'_0 für alle vier Ketten gleichen Werth hat; folglich ergiebt sich aus der Formel

$$C=\frac{\pi^2 a'^2 nn' g'^2_0}{aw'^2}\cdot\frac{2R}{S}=\frac{\pi^2 a'^2 nn'\,(lg'_0)^2}{a}\cdot\frac{2R}{S}\cdot\frac{1}{(lw')^2},$$

dass die Werthe der Konstanten C für diese vier Ketten den Quadraten der Widerstände dieser vier Ketten umgekehrt proportional sein sollen: denn lw' bezeichnet den Widerstand der ganzen Kette, da w' der mittlere Widerstand der Längeneinheit war.

Um das aufgestellte Gesetz auch in dieser Beziehung zu prüfen, müssen zu den betrachteten Beobachtungen die im Anfange des vorigen Artikels angeführten Werthe der Widerstände jener vier Ketten hinzugezogen werden, von denen jedoch zu bemerken, dass ihre Bestimmung nicht als Hauptzweck der damaligen Beobachtungen betrachtet wurde, sondern ohne Anspruch auf besondere Genauigkeit (sie beruhete zum Theil auf blosser Vergleichung nach Drahtlängen) nur als kurze Beschreibung zur Unterscheidung der vier Ketten von einander dienen sollte. Wir benutzen jedoch auch diese Bestimmungen zur Prüfung des aufgestellten Gesetzes, weil sie, wie alle anderen angeführten Beobach-

tungen, schon vor mehreren Jahren, ohne alle Rücksicht auf die hier entwickelten Gesetze, gemacht worden sind.

Es verhalten sich aber, wie im Anfang des vorigen Artikels angegeben worden ist, die Widerstände der vier Ketten, jener Bestimmung gemäss, ungefähr wie

$$31{,}79 : 41 : 50 : 58,$$

während dieselben Verhältnisse, dem aufgestellten Gesetze gemäss, durch Division der Zahl 6,2158 durch $\sqrt{C}$, wie

$$31{,}89 : 41{,}17 : 50{,}46 : 57{,}06$$

erhalten werden, was mit den obigen Beobachtungs-Resultaten, wie man sieht, ganz wohl übereinstimmt.

34.

Zweite Reihe.

Die folgende von Kohlrausch und mir gleichfalls gemeinschaftlich am 18. und 22. April 1857 ausgeführte Beobachtungsreihe ist im Wesentlichen eine Wiederholung der vorhergehenden, jedoch mit dem Unterschiede, dass bei der vorigen Reihe stets der ganze Leitungsdraht aus einfach aufgewickelten Drahtrollen bestand, während bei der folgenden zwar für die Kette A dasselbe galt, eine andere Kette aber durch Einschaltung eines *Doppeldrahts* E in die Kette A gebildet wurde. Dieser *Doppeldraht* E war aus zwei sehr feinen mit Seide übersponnenen und dadurch von einander isolirten Kupferdrähten zusammengesetzt, die aber durch eine nochmalige gemeinschaftliche Ueberspinnung fest zusammengehalten wurden, in Uebereinstimmung mit der Art. 26 zur Verminderung der von wechselseitiger Induktion herrührenden Dämpfung elektrischer Schwingungen gegebenen Vorschrift, welche dadurch erprobt werden sollte. — Zur Verminderung dieser Dämpfung trug ausserdem noch der Umstand etwas bei, dass der Doppeldraht E, statt auf einer Rolle aufgewickelt zu werden, auf einem besonderen Statife so aufgespannt wurde, dass alle Windungen wenigstens 20 Millimeter weit von einander abstanden.

Nach Art. 32 hatte die Kette A eine Länge von etwa 4300 Meter mit einem Widerstande nach absolutem Maasse $= 3179 \,.\, 10^{10}$. Der Doppeldraht E hatte 1412 Meter Länge (die Länge des einfachen Drahts war also 2824 Meter) mit einem Widerstande $= 4292 \,.\, 10^{10}$.

Von der Aufstellung der Skale und des Ablesungsfernrohrs galt ganz dasselbe, was Art. 32 für die vorhergehende Beobachtungsreihe bemerkt worden. — Für jede Kette sind zwei Beobachtungsreihen, die erste am 18., die zweite am 22. April gemacht worden.

Kette	Schwingungszahl m	Statische Gleichgewichtslage	Abgelenkter Stand	Ablenkung in Skalentheilen y	x'	x
$A+E$	107,22	801,98	728,42	— 73,56	— 73,54	— 73,50
	139,66	801,98	681,37	— 120,61	— 120,54	— 120,40
	214,10	801,98	542,95	— 259,03	— 258,36	— 257,84
	279,44	801,98	402,21	— 399,77	— 397,29	— 396,06
	108,02	801,98	876,36	+ 74,38	+ 74,36	+ 74,40
	141,82	801,98	926,06	+ 124,08	+ 124,01	+ 124,13
	213,76	801,98	1059,59	+ 257,61	+ 256,95	+ 257,47
	282,80	801,98	1206,57	+ 404,59	+ 402,03	+ 403,29
A	280,58	389,64	1468,13	+ 1078,49	+ 1075,80	+ 1084,86
	214,12	425,42	1281,09	+ 855,67	+ 855,32	+ 861,05
	142,58	425,42	954,80	+ 529,38	+ 528,38	+ 530,56
	141,66	425,42	948,80	+ 523,38	+ 522,36	+ 524,50
	103,36	425,42	762,90	+ 337,48	+ 335,26	+ 336,14
	283,60	1193,13	86,44	— 1106,69	— 1102,50	— 1092,99
	215,16	1193,13	323,28	— 869,85	— 869,06	— 863,15
	139,82	1193,13	676,38	— 516,75	— 515,29	— 513,21
	110,53	1193,13	827,49	— 365,64	— 363,10	— 362,07
$A+E$	106,10	801,52	730,24	— 71,28	— 71,26	— 71,22
	142,88	801,52	676,72	— 124,80	— 124,73	— 124,61
	214,80	801,52	543,31	— 258,21	— 257,55	— 257,03
	279,92	801,52	404,02	— 397,50	— 395,05	— 393,83
	107,43	801,43	873,91	+ 72,48	+ 72,46	+ 72,50
	141,94	801,43	924,38	+ 122,95	+ 122,88	+ 123,00
	215,64	801,43	1060,12	+ 258,69	+ 258,03	+ 258,55
	279,30	801,43	1194,00	+ 392,57	+ 390,22	+ 391,41
A	282,02	384,83	1465,47	+ 1080,64	+ 1077,20	+ 1086,28
	217,17	385,13	1249,53	+ 864,40	+ 864,14	+ 869,98
	139,59	385,13	893,92	+ 508,79	+ 506,73	+ 508,74
	107,15	385,13	728,92	+ 343,79	+ 340,65	+ 341,56
	281,96	1202,32	106,96	— 1095,36	— 1090,85	— 1081,54
	217,14	1202,30	329,47	— 872,83	— 872,43	— 866,48
	144,32	1202,30	664,30	— 538,00	— 536,49	— 534,24
	139,56	1202,30	690,03	— 512,27	— 510,54	— 508,50
	106,64	1202,30	860,67	— 341,63	— 340,30	— 339,39

Von der Berechnung der Werthe von x in dieser Tafel gilt dasselbe, was zur vorhergehenden Tafel darüber gesagt ist.

Aus den zusammengehörigen Werthen von m und x in dieser Tafel lassen sich nun die wahrscheinlichsten Werthe der Konstanten C und P für die Ketten A und $A+E$ ebenso berechnen, wie Art. 33 aus den Werthen Art. 32 für die Ketten A, B, C, D. Auf diese Weise sind die in folgender Tafel enthaltenen Resultate erhalten worden.

Kette	C	P
$A+E$	0,006 672	0,000 004 041
A	0,037 63	0,000 021 96
$A+E$	0,006 610	0,000 004 083
A	0,037 14	0,000 021 63

Berechnet man hiermit endlich die Werthe von x aus den gegebenen Werthen von m, so erhält man, nach den Werthen von m geordnet, folgende Vergleichung der berechneten Werthe von x mit den aus den Beobachtungen gefundenen.

$A+E$				A			
m	Beobachteter Werth von x	Berechneter Werth von x	Unterschied	m	Beobachteter Werth von x	Berechneter Werth von x	Unterschied
107,22	73,50	73,29	+ 0,21	103,36	336,14	335,82	+ 0,32
108,02	74,40	74,34	+ 0,06	110,53	362,07	362,41	— 0,34
139,66	120,40	120,63	— 0,23	139,82	513,21	514,68	— 1,47
141,82	124,13	124,10	+ 0,03	141,66	524,50	524,09	+ 0,41
213,76	257,47	257,34	+ 0,13	142,58	530,56	528,81	+ 1,75
214,10	257,84	258,04	— 0,20	214,12	861,05	859,37	+ 1,68
279,44	396,06	396,02	+ 0,04	215,16	863,15	863,68	— 0,53
282,80	403,29	402,55	+ 0,74	280,58	1084,86	1085,42	— 0,56
				283,60	1092,99	1093,70	— 0,71
$A+E$				A			
106,10	72,22	71,14	+ 0,08	106,64	339,39	338,98	+ 0,41
107,43	72,50	72,85	— 0,35	107,15	341,56	341,58	— 0,02
141,94	123,00	123,04	— 0,04	139,56	508,50	508,97	— 0,47
142,88	124,61	124,56	+ 0,05	139,59	508,74	509,12	— 0,38
214,80	257,03	256,62	+ 0,41	144,32	534,24	533,30	+ 0,94
215,64	258,55	258,32	+ 0,23	217,14	866,48	866,96	— 0,48
279,30	391,41	391,07	+ 0,34	217,17	869,98	867,08	+ 2,90
279,92	393,83	392,37	+ 1,46	281,96	1081,54	1085,70	— 4,16
				282,02	1086,28	1085,85	+ 0,43

Es verhalten sich endlich, wie im Anfang dieses Artikels angegeben worden, die Widerstände der beiden Ketten $A+E$ und A zu einander, der Beobachtung nach, ungefähr wie

$$7471 : 3179,$$

während dieses Verhältniss, dem im vorigen Artikel angegebenen Gesetze gemäss, welches hier auf gleiche Weise Anwendung findet, dass

nämlich die Werthe der Konstanten C für die beiden Ketten den Quadraten der Widerstände dieser Ketten umgekehrt proportional sein sollen, durch Division der Zahl 611,75 durch $\sqrt{C}$, wie

$$7507 : 3164$$

erhalten wird, was mit dem aus den Beobachtungen gefundenen Verhältnisse so weit übereinstimmt, als die geringe Genauigkeit der Widerstandsmessung zu erwarten berechtigt.

35.

Verhältniss der elektrostatischen Kraft zweier gleichen Elektricitätsmengen zu ihrer Masse.

Es bleibt endlich noch der dritte nach Art. 23 für genauere Beobachtungen geeignete Gegenstand zu betrachten übrig, nämlich *die Abhängigkeit der Amplituden der von einem rotirenden Magnet in einem geschlossenen Leiter hervorgebrachten Schwingungen von der Gestalt des Leitungsdrahts.* Genaue Beobachtungen hierüber können nicht blos zur Prüfung der aufgestellten Gesetze dienen, sondern können, wie Art. 23 schon angeführt worden, ausserdem noch zu einer wesentlichen Erweiterung unserer Kenntniss von der Elektricität benutzt werden, nämlich zur Bestimmung des noch unbekannten *Verhältnisses der aus elektrostatischer Wechselwirkung gleicher Elektricitätsmengen herrührenden Kraft zu deren Masse.*

Bezeichnet man die in der Längeneinheit des Leitungsdrahts enthaltene positive Elektricitätsmenge nach elektrostatischem Maasse mit $\mathfrak{E}$, so ist die von ihr auf eine gleiche Elektricitätsmenge in der Einheit der Entfernung ausgeübte elektrostatische Kraft $= \mathfrak{E}^2$, während ihre Masse durch $[1/r]\mathfrak{E}$ ausgedrückt worden ist, woraus das unbekannte Verhältniss jener Kraft zu dieser Masse $\mathfrak{E}^2 : [1/r]\mathfrak{E} = r\mathfrak{E} : 1$ folgt. Hat nun überhaupt dieses Verhältniss, oder die unbekannte Grösse $r\mathfrak{E}$, einen mit anderen bestimmten Grössen vergleichbaren Werth, so lässt sich leicht zeigen, dass dieser Werth aus Beobachtungen der *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Gestalt der Kette* am genauesten bestimmt werden könne.

Aus den Art. 8 und 10 aufgestellten Differentialgleichungen elektrischer Bewegung in geschlossenen Leitern ersieht man, dass darin die Grösse $r\mathfrak{E}$ nur im Ausdrucke $4M''(1+\lambda)/c^2 = [4M''/c^2] + [1/r\mathfrak{E}]$ enthalten ist. Es hängen aber von diesem in den Differentialgleichungen enthaltenen Ausdrucke keineswegs alle aus den Differentialgleichungen bestimmbaren Wirkungen ab; denn zur Bestimmung mancher Wirkungen lassen sich die Differentialgleichungen so vereinfachen, dass jener Ausdruck ganz daraus verschwindet. Es gilt dies, wie Art. 11, 12 gezeigt

worden, von allen Wirkungen beim Gleichgewicht oder bei Erhaltung schon vorhandener Bewegungen, woraus umgekehrt folgt, dass Beobachtungen von Gleichgewichtswirkungen oder von Wirkungen beharrlicher Ströme in keiner Weise zur Bestimmung der Grösse $r\mathfrak{E}$ dienen können.

Zu den anderen Wirkungen dagegen, bei deren Bestimmung jener die Grösse $r\mathfrak{E}$ enthaltende Ausdruck aus den Differentialgleichungen nicht verschwindet, gehören die durch Induktion eines rotirenden Magnets in einem geschlossenen Leitungsdrahte hervorgebrachten *elektrischen Schwingungen*, deren Gesetze Art. 20 aus jenen Differentialgleichungen entwickelt worden sind, wonach nämlich die Strömungsintensität bei einer solchen Schwingung im Leitungsdrahte

$$i = -\frac{1}{w'}\sqrt{f^2 + g^2} \cdot \cos\left(\mu t + \text{arc tang}\,\frac{f}{g}\right)$$

erhalten wurde, wenn

$$f = \Sigma \sin\varrho^2 \left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right),$$

$$g = \Sigma \sin\varrho\cos\varrho \left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right),$$

$$\text{tang}\,\varrho = \frac{\mu a^2 c^2 w'}{4\left(2\mu^2 a^2 M''(1+\lambda) - n^2 c^2 N''\right)} = \frac{\mu a^2 w'}{2\mu^2 a^2\left(\frac{4M''}{c^2} + \frac{1}{r\mathfrak{E}}\right) - 4n^2 N''}$$

war. Nach Art. 21 vereinfacht sich diese Bestimmung für die Strömungsintensität i in den meisten Fällen, nämlich in allen denjenigen Fällen, in welchen alle übrigen Glieder als verschwindend betrachtet werden dürfen gegen dasjenige, welches der Stellenzahl $n = 0$ entspricht. Man erhält nämlich für diese Fälle

$$i = -\frac{g_0}{\sqrt{w'^2 + 4\mu^2\left(\frac{4M''_0}{c^2} + \frac{1}{r\mathfrak{E}}\right)^2}} \cdot \cos\left(\mu t + \text{arc tg}\,\frac{w'}{2\mu\left(\frac{4M''_0}{c^2} + \frac{1}{r\mathfrak{E}}\right)}\right),$$

worin nach Art. 10 $M''_0 = 2\log(8a/\alpha)$ zu setzen ist. Es geht hieraus hervor, dass die Grösse $r\mathfrak{E}$ durch Messung der Strömungsintensität i bei gegebener Rotationsgeschwindigkeit des Magnets, nämlich von $\mu/[2\pi]$ Umdrehungen in der Sekunde, und bei gegebener Länge $= 2\pi a$, Dicke $= 2\alpha$ und bei gegebenem Widerstande $= 2\pi a w'$ des Leitungsdrahts, da auch der der Rotationsgeschwindigkeit proportionale Induktionskoefficient g_0 aus der Stärke des inducirenden Magnets und aus seiner Entfernung und Lage zum inducirten Leitungsdrahte bestimmt werden kann, sich ermitteln lassen würde.

Hiernach würde es also möglich sein, *ohne die Abhängigkeit der Amplitude elektrischer Schwingungen von der Gestalt des Leitungsdrahts*

in Betracht zu ziehen, die Grösse $r\mathfrak{E}$ *direkt* zu bestimmen; jedoch sieht man leicht, dass dieser direkte Weg praktisch zu keinem genauen Resultate führen kann, wenn die Grösse $1/[r\mathfrak{E}]$ ein sehr kleiner Bruch von der Grösse $4M''_0/c^2$ ist, zumal wenn man beachtet, dass M''_0 und c in ihrer Bestimmung keiner sehr grossen Genauigkeit fähig sind. Zieht man dagegen die Abhängigkeit der Amplitude der elektrischen Schwingungen von der Gestalt des Leitungsdrahts mit in Betracht, so lässt sich die Grösse $r\mathfrak{E}$ auf folgendem *indirekten* Wege viel genauer bestimmen.

Um die Beobachtung der Abhängigkeit der Amplitude elektrischer Schwingungen von der Gestalt des Leitungsdrahts zu einer genaueren Bestimmung der Grösse $r\mathfrak{E}$ zu benutzen, kommt es wesentlich darauf an, eine Methode zu finden, einem geschlossenen Leitungsdrahte *zwei verschiedene Gestalten* zu geben, für welche entweder die beiden Werthe von M''_0 selbst, oder doch ihr Verhältniss $\nu : 1$ einer genauen Bestimmung fähig wäre.

Es kommt dabei in Betracht, dass die Entwickelung der Bewegungsgesetze der Elektricität im ersten Theile dieser Abhandlung *auf kreisförmige Leiter* hat beschränkt werden müssen, für welche eine wesentliche Vereinfachung dadurch gewonnen wurde, dass die Werthe der mit M, N, M'', N'' bezeichneten bestimmten Integrale für alle Punkte der Leiterkurve gleich waren. Letzteres gilt nun aber auch für ein System von zwei gleichen und parallelen Kreisen, was nur darum, weil es zwei getrennte Leiterkurven bildet, nicht in Betracht gezogen werden konnte. Für praktische Zwecke bei der Ausführung der Beobachtungen aber lässt sich ein solches System für einen geschlossenen Leiter von zwei Umwindungen fast in allen Betrachtungen substituiren, und es lassen sich daher die Werthe der bestimmten Integrale M, N, M'', N'' für einen geschlossenen Leiter, welcher zwei gleiche, sehr nahe kreisförmige, Umwindungen bildet, dieser Substitution gemäss, für alle Punkte des Leiters gleich setzen, wodurch es möglich wird, die zunächst nur für einen kreisförmigen Leiter aufgestellten Bewegungsgesetze der Elektricität auf einen geschlossenen Leiter, welcher zwei gleiche, sehr nahe kreisförmige Umwindungen bildet, auszudehnen.

Es ergiebt sich aber für einen solchen Leiter, wie man leicht sieht, eine sehr wesentliche *Alternative* nach Verschiedenheit der Verbindung seiner beiden Umwindungen mit einander, die *entweder* so beschaffen sein kann, dass beide Umwindungen von demselben Strome nach einander in gleichem Sinne durchlaufen werden, *oder* so, dass die zweite Umwindung im entgegengesetzten Sinne wie die erste durchlaufen wird. Diesen beiden Fällen entsprechen ganz verschiedene Werthe von M, N, M'', N'', deren Verhältniss zu einander genau bestimmt werden kann.

Es gilt dies namentlich auch von dem mit M''_0 bezeichneten Werthe der Grösse M'', wenn $n = 0$ ist, und das Verhältniss der beiden Werthe von M''_0 in den beiden angegebenen Fällen werde $= \nu : 1$ gesetzt.

Wird nun die grösste Strömungsintensität bei einer elektrischen Schwingung in diesem Leiter im *ersten* Falle mit A, im *zweiten* mit B bezeichnet, so ist nach Art. 23

$$A = \frac{g_0}{\sqrt{w'^2 + 4\mu^2\left(\frac{4M''_0}{c^2} + \frac{1}{r\mathfrak{C}}\right)^2}},$$

$$B = \frac{g_0}{\sqrt{w'^2 + \mu^2\left(\frac{4M''_0}{\nu c^2} + \frac{1}{r\mathfrak{C}}\right)^2}},$$

und *beide Werthe A und B können durch Messung bestimmt werden;* doch ist hierbei vorausgesetzt, dass die Induktion des rotirenden Magnets sich nicht auf beide Umwindungen des geschlossenen Leiters erstrecke, sondern dass dieselbe auf eine von den beiden Umwindungen, oder nur auf ein Element derselben, beschränkt sei. In der Wirklichkeit tritt an die Stelle dieses Elements der kleine den rotirenden Magnet umschliessende *Induktor.*

Diese Werthe von A und B können nun aber durch Messung für verschiedene Rotationsgeschwindigkeiten, d. i. für verschiedene Werthe von μ, bestimmt werden, und es leuchtet ein, dass ihr Unterschied bei abnehmenden Werthen von μ bald ganz verschwinden muss. Es bezeichne nun μ_0 einen bestimmten kleinen Werth von μ, für welchen jener Unterschied ganz unmerklich sei. Werden nun die alsdann als gleich zu betrachtenden Werthe von A und B mit C bezeichnet, so erhält man, da der mit g_0 bezeichnete Induktionskoefficient der Rotationsgeschwindigkeit proportional ist,

$$C = \frac{\mu_0}{\mu} \cdot \frac{g_0}{w'}.$$

Auch dieser dritte Werth C kann durch Messung bestimmt werden.

Wird nun aus den drei gefundenen Gleichungen, in denen A, B, C durch Messung bekannt sind, g_0 eliminirt, so erhält man folgende beiden Gleichungen:

$$\frac{4M''_0}{c^2} + \frac{1}{r\mathfrak{C}} = \frac{w'}{2\mu}\sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{C^2}{A^2} - 1},$$

$$\frac{4M''_0}{\nu c^2} + \frac{1}{r\mathfrak{C}} = \frac{w'}{2\mu}\sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{C^2}{B^2} - 1},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{4M''_0}{c^2} = \frac{\nu}{\nu-1} \cdot \frac{w'}{2\mu} \left\{ \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{C^2}{A^2} - 1} - \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{C^2}{B^2} - 1} \right\},$$

$$\frac{1}{r\mathfrak{E}} = \frac{1}{\nu-1} \cdot \frac{w'}{2\mu} \left\{ \nu\sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{C^2}{B^2} - 1} - \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{C^2}{A^2} - 1} \right\}.$$

Die *erste* von diesen beiden Gleichungen, in welcher alle Grössen bekannt sind, kann zur Prüfung entweder der Theorie oder der Beobachtungen dienen, während aus der *zweiten* Gleichung die unbekannte Grösse $r\mathfrak{E}$ gefunden wird, wozu es nicht ein Mal einer genaueren Bestimmung der Grössen M''_0, g_0 und c, sondern nur des Verhältnisses $\nu : 1$ bedarf.

Die letztere von den beiden gefundenen Gleichungen lässt sich endlich noch in eine etwas einfachere Form bringen, wenn man beachtet, dass der Widerstand der Längeneinheit des Leitungsdrahts $w' = 1/[\pi a^2 \varkappa]$ ist, wo a der Halbmesser des Drahts und $\varkappa$ das specifische Leitungsvermögen des Metalls ist, und dass ferner die in elektrostatischen Maasseinheiten ausgedrückte positive Elektricitätsmenge in der Längeneinheit des Leitungsdrahts $\mathfrak{E} = \pi a^2 . \mathfrak{E}_0$ ist, wo $\mathfrak{E}_0$ die in elektrostatischen Maasseinheiten ausgedrückte positive Elektricitätsmenge, welche *in der Volumeneinheit* des Leitungsdrahts enthalten ist, bezeichnet. Substituirt man diese Werthe, so erhält man:

$$\frac{1}{r\mathfrak{E}_0} = \frac{1}{2(\nu-1)\mu\varkappa} \cdot \left\{ \nu\sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{C^2}{B^2} - 1} - \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{C^2}{A^2} - 1} \right\}.$$

Es bleibt hiernach nur noch zu betrachten übrig, wie das durch $\nu : 1$ bezeichnete Verhältniss bestimmt werden könne.

Bezeichnet wie bisher $2\pi a$ die Länge des ganzen geschlossenen Leitungsdrahts, von welcher jede der beiden Hälften $= \pi a$ eine Umwindung bildet, und betrachtet man nun diese beiden Umwindungen wie zwei parallele Kreise, deren Mittelpunkte von einander, perpendikular gegen die Kreisebene, in der Entfernung $= \delta$ liegen, so lässt sich der Werth von M''_0 in irgend einem Punkte jenes ganzen Leitungsdrahts in zwei Theile zerlegen, nämlich in denjenigen Theil, welcher von dem Kreise herrührt, dem der betrachtete Punkt selbst angehört, und in denjenigen, welcher von dem anderen Kreise herrührt, dessen Abstand von ersterem $= \delta$ ist. Der *erstere* Theil wird unmittelbar dem Werthe von M''_0 für einen Kreis vom Halbmesser $= \frac{1}{2}a$ gleich gefunden, nämlich nach Art. 16 gleich dem doppelten Logarithmus des Verhältnisses des achtfachen Kreishalbmessers zum Drahthalbmesser, $= 2 \log (4a/\alpha)$. Der *letztere* Theil wird aus dem ersteren, wie leicht nachzuweisen, erhalten, durch blosse Substitution des Abstands der beiden Kreise δ für den

Halbmesser a, nämlich $= 2\log(4a/\delta)$. — Sind nun die beiden Umwindungen so mit einander verbunden, dass sie vom Strome in gleichem Sinne durchlaufen werden, so ist der Werth von M''_0 des ganzen geschlossenen Leiters in irgend einem Punkte seiner ersten oder zweiten Umwindung gleich der *Summe* dieser beiden Theile, $= 2\log(4a/a) + 2\log(4a/\delta)$; sind dagegen die beiden Umwindungen so verbunden, dass die zweite in entgegengesetztem Sinne wie die erste durchlaufen wird, so ist der Werth von M''_0 gleich der *Differenz* der beiden Theile, $= 2\log(4a/a) - 2\log(4a/\delta)$. Hieraus ergiebt sich das gesuchte Verhältniss

$$\nu : 1 = \left(2\log\frac{4a}{a} + 2\log\frac{4a}{\delta}\right) : \left(2\log\frac{4a}{a} - 2\log\frac{4a}{\delta}\right) = \left(\frac{2\log\frac{4a}{a}}{\log\frac{\delta}{a}} - 1\right) : 1.$$

36.

Schluss.

Die im vorigen Artikel enthaltenen Erörterungen über die Bestimmung der Grösse $r\mathfrak{E}$ dienen vorzüglich dazu, um an einem speciellen Beispiele zu erläutern, dass *die Abhängigkeit der Amplitude der von einem rotirenden Magnet in einem geschlossenen Leiter hervorgebrachten Schwingungen von der Gestalt des Leitungsdrahts*, wie Art. 23 angeführt worden, einen dritten für genauere Beobachtung wichtigen und besonders geeigneten Gegenstand bietet, welcher wegen seines vielseitigen Interesses eine sorgfältigere und umfassendere Bearbeitung verdient. Soll die Ausführung *genauer Beobachtungen* über diesen Gegenstand von rechtem Nutzen sein, so leuchtet ein, dass damit *erstens* eine umfassendere Erörterung über die Abhängigkeit der Werthe der Art. 8 mit N, N'', M, M'' bezeichneten bestimmten Integrale von der Gestalt des Leitungsdrahts, welche in dieser Abhandlung, Art. 10, auf den einzelnen Fall, wo der Leitungsdraht ein Kreis war, beschränkt geblieben, *zweitens* eine speciellere Erörterung über den Werth der Grösse $r\mathfrak{E}$, deren Bestimmung allein schon grosses Interesse für sich hat, worüber im vorhergehenden Artikel gehandelt worden, verbunden werden muss. Nun ist zwar im vorigen Artikel gezeigt worden, wie die Bestimmung dieser Grösse $r\mathfrak{E}$ aus Beobachtungen eines *speciellen Falles* der Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Gestalt des Leitungsdrahts möglich sei, ohne auf eine umfassendere Erörterung dieser Abhängigkeit im Allgemeinen einzugehen; doch werden, wie man leicht übersieht, auch zur Lösung der hierdurch wesentlich vereinfachten und beschränkten Aufgabe noch immer viele Arbeiten und Beobachtungen erfordert, zu

denen die in dieser Abhandlung beschriebenen und benutzten Anstalten nicht genügen.

Da nun ausserdem auch die Bestimmung der Grösse $r\mathfrak{E}$ weniger die Prüfung der im ersten Abschnitte dieser Abhandlung entwickelten Gesetze, die der Zweck des zweiten Abschnitts war, als vielmehr eine neue Anwendung der Theorie mit eigenthümlichem und selbstständigem Zwecke betreffen würde — die sich zum Gegenstand einer besonderen Abhandlung eignet —, so scheint es angemessen, die im zweiten Abschnitte dieser Abhandlung beabsichtigte *Ausführung von Beobachtungen* zur Prüfung der im ersten Abschnitte aufgestellten Gesetze auf die *schon mitgetheilten Beobachtungen über die beiden ersten* Art. 23 *angeführten Gegenstände* — Vergleichung der Amplituden und Phasen elektrischer Schwingungen an verschiedenen Stellen eines langen geschlossenen Leitungsdrahts — Gesetz der Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets — vor der Hand zu beschränken, und *die Ausführung aller genaueren Beobachtungen in Betreff des dritten Gegenstandes* — nämlich des Gesetzes der Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Gestalt des Leitungsdrahts, nebst den nach Anleitung des vorhergehenden Artikels daran sich knüpfenden besonderen Fragen und Aufgaben — einer künftigen Abhandlung vorzubehalten, für welche es hier schliesslich nur darauf ankam, die in den Resultaten der vorliegenden Abhandlung enthaltenen Grundlagen im Voraus zu entwickeln.

VI.

Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn Prof. Kirchhoff.[1])

[Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von J. C. Poggendorff, Bd. 100, Leipzig 1857, p. 351—352.]

Es mag erlaubt sein, diesem Aufsatz (S. 193 dieses Heftes) noch die Bemerkung hinzuzufügen, dass mir Professor W. Weber, bei seiner neulichen Anwesenheit in Berlin, als ich mit ihm über Professor Kirchhoff's Untersuchungen sprach, eine von ihm über denselben Gegenstand vollständig ausgearbeitete Abhandlung vorzeigte, die er indess noch nicht dem Druck zu übergeben beabsichtigte, weil er erst die Resultate einer gemeinschaftlich mit R. Kohlrausch darüber angefangenen Experimental-Untersuchung abwarten wollte. Die wenige Tage darauf erfolgende Durchreise des Professor Kirchhoff durch Berlin hat ihm Gelegenheit gegeben, sich selbst über dies Zusammentreffen mit demselben auszusprechen, — ein Zusammentreffen, welches insofern ein erfreuliches genannt werden kann, als beide Arbeiten, von wesentlich gleicher Grundlage ausgehend, zu übereinstimmenden Resultaten geführt haben, was bei einem noch so wenig erforschten Gegenstand, wie die Gesetze der Strombildung bisher gewesen sind, gewiss Beachtung verdient.

Poggendorff.

1) [Die obige von J. C. Poggendorff herrührende Bemerkung, auf welche W. Weber in der vorstehenden Abhandlung S. 130 Bezug nimmt, hat wegen ihres historischen Interesses an dieser Stelle Aufnahme gefunden.]

VII.

Ueber einen einfachen Ausspruch des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung.[1])

Von

W. Weber.

[Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von J. C. Poggendorff, Bd. 136, Leipzig 1869, p. 485—489.]

In diesen Annalen 1848, Bd. 73, S. 193 ff., wo ich einen Auszug von meiner ersten Abhandlung über „Elektrodynamische Maassbestimmungen" gegeben, habe ich S. 229[1]) noch besonders beigefügt, dass der in dieser Abhandlung gegebene Ausspruch des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung sich dadurch vereinfachen lasse, dass statt des Ausdrucks der *Kraft* der Ausdruck des *Potentials* angegeben werde, d. h. diejenige Funktion der Koordinaten x, y, z, deren partielle Differential-Koefficienten nach x, y, z negativ genommen, die den Koordinaten parallelen *Komponenten der Kraft* sind. Bezeichnet man mit e, e' zwei elektrische Theilchen, mit r ihre Entfernung von einander und mit c eine bestimmte Konstante, so war der Ausdruck der *Kraft*

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right),$$

der Ausdruck des *Potentials*

$$\frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}\right).$$ [2])

Der letztere Ausspruch des Gesetzes lässt sich nun auf folgende Weise in Worte fassen, wodurch die *physische Bedeutung* des Gesetzes

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. III, p. 245.]

[2]) Unabhängig hiervon ist NEUMANN in seinen Untersuchungen über die Principien der Elektrodynamik von der *hypothetischen Formel* für das Potential elektrischer Massen $(ee'/r)(1 + [1/c^2][dr^2/dt^2])$ ausgegangen.

und die darin ausgesprochene Abhängigkeit der *Bewegungsanregung* von der *vorhandenen Bewegung* deutlicher hervortritt, nämlich:

Zwischen je zwei elektrischen Theilchen findet theils gegenseitige Bewegung, theils Anregung zu gegenseitiger Bewegung Statt. Nennt man folgende Grössenwerthe, nämlich den der gegenseitigen Bewegung, wenn keine Anregung Statt findet, und den der gegenseitigen Anregung, wenn keine Bewegung Statt findet, *Grenzwerthe*, so wird immer der an einem Grenzwerthe fehlende Bruchtheil durch einen gleichen Bruchtheil des anderen Grenzwerths vertreten.

Der *letztere* von den beiden Grenzwerthen ist das bekannte *elektrostatische Potential* ee'/r, während der *erstere* Grenzwerth immer derselbe ist, nämlich der *Werth einer gegenseitigen Bewegung mit der Geschwindigkeit* c, welcher durch ac^2 dargestellt werden kann. — Findet nun zwischen e und e' eine gegenseitige Bewegung mit der Geschwindigkeit $dr/dt < c$ Statt, deren Werth $= a\,[dr^2/dt^2]$ ist, und fehlt also am ersten Grenzwerthe der Bruchtheil

$$\frac{ac^2 - a\dfrac{dr^2}{dt^2}}{ac^2} = 1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2},$$

so wird dieser fehlende Bruchtheil durch einen gleichen Bruchtheil des anderen Grenzwerths ee'/r vertreten, d. i. durch $(ee'/r)\,(1 - [1/c^2]\,[dr^2/dt^2])$, was der allgemeine Ausdruck des *Potentials* ist, so, wie er oben angegeben worden.

Bezeichnen e und e' die *Massen* der elektrischen Theilchen und α, β die *Geschwindigkeiten von* e in der Richtung r und senkrecht darauf, α', β' dieselben *Geschwindigkeiten für* e', wonach $\alpha - \alpha' = dr/dt$ die relative Geschwindigkeit beider Theilchen ist, so ist

$$\tfrac{1}{2}\,e\,(\alpha^2 + \beta^2) + \tfrac{1}{2}\,e'\,(\alpha'^2 + \beta'^2)$$

die den beiden Theilchen angehörige lebendige Kraft oder Arbeit, welche ihre Bewegung, der Grösse nach, den bewegten Massen und den Quadraten ihrer Geschwindigkeiten proportional angiebt. Setzt man nun

$$\text{für } \alpha, \qquad \frac{e\alpha + e'\alpha'}{e + e'} + \frac{e'(\alpha - \alpha')}{e + e'},$$

$$\text{für } \alpha', \qquad \frac{e\alpha + e'\alpha'}{e + e'} + \frac{e(\alpha' - \alpha)}{e + e'},$$

und beachtet, dass $\alpha - \alpha' = dr/dt$, so erhält man diese lebendige Kraft oder Arbeit der beiden Massen e und e' in folgenden *zwei Theilen* dargestellt, nämlich

$$=\frac{1}{2}\frac{ee'}{e+e'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{(e\alpha+e'\alpha')^2}{e+e'}+e\beta^2+e'\beta'^2\right),$$

woran der *erstere* die *innere Arbeit*, der *letztere* die *äussere Arbeit* heissen möge, weil für den *ersteren* die Kenntniss der Theilchen e und e' und der Zunahme oder Abnahme ihrer Entfernung von einander genügt, während für den *letzteren ausser den Theilchen* e und e' ein festes Koordinatensystem gegeben sein muss, um die Geschwindigkeiten $(e\alpha+e'\alpha')/(e+e')$, β und β' beobachten und messen zu können.

Es leuchtet nun ein, dass jene *innere Arbeit* $\frac{1}{2}[ee'/(e+e')].[dr^2/dt^2]$ der genaue Werth der *gegenseitigen Bewegung* beider Theilchen ist, der oben mit $a\,[dr^2/dt^2]$ bezeichnet wurde, wo also $a=\frac{1}{2}[ee'/(e+e')]$ war.

Diese *innere Arbeit* und das *Potential* der beiden Theilchen e, e' beim Abstande r können sehr verschiedene Werthe haben, nimmt aber der eine Werth zu, so nimmt der andere ab, und es stehen Zunahme und Abnahme immer in gleichem Verhältniss. Hat das *Potential* um ee'/r abgenommen, so hat die *innere Arbeit* um $\frac{1}{2}[ee'/(e+e')]\,c^2=ac^2$ zugenommen, und bezeichnet man diese an die Stelle des verschwundenen Potentials getretene *innere Arbeit* als das *Arbeitsäquivalent* jenes Potentials, so ergiebt sich nach demselben Verhältniss das *Arbeitsäquivalent eines beliebigen Potentials* V, $=[rc^2/2\,(e+e')].V$.

Die *vorhandene innere Arbeit* und das *Arbeitsäquivalent des vorhandenen Potentials* bilden zusammen die *Summe der vorhandenen inneren Arbeitswerthe*, und so verstanden ergiebt sich folgender einfacher Ausspruch unseres Gesetzes, nämlich:

> Für zwei elektrische Theilchen e und e', bei beliebigem Abstande von einander, ist die Summe der vorhandenen inneren Arbeitswerthe immer gleich, $=\frac{1}{2}[ee'/(e+e')].c^2$.

Denn die vorhandene *innere Arbeit* ist $\frac{1}{2}[ee'/(e+e')].[dr^2/dt^2]$, das vorhandene Potential ist V und das *Arbeitsäquivalent desselben* ist $[rc^2/2\,(e+e')].V$, folglich ist die *Summe der vorhandenen inneren Arbeitswerthe*

$$\frac{1}{2}\frac{ee'}{e+e'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{rc^2}{2\,(e+e')}\cdot V=\frac{1}{2}\frac{ee'}{e+e'}\cdot c^2,$$

oder, mit dem letzten Gliede dividirt,

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{r}{ee'}\cdot V=1,$$

woraus das *Potential* $V=(ee'/r)\,(1-[1/c^2]\,[dr^2/dt^2])$, wie oben, erhalten wird.

Wenn der hier erörterte Ausspruch des Gesetzes nur zum Zweck hat, die Abhängigkeit zweier Theilchen in ihren Bewegungen von einander, insbesondere die Abhängigkeit ihrer gegenseitigen Bewegungsanregung von ihrer vorhandenen Bewegung in einfachster Weise darzustellen, so treten ganz andere Bedürfnisse hervor, wenn es sich um die vollständige mathematische Entwickelung aller Konsequenzen dieses Gesetzes in Verbindung mit den allgemeinen Principien der Mechanik bei grösseren mit anderen Körpern verschiedenartig verbundenen elektrischen Massen handelt, wozu die Principien der Elektrodynamik in andere Formen zu bringen sind, deren Betrachtung hier nicht unser Zweck ist.

VIII.

Elektrodynamische
Maassbestimmungen
insbesondere über das
Princip der Erhaltung der Energie.

Von

Wilhelm Weber.
Mitglied der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften.

[Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse, Bd. 10, Leipzig 1871, p. 1—61.]

Das Gesetz der elektrischen Wirkung, welches in der ersten Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen (Leipzig 1846)[1]) ausgesprochen worden, ist von verschiedenen Seiten geprüft und mehrfach abgeändert, auch zum Gegenstand allgemeinerer Betrachtungen und Spekulationen gemacht worden, die noch keineswegs als abgeschlossen anzusehen sein dürften. Die folgende Abhandlung beschränkt sich *im ersten Abschnitte* auf eine Erörterung des Verhältnisses dieses Gesetzes zum *Princip der Erhaltung der Energie*, dessen grosse Wichtigkeit und Bedeutung besonders in der mechanischen Wärmetheorie hervorgetreten ist. Da behauptet worden war, dass jenes Gesetz mit diesem Principe im Widerspruch stände, so ist nachzuweisen versucht worden, dass *kein solcher Widerspruch* Statt finde. Jenes Gesetz gestattet vielmehr, dem Principe der Erhaltung der Energie noch einen Zusatz beizufügen, und dasselbe so umzuformen, dass seine Anwendung auf *jedes Paar von Theilchen* keineswegs blos auf die Zeit beschränkt ist, wo ein solches Paar durch andere Körper weder Gewinn noch Verlust an lebendiger Kraft erleidet, sondern immer gilt, unabhängig von den mancherlei Beziehungen, in welche beide Theilchen zu anderen Körpern treten können.

Ausserdem wird *im zweiten Abschnitte* noch eine Anwendung jenes Gesetzes auf die Entwickelung der *Bewegungsgesetze zweier*, *blos ihrer Wechselwirkung überlassenen, elektrischen Theilchen gemacht.* Führt diese Entwickelung direkt auch zu keinen Vergleichungen und exakten Prüfungen mit vorhandener Erfahrung, was der Grund ist, warum sie bisher wenig Beachtung gefunden, so führt sie doch zu manchen Resultaten, welche als Leitfaden bei Erforschung der *Molekularverhältnisse* und *Molekularbewegungen* der Körper, die so grosse Bedeutung für Chemie und Wärmelehre gewonnen, wichtig erscheinen, und interessante Beziehungen in diesen noch dunklen Gebieten der weiteren Forschung darbieten.

Ueber das Verhältniss der elektrischen Gesetze zu dem Princip der Erhaltung der Energie.

1.

Elektrische Theilchen und elektrische Massen.

Man bezeichnet Theilchen des positiven und des negativen elektrischen Fluidums mit denselben Buchstaben, z. B. mit e oder e' u. s. w.,

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 25.]

legt aber e oder e' ... einen positiven oder negativen Werth bei, jenachdem das Theilchen dem positiven oder negativen Fluidum angehört.

Wird die *messbare Abstossungskraft* des ersten Theilchens e auf ein ganz gleiches Theilchen e bei der *messbaren und beharrlichen Entfernung* r mit f bezeichnet, ferner die *messbare Abstossungskraft* des zweiten Theilchens e' auf ein ganz gleiches Theilchen e' bei derselben *Entfernung* r mit f', so wird $\pm r\sqrt{f}$ als *Grössenwerth von* e, und $\pm r\sqrt{f'}$ als *Grössenwerth von* e' genommen, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, jenachdem das Theilchen dem positiven oder negativen Fluidum angehört. — Der Messung der Kräfte f, f' wird dabei das in der Mechanik festgesetzte Kräftemaass zum Grunde gelegt, nämlich diejenige Kraft, welche, wenn sie auf die in der Mechanik festgesetzte Masseneinheit (Milligramm) wirkt, dieser Masseneinheit in der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt. — Die *Abstossungskraft* der beiden Theilchen e, e', während ihre Entfernung r unverändert bleibt, ist dann, dem *elektrostatischen* Gesetze gemäss,

$$= \frac{ee'}{r^2}.$$

Ein negativer Werth dieses Ausdrucks bedeutet *Anziehungskraft.*

Bei dieser Bezeichnungsweise der Theilchen der elektrischen Fluida haben nun e, e' nicht die Bedeutung von *Massen*, im Sinne der Mechanik, wie man schon daraus ersieht, dass e, e' bald positive, bald negative Werthe haben können; doch stehen die Werthe von e, e' mit den Massen der Theilchen in naher Beziehung. Bezeichnet man nämlich die *Massen der Theilchen* e, e' (im Sinne der Mechanik, wonach die *Masseneinheit* [Milligramm] durch die Masse *eines* ponderablen Körpers gegeben ist, und *verschiedene* Massen untereinander verglichen werden, nach Proportion der reciproken Beschleunigungen, die ihnen von gleicher Kraft ertheilt werden) mit ε, ε', die stets positive Werthe haben, so ergiebt sich für *positive* Werthe von e, e'

$$\frac{e}{\varepsilon} = \frac{e'}{\varepsilon'} = a,$$

für *negative* Werthe von e, e'

$$\frac{e}{\varepsilon} = \frac{e'}{\varepsilon'} = b,$$

wo a einen bestimmten *positiven*, b einen bestimmten *negativen* Werth hat. Ob hierin $a^2 = b^2$ sei, oder in welchem Verhältnisse a^2 zu b^2

stehe, ist bisher ebensowenig ermittelt worden, wie der Zahlenwerth von a oder b selbst. — In vielen Fällen ist die elektrische Masse ε an eine ponderable Masse m so gebunden, dass sie ohne dieselbe gar nicht bewegt werden kann, wo dann nur die Gesammtmasse $m + \varepsilon$ in Betracht kommt und ε gewöhnlich im Vergleich mit m als verschwindend betrachtet werden kann. Es kommen daher die Massen ε, ε' nur selten in Betracht.

Man unterscheidet nicht immer auf die angegebene Weise zwischen den Theilchen e, e' und ihren Massen ε, ε', sondern gebraucht oft die Zeichen der Theilchen e, e' auch für die Massen, wobei jedoch zu bemerken, dass dann von den Vorzeichen von e, e' abgesehen werden muss. Die Weglassung der Faktoren a und b, welche unbekannt sind, ist immer gestattet, wenn es sich nur um *relative Werthbestimmungen* von Massen der positiven oder der negativen Elektricität handelt.

2.

Das Gesetz der elektrischen Kraft.

Das *Gesetz der elektrischen Kraft* ist in den „Elektrodynamischen Maassbestimmungen“, Leipzig 1846, S. 119[1]) auf folgende Weise ausgesprochen worden:

> Bezeichnet man zwei elektrische Theilchen mit e und e', so wird die von beiden Theilchen aus der Entfernung r auf einander ausgeübte abstossende Kraft dargestellt durch

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right),$$

wo c dieselbe Konstante ist, welche a. a. O. mit $4/a$ bezeichnet worden ist.

Dieser Ausdruck für die *Kraft*, welche die Theilchen e und e' wechselseitig auf einander ausüben, ist aber, wie man leicht übersieht, von einer Grösse abhängig, welche die zu bestimmende *Kraft* selbst als Faktor enthält. Man erkennt dies leicht, wenn man die relative Beschleunigung der beiden Theilchen, nämlich d^2r/dt^2, in zwei Theile zerlegt,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r'}{dt^2} + \frac{d^2r''}{dt^2},$$

wovon der erstere Theil d^2r'/dt^2 diejenige relative Beschleunigung ist, welche von der Wechselwirkung beider Theilchen, der letztere Theil d^2r''/dt^2 dagegen derjenige Theil, welcher von anderen Ursachen (nämlich von der vorhandenen auf r senkrechten Bewegung der Theilchen,

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. III, p. 157.]

und von den Wechselwirkungen, in denen sie mit anderen Körpern stehen) herrührt. Der erstere Theil nun, welcher von der Wechselwirkung beider Theilchen herrührt, ist der von dieser *Wechselwirkung herrührenden Kraft* proportional und wird durch den Quotienten dieser Kraft und der Masse, auf welche sie wirkt, dargestellt.

Hieraus ergiebt sich, wie a. a. O. S. 168 [1]) gezeigt worden, leicht ein anderer Ausdruck für die *Kraft*, die die Theilchen e und e' wechselseitig auf einander ausüben, welcher nur Grössen enthält, die von der *zu bestimmenden Kraft* unabhängig sind, nämlich der Ausdruck

$$\frac{ee'}{r^2 - \frac{2r}{c^2}(e+e')}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2rf}{c^2}\right),$$

wo $f = d^2r''/dt^2$ gesetzt worden ist, oder, wenn man die elektrischen Theilchen e und e' von ihren Massen ε und ε' auf die im vorigen Artikel angegebene Weise unterscheidet (was a. a. O. nicht geschehen), der Ausdruck

$$\frac{ee'}{r^2 - \frac{2r}{c^2}\cdot\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}ee'}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2rf}{c^2}\right).$$

Es ergiebt sich hieraus nun, dass das *Gesetz der elektrischen Kraft* keineswegs so einfach ist, wie von einem Grundgesetz erwartet wird; dasselbe erscheint vielmehr in zwei Beziehungen besonders verwickelt.

Erstens nämlich geht aus diesem Ausdrucke der *Kraft* hervor, wie a. a. O. schon bemerkt worden, dass die Kraft, welche zwei elektrische Theilchen auf einander ausüben, nicht ausschliesslich von diesen Theilchen selbst, von ihrer Entfernung und relativen Geschwindigkeit, sondern auch von dem mit f bezeichneten Theile ihrer relativen Beschleunigung abhängt, *der zum Theil von anderen Körpern herrührt.* Auch ist bemerkt worden, da die von *zwei* Körpern auf einander ausgeübten Kräfte, wenn sie von der Gegenwart eines *dritten* Körpers abhängen, von Berzelius mit dem Namen *katalytischer Kräfte* bezeichnet worden sind, dass hiernach die *elektrischen Kräfte*, allgemein betrachtet, *katalytische Kräfte* seien.

Zweitens ergiebt sich aus demselben Ausdruck der *Kraft* noch ein anderes merkwürdiges Resultat, dass nämlich, wenn die Theilchen e und e' *gleichartig* sind, dieselben *keineswegs einander immer abstossen*, sondern, wenn $dr^2/dt^2 < c^2 + 2rf$ ist, nur so lange, als $r > [2/c^2]\,[(\varepsilon+\varepsilon')/\varepsilon\varepsilon']\,ee'$ ist, dass dagegen *Anziehung* eintritt, wenn $r < [2/c^2]\,[(\varepsilon+\varepsilon')/\varepsilon\varepsilon']\,ee'$.

Eine Ausnahme hiervon findet nur in dem Falle Statt, wenn $(r - 2\,[(\varepsilon+\varepsilon')/\varepsilon^2]\,[ee'/c^2])$, was immer Faktor des Nenners ist, zugleich auch Faktor des Zählers wird. Dieser Fall tritt ein, wenn die beiden

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 212.]

elektrischen Theilchen in *beharrlicher relativer Ruhe* sich befinden, so dass $dr/dt = 0$ und $d^2r/dt^2 = 0$ ist.

Der obige allgemeine Ausdruck der Kraft geht nämlich, wenn $dr/dt = 0$ ist, über in

$$\frac{ee'}{r\left(r - 2\,\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{c^2} f\right),$$

woraus durch Division mit der Masse $\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')$ derjenige Theil der Beschleunigung gefunden wird, welcher von der von beiden elektrischen Theilchen auf einander ausgeübten Kraft herrührt, nämlich

$$\frac{(\varepsilon + \varepsilon')\,ee'}{\varepsilon\varepsilon' r\left(r - 2\,\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{c^2} f\right).$$

Fügt man hierzu den anderen Theil der Beschleunigung, nämlich f, welcher aus der vorhandenen Bewegung der Theilchen senkrecht gegen r, und aus der Einwirkung anderer Körper sich ergiebt, so erhält man die *ganze* Beschleunigung, nämlich

$$\frac{d^2r}{dt^2} = f + \frac{(\varepsilon + \varepsilon')\,ee'}{\varepsilon\varepsilon' r\left(r - 2\,\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{c^2} f\right),$$

welche *bei beharrlicher relativer Ruhe* $= 0$ ist. Hieraus folgt, *bei beharrlicher relativer Ruhe*,

$$f = -\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{r^2}.$$

Wird dieser Werth für f im Ausdrucke der Kraft

$$\frac{ee'}{r\left(r - 2\,\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{c^2} f\right)$$

substituirt, so verwandelt sich letzterer in

$$\frac{ee'}{r\left(r - 2\,\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2}\right)} \cdot \frac{1}{r}\left(r - 2\,\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2}\right).$$

Man sieht also, dass im Falle *beharrlicher relativer Ruhe* der Faktor $(r - 2\,[(\varepsilon + \varepsilon')/\varepsilon\varepsilon'] \,.\, [ee'/c^2])$ dem Zähler und Nenner gemeinschaftlich ist. Der von diesem Faktor unabhängige Werth des Quotienten, nämlich ee'/r^2,

giebt hiernach für den Fall *beharrlicher relativer Ruhe* den Ausdruck der Kraft, in vollkommener Uebereinstimmung mit dem *elektrostatischen Grundgesetze*, wonach diese Kraft für *gleichartige* Theilchen bei *allen Entfernungen* einen positiven Werth behält.

3.

Das Gesetz des elektrischen Potentials.

Der vorhergehende Artikel beweist, dass das *Gesetz der elektrischen Kraft* in zwei Beziehungen von sehr zusammengesetzter Art ist, nämlich *erstens* in Beziehung darauf, dass die Abstossungskraft zweier elektrischen Theilchen abhängig ist von Dingen, die weder zum Wesen der Theilchen, welche die Kraft auf einander ausüben, noch zu ihrer gegenseitigen Lage im Raume, noch zu ihrer vorhandenen relativen Bewegung gehören, nämlich *von anderen Körpern*; *zweitens* in Beziehung darauf, dass zwischen denselben Theilchen, zwischen welchen in einigen Entfernungen *Abstossung*, in anderen Entfernungen *Anziehung* Statt finde.

Im Vergleich mit diesem komplicirten *Gesetze der elektrischen Kraft* ist das *Gesetz des elektrischen Potentials* viel einfacher.

Der Werth des *Potentials* V zweier elektrischen Theilchen e, e' ist nämlich, wie schon in POGGENDORFF's Annalen 1848, Bd. 73, S. 229[1]) von mir ausgesprochen worden ist, durch folgendes Gesetz bestimmt, nämlich

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{c^2}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right).$$

Beachtet man nämlich, dass r sowohl wie dr/dt für die beiden Theilchen e und e' zu verschiedenen Zeiten verschiedene Werthe haben, beide also Funktionen der Zeit sind, so ergiebt sich daraus, das dr/dt auch als eine Funktion von r betrachtet werden dürfe, welche mit fr bezeichnet werden soll. Man erhält hiernach

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{c^2}\cdot(fr)^2 - 1\right),$$

folglich durch Differentiation *den Ausdruck der Kraft*

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{ee'}{r^2}\left(\frac{1}{c^2}\cdot(fr)^2 - 1\right) + 2\frac{ee'}{rc^2}\cdot fr\cdot\frac{dfr}{dr},$$

oder, wenn darin wieder dr/dt für fr gesetzt wird,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2}\cdot\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\frac{dr}{dt}}{dr}\right),$$

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. III, p. 245.]

wofür geschrieben werden kann

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}\right).$$

Man sieht hieraus, dass

$$\frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{c^2}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right)$$

eine Funktion ist, deren Differentialquotient nach r die Abstossungskraft der beiden Theilchen e und e' darstellt, wenn r ihren Abstand und dr/dt ihre relative Geschwindigkeit, als Funktionen der Zeit betrachtet, bezeichnen. Da nun $(ee'/r)([1/c^2][dr^2/dt^2] - 1) = 0$ wird, wenn e und e' sich unendlich weit von einander entfernen, so ist $(ee'/r)([1/c^2][dr^2/dt^2] - 1)$ das *Potential* der elektrischen Theilchen e und e', d. h. die *Arbeit*, welche verrichtet wird, wenn die beiden Theilchen, unter Einwirkung ihrer Abstossungskraft, aus unendlicher Entfernung bis zur Entfernung r genähert, hier mit der relativen Geschwindigkeit dr/dt anlangen.[1])

Es geht daraus zugleich hervor, dass die *Arbeit*, welche bei der Ueberführung eines Systems von Theilchen e, e', aus einer gewissen Lage und einem gewissen Bewegungszustande, in eine andere Lage und in einen anderen Bewegungszustand verrichtet wird, nur von der Lage und Bewegung am Anfang und am Ende abhängig ist, dagegen unabhängig von dem Wege, auf welchem die Ueberführung erfolgt ist, und unabhängig von den Bewegungszuständen, welche auf diesem Wege Statt gefunden haben.

4.

Elektrische Grundgesetze.

Das *Gesetz des elektrischen Potentials* scheint zwar seiner Einfachheit nach den wahren elektrischen Grundgesetzen weit näher zu stehen, als das viel komplicirtere *Gesetz der elektrischen Kraft*; jedoch lässt

[1]) Von diesem Gesetze des elektrischen *Potentials* ist auch Beer in der Einleitung in die Elektrodynamik ausgegangen. Siehe „Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik von August Beer. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von Julius Plücker." Braunschweig 1865, S. 250. — Das Gesetz des *Potentials* als Grundgesetz an die Spitze zu stellen und das Gesetz der Kraft daraus abzuleiten, dürfte kein Bedenken finden. In manchen Beziehungen lässt sich von der *physischen Existenz der durch das Potential ausgedrückten Arbeit* mit mehr Recht sprechen, als von der *physischen Existenz einer Kraft*, von der man nur sagen kann, dass sie *physische Verhältnisse der Körper zu ändern sucht.*

sich auch der Ausspruch jenes Gesetzes noch auflösen in zwei einfachere Gesetze, welche auf folgende Weise ausgesprochen werden können.

Erstes Gesetz. Wenn zwei Theilchen e und e' in zwei Entfernungen r und ϱ in relativer Ruhe oder *in gleicher relativer Bewegung* sich befinden, so verhalten sich die *Arbeiten* V und U, welche verrichtet werden, wenn beide Theilchen unter wechselseitiger Einwirkung aus diesen beiden Entfernungen in unendliche Entfernung gebracht werden, umgekehrt wie diese beiden Entfernungen, d. i.

(1) $$V : U = \varrho : r.$$

Zweites Gesetz. Die Arbeit U, die unter Einwirkung der Kraft, welche die Theilchen e und e' auf einander ausüben, verrichtet wird, wenn diese Theilchen aus einer *bestimmten mit der Grösse* ee' *proportionalen Entfernung*, $\varrho = ee'/a$, in unendliche Entfernung gebracht werden, bildet *zusammen mit der lebendigen Kraft* x, welche den Theilchen in Folge ihrer relativen Bewegung bei der Entfernung ϱ zukam, eine *konstante Summe*, nämlich a, d. i.

(2) $$U + x = a.$$

Aus Gleichung (1) folgt nämlich

$$U = \frac{r}{\varrho} V,$$

und hiermit folgt aus Gleichung (2)

$$\frac{r}{\varrho} V + x = a,$$

oder, da $\varrho = ee'/a$ war,

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Die relative lebendige Kraft x ist nun aber dem Quadrate der relativen Geschwindigkeit dr/dt proportional, wonach man für a eine neue Konstante c^2 einführen kann, indem man nämlich

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$$ [1])

[1]) Bezeichnen ε und ε' die Massen der Theilchen e und e' und α, β die Geschwindigkeiten von ε in der Richtung r und senkrecht darauf, α', β' dieselben Geschwindigkeiten für ε', wonach $\alpha - \alpha' = dr/dt$ die relative Geschwindigkeit beider Theilchen ist, so ist

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon(\alpha^2 + \beta^2) + \tfrac{1}{2}\varepsilon'(\alpha'^2 + \beta'^2)$$

setzt. Alsdann erhält man

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}\right).$$

Hier bezeichnet V die Arbeit, welche verrichtet wird, wenn die beiden Theilchen aus der Entfernung r in unendliche Entfernung gebracht werden. Soll V die Arbeit bezeichnen, welche verrichtet wird, wenn die beiden Theilchen aus unendlicher Entfernung in die Entfernung r

die ganze den beiden Theilchen zugehörige *lebendige Kraft*. Setzt man nun

$$\text{für } \alpha, \quad \frac{\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha'}{\varepsilon + \varepsilon'} + \frac{\varepsilon'(\alpha - \alpha')}{\varepsilon + \varepsilon'},$$

$$\text{für } \alpha', \quad \frac{\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha'}{\varepsilon + \varepsilon'} - \frac{\varepsilon(\alpha - \alpha')}{\varepsilon + \varepsilon'},$$

so erhält man die ganze lebendige Kraft der beiden Theilchen als Summe zweier Theile folgendermaassen dargestellt, nämlich

$$= \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon + \varepsilon'} + \varepsilon\beta^2 + \varepsilon'\beta'^2\right),$$

wovon der *erstere* Theil, nämlich $[1/2]\,[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')]\,[dr^2/dt^2]$, die *relative lebendige Kraft* der beiden Theilchen ist, welche oben mit x bezeichnet worden. a ist nun auch eine relative lebendige Kraft derselben Theilchen, aber bei einer bestimmten relativen Geschwindigkeit c derselben, wonach also $a = [1/2]\,[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')]\,.\,c^2$ ist. Hieraus ergiebt sich $x/a = [1/c^2]\,.\,[dr^2/dt^2]$, wie oben angegeben worden.

Es möge noch bemerkt werden, dass der *zweite* Theil der obigen Summe, nämlich $[1/2]\,([(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2/(\varepsilon + \varepsilon')] + \varepsilon\beta^2 + \varepsilon'\beta'^2)$, nochmals getheilt, wieder als Summe zweier Theile dargestellt werden kann, nämlich

$$= \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{ds^2}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon + \varepsilon'} + (\varepsilon + \varepsilon')\,\gamma^2\right),$$

wo ds/dt die Geschwindigkeit darstellt, mit welcher die beiden Theilchen gegen einander, im Raume, senkrecht gegen r sich bewegen, während γ die Geschwindigkeit des Schwerpunkts beider Theilchen senkrecht gegen r darstellt. Es ergiebt sich hiernach die ganze den beiden Theilchen zugehörige lebendige Kraft in *drei* Theile zerlegt, nämlich 1. $[1/2]\,[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')]\,.\,[dr^2/dt^2]$, 2. $[1/2]\,[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')]\,.\,[ds^2/dt^2]$, 3. $[1/2]\,([(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2/(\varepsilon + \varepsilon')] + (\varepsilon + \varepsilon')\,\gamma^2)$, wovon der *erste* Theil, nämlich $[1/2]\,[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')]\,.\,[dr^2/dt^2]$, die *relative lebendige Kraft* der beiden Theilchen ist, ferner die *beiden ersten* Theile zusammen, nämlich $[1/2]\,[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')]\,(dr^2/dt^2 + ds^2/dt^2)$ die ganze *innere* lebendige Kraft oder die *innere Bewegungsenergie des Systems darstellt*, im Gegensatz zum *dritten* Theile, nämlich $[1/2]\,([(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2/(\varepsilon + \varepsilon')] + (\varepsilon + \varepsilon')\,\gamma^2)$, welcher die *äussere* lebendige Kraft oder die *äussere Bewegungsenergie des Systems* (d. i. die dem Schwerpunkt beider Theilchen zugehörige lebendige Kraft) darstellt.

gebracht werden, was angenommen zu werden pflegt, damit positive Werthe von dV/dr *Abstossung* bedeuten, so ergiebt sich

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} - 1\right),$$

d. i. das *Gesetz des elektrischen Potentials.*

5.

Princip der Erhaltung der Energie für zwei Theilchen, welche ein abgesondertes System bilden.

Die beiden im vorigen Artikel ausgesprochenen Grundgesetze, welche sich bezeichnen lassen als

das Gesetz der Abhängigkeit des Potentials von der Entfernung, *bei gleicher relativer Bewegung*, und als

das Gesetz der Abhängigkeit des Potentials von der relativen Bewegung, *bei einer bestimmten Entfernung*,

bedürfen noch einer näheren Erläuterung in Betreff ihres Verhältnisses zu dem Princip der Erhaltung der Energie.

Nach dem Princip der Erhaltung der Energie werden drei Formen der Energie unterschieden, nämlich die *Bewegungsenergie*, die *Potentialenergie* und die *Wärmeenergie.*

Die *Bewegungsenergie* ist der von der vorhandenen Bewegung abhängige Theil der Energie, und es wird eine besondere Bestimmung darüber gegeben, wie er von der Bewegung abhängt, nämlich theils von der Grösse der bewegten Masse, theils von der Geschwindigkeit, mit welcher diese Masse sich bewegt.

Dieselbe Bestimmung gilt auch von der *Wärmeenergie*, wenn nach der mechanischen Wärmetheorie die Wärme als eine *innere Bewegung in den Körpern* betrachtet wird. Handelt es sich aber um ein System zweier *Elementartheilchen*, d. i. solcher Theilchen, in deren *Innerem* keine Bewegung Statt findet, so leuchtet ein, dass bei einem solchen Systeme die Wärmeenergie wegfällt, und dass blos die *Bewegungsenergie* und die *Potentialenergie* übrig bleiben.

Die *Potentialenergie* endlich ist der von dem vorhandenen Potentiale abhängige Theil der Energie, und es bedarf für die Potentialenergie einer näheren Bestimmung, *wie sie vom Potential abhängt*, geradeso, wie es für die Bewegungsenergie einer näheren Bestimmung bedurfte, wie sie von der Bewegung abhinge.

Eine solche nähere Bestimmung ist nun gegeben worden, indem

man die *Potentialenergie* (abgesehen vom Vorzeichen) *dem Potential gleich* gesetzt hat.[1])

Die Berechtigung zu dieser Bestimmung fand man darin, dass das Potential eine der Bewegungsenergie homogene Grösse ist, welche, wenn sie negativ genommen und zu der Bewegungsenergie hinzugefügt wird, stets die nämliche Summe giebt, so lange beide Theilchen ein *abgesondertes* System bilden, welches weder von aussen Energie mitgetheilt erhält, noch nach aussen abgiebt.

Hat man z. B. ein System zweier ponderablen Theilchen m, m', so ist das *Potential*

$$V = \frac{mm'}{r},$$

und die *innere* lebendige Kraft, oder *die innere Bewegungsenergie des Systems*, ist

$$W = \frac{1}{2}\frac{mm'}{m+m'}\cdot(u^2+a^2),$$

wenn $u = dr/dt$ die relative Geschwindigkeit der beiden Theilchen, a den Unterschied ihrer Geschwindigkeiten im Raume senkrecht gegen r bezeichnet. Es ergiebt sich aber leicht für ein solches *abgesondertes* System, wenn $r = r_0$ und $a = a_0$ für $u = 0$ gesetzt wird,

$$u^2 = \frac{r_0 - r}{r_0}\left(\frac{2(m+m')}{r} - \frac{r_0+r}{r_0}a^2\right), \text{[2])}$$

[1]) Das Vorzeichen des *Potentials* V wird so bestimmt, dass positive Werthe von dV/dr abstossende Kräfte bezeichnen; das Vorzeichen der *Potentialenergie* richtet sich nach dem Vorzeichen der Arbeit, welche in Folge der Wechselwirkung der Theilchen verrichtet wird, während die beiden Theilchen aus der Entfernung r in unendliche Entfernung gebracht werden. Für zwei ponderable Theilchen m, m' ist daher das Potential $V = mm'/r$, die Potentialenergie $= -mm'/r$. Für zwei elektrische Theilchen e, e' ist das Potential $= [ee'/r]([1/c^2][dr^2/dt^2] - 1)$, die Potentialenergie $= [ee'/r](1 - [1/c^2][dr^2/dt^2])$.

[2]) Die Kraft, mit welcher die beiden Theilchen auf einander wechselseitig wirken, nämlich dV/dr, mit m dividirt, giebt die Beschleunigung des Theilchens m, $= [1/m][dV/dr]$; mit m' dividirt, die Beschleunigung des Theilchens m', $= [1/m'][dV/dr]$; folglich ist der von ihrer Wechselwirkung herrührende Theil der relativen Beschleunigung beider Theilchen $= (1/m + 1/m')[dV/dr]$, während derjenige Theil der relativen Beschleunigung beider Theilchen, welcher von ihrer Drehung um einander herrührt, durch a^2/r ausgedrückt wird. Zieht man nun den letzteren Theil von der ganzen Beschleunigung du/dt ab, so erhält man folgende Gleichung

$$\frac{du}{dt} - \frac{a^2}{r} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\frac{dV}{dr}.$$

Setzt man für den Augenblick, wo $u = 0$ ist, $r = r_0$ und $a = a_0$, so ergiebt sich für den Fall, dass auf die beiden Theilchen blos die von ihrer Wechselwirkung herrührenden Anziehungskräfte wirken,

$$ar = a_0 r_0;$$

folglich die Summe

$$W - V = -\frac{mm'}{r_0} + \frac{1}{2}\frac{mm'}{m+m'} \cdot a_0^2.$$

Diese Summe behält immer denselben Werth, so lange als die Werthe von r_0 und a_0 unverändert bleiben, d. h. so lange das System der beiden Theilchen weder Energie von aussen mitgetheilt erhält, noch nach aussen abgiebt. — Die *äussere Bewegungsenergie* bildet bei einem solchen abgesonderten Systeme *eine konstante Summe für sich.* —

Dasselbe gilt nun auch ferner für zwei *elektrische* Theilchen e, e', deren Potential negativ genommen, zu ihrer Bewegungsenergie hinzugefügt, gleichfalls immer die nämliche Summe giebt, so lange beide Theilchen ein *abgesondertes* System bilden.

Denn man hat für ein solches System zweier elektrischen Theilchen das *Potential*

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{u^2}{c^2} - 1\right),$$

ferner die *innere Bewegungsenergie des Systems*

$$W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}(u^2 + a^2) = \frac{ee'}{\varrho c^2}(u^2 + a^2),$$

wenn $u = dr/dt$ die relative Geschwindigkeit der beiden Theilchen, a den Unterschied ihrer Geschwindigkeiten im Raume senkrecht gegen r bezeichnet. Es ergiebt sich aber leicht für ein solches *abgesondertes* System, wenn $r = r_0$ und $a = a_0$ für $u = 0$ gesetzt wird,

$$a = \frac{r_0}{r} a_0,$$

$$u^2 = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} c^2 + \frac{r_0 + r}{r} a_0^2\right),$$ [1]

hiernach ergiebt sich durch Integration obiger Differentialgleichung, nachdem sie mit $2dr = 2udt$ multiplicirt worden,

$$u^2 + a_0^2 r_0^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) = 2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\left(\frac{mm'}{r} - \frac{mm'}{r_0}\right)$$

und hieraus

$$u^2 = \frac{r_0 - r}{r}\left(\frac{2(m+m')}{r^0} - \frac{r_0 + r}{r} a_0^2\right) = \frac{r_0 - r}{r_0}\left(\frac{2(m+m')}{r} - \frac{r_0 + r}{r_0} a^2\right).$$

[1]) Siehe Art. 11.

folglich die Summe

$$W - V = \frac{ee'}{r_0} + \frac{ee'}{\varrho} \cdot \frac{a_0^2}{c^2} = \frac{ee'}{r_0} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot a_0^2.$$

Auch diese Summe behält denselben Werth, so lange die Werthe von r_0 und a_0 unverändert bleiben, d. h. so lange das System beider Theilchen weder Energie von aussen mitgetheilt erhält noch nach aussen abgiebt.[1]) — *Für die äussere Bewegungsenergie gilt bei einem abgesonderten Systeme für zwei elektrische Theilchen dasselbe wie für zwei ponderable Theilchen.* —

6.

Ausdehnung des Princips der Erhaltung der Energie auf zwei elektrische Theilchen, welche kein abgesondertes System bilden.

Setzt man die Potentialenergie, wie es im vorhergehenden Artikel geschehen, dem Potentiale entgegengesetzt gleich, so gilt das Princip der Erhaltung der Energie für zwei Theilchen nur so lange, als diese beiden Theilchen ein *abgesondertes* System bilden, d. h. so lange, als das System beider Theilchen weder Energie von aussen mitgetheilt erhält, noch nach aussen abgiebt.

War die *ganze* Energie eines solchen *abgesonderten* Systems zweier Theilchen $= A$, bleibt aber dieses System nicht abgesondert, sondern wird ihm von aussen die *Bewegungsenergie* $= a$ mitgetheilt, so scheint zu folgen, dass, wenn darauf das System wieder abgesondert würde, die *ganze* Energie wieder konstant werden und konstant bleiben würde, so lange, als es abgesondert bliebe; dass aber die dem abgesonderten

[1]) In der sehr lehrreichen Schrift des Herrn Tait: Sketch of thermodynamics, Edinburgh 1868, findet sich pag. 76, mit Beziehung auf die von Riemann und Lorenz in Poggendorff's Annalen 1867 erschienenen Untersuchungen, folgende Stelle: But the investigations of these authors are entirely based on Weber's inadmissible theory of the forces exerted on each other by *moving electric particles*, for wich the conservation of energy is not true — while Maxwell's result is in perfect consistence with that great principle. Diese Behauptung des Herrn Tait erscheint mit Obigem in Widerspruch. Herr Tait hat S. 56 desselben Werks angeführt, dass Helmholtz die Lehre von der Energie auf Newton's Princip und auf folgendes *Postulat* gegründet habe: Matter consists of ultimate particles which exert upon each other forces whose directions are those of the lines joining each pair of particles, and whose magnitudes depend solely on the distances between the particles. Es leuchtet der Widerspruch des elektrischen Grundgesetzes *mit diesem Postulate* wohl ein, aber keineswegs *mit dem Principe der Erhaltung der Energie*, was Herr Tait verwechselt zu haben scheint.

Systeme zukommende *ganze* Energie während seiner letzteren Absonderung den konstanten Werth $A + a$ haben würde, also einen um a grösseren Werth, als während seiner früheren Absonderung. Es ist hiermit aber die Unmöglichkeit der Ausdehnung des Princips der Erhaltung der Energie auf zwei elektrische Theilchen, welche kein abgesondertes System bilden, noch keineswegs vollständig bewiesen.

Denn streng genommen ist dies nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass die *Potentialenergie* des Systems blos von der *Entfernung* beider Theilchen abhänge; wenn dagegen die *Potentialenergie* nicht blos von der Entfernung beider Theilchen, sondern auch von ihrer gegenseitigen *Bewegung* abhängt, so leuchtet ein, dass das System, während es von aussen die *Bewegungsenergie* $= a$ mitgetheilt erhält, dadurch mittelbar auch eine Aenderung seiner *Potentialenergie* erleiden muss. Es wäre dann also möglich, dass diese mittelbar von aussen herrührende Aenderung der *Potentialenergie* $= - a$ wäre, so dass die *ganze* Energie (Bewegungsenergie und Potentialenergie zusammen) beider Theilchen, auch wenn sie kein abgesondertes System bilden, immer denselben Werth behielte.

Dies findet nun zwar für ein System *zweier elektrischen Theilchen* wirklich nicht Statt, wenn man *die Potentialenergie dem Potentiale entgegengesetzt gleich setzt*, was also jene Ausdehnung des Princips unmöglich machen würde, was selbst aber keineswegs als nothwendig nachgewiesen ist. Im Allgemeinen wurde nämlich nur eine *nähere Bestimmung darüber erfordert*, *wie die Potentialenergie vom Potentiale abhänge*, wobei nur einleuchtete, dass zwischen Potential und Potentialenergie, weil sie homogene Grössen waren, ein reines Zahlenverhältniss Statt finden müsse. Ob aber dieses Zahlenverhältniss immer das Verhältniss von $+1$ zu -1 sei, oder ob dieses Verhältniss anders zu bestimmen sei, kann noch im Allgemeinen als zweifelhaft betrachtet werden, womit die Möglichkeit jener Ausdehnung des Princips bleibt.

Unter *Potential* zweier Theilchen versteht man nämlich diejenige *Arbeit*, welche in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen verrichtet wird, während die beiden Theilchen auf beliebige Weise aus unendlicher Entfernung in die vorhandene Entfernung r mit der vorhandenen relativen Geschwindigkeit dr/dt versetzt werden.

Man sieht aber ein, dass *Arbeit* in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen nicht blos verrichtet werde während der Versetzung aus *grösserer* Entfernung in die Entfernung r, sondern auch während der Versetzung aus *kleinerer* Entfernung in die Entfernung r. Und es liegt gar kein Grund vor, die *dem Systeme zuzuschreibende Energie* blos von *jener Arbeit* und nicht auch von *dieser Arbeit* abhängig zu machen.

Zum Beispiel könnte, wenn *jene Arbeit* nach Art. 4 mit V, *diese*

Arbeit mit $[(\varrho - r)/\varrho]\,V$ bezeichnet wird, die dem Systeme zuzuschreibende Potentialenergie der *Differenz beider Arbeiten* gleich sein, nämlich $= [(\varrho - r)/\varrho]\,V - V = -[r/\varrho]\,V$. *Diese Differenz beider Arbeiten* ist offenbar die *Arbeit,* welche in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen während der Versetzung von dem Grenzwerth der *kleineren* Entfernung zum Grenzwerth der *grösseren* Entfernung verrichtet wird, d. i. der Werth, welchen $-V = [ee'/r]\,(1 - [u^2/c^2])$ annimmt, wenn darin r dem Grenzwerthe der *kleineren* Entfernung gleich genommen, oder $r = \varrho$ gesetzt wird, wo ϱ den Grenzwerth der *kleineren* Entfernung bezeichnet. Hiernach ist also diese *Differenz beider Arbeiten* $= [ee'/\varrho]\,(1 - [u^2/c^2]) = -[r/\varrho]\,V$.

Bei solcher Bestimmung der Potentialenergie für ein System zweier elektrischen Theilchen, wo *jene erstere Arbeit*

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{u^2}{c^2} - 1\right)$$

ist, würde also zur Bestimmung der *letzteren Arbeit* es nur noch der Bestimmung des Werths von ϱ bedürfen, nämlich der *kleineren Entfernung*, für welche letztere Arbeit gelten soll.

Diese *kleinere Entfernung* muss nun, ebenso *wie jene grössere Entfernung, für sich, unabhängig von den vorhandenen Verhältnissen* der beiden Theilchen, bestimmt sein. Für die *grössere Entfernung* war dies dadurch erreicht, dass man ihr einen unendlich grossen Werth beilegte; für die *kleinere Entfernung* lässt sich dasselbe erreichen, wenn man ihr den Werth $= 2\,[(\varepsilon + \varepsilon')/\varepsilon\varepsilon'] \, . \, [ee'/c^2]$ beilegt, eine Entfernung, welche durch die Theilchen e, e', durch ihre Massen ε, ε' und durch die bekannte elektrische Konstante c gegeben ist.

Wird nun die kleinere Entfernung diesem Werthe von ϱ gleich gesetzt, so erhält man, da

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{u^2}{c^2} - 1\right),$$

$$\frac{\varrho - r}{\varrho}\,V = \frac{\varrho - r}{\varrho} \cdot \frac{ee'}{r}\left(\frac{u^2}{c^2} - 1\right)$$

war, den gesuchten Werth der *Potentialenergie*

$$-\frac{r}{\varrho}\,V = -\frac{ee'}{\varrho}\left(\frac{u^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\left(c^2 - u^2\right).$$

Zu der hier gemachten Unterscheidung zwischen *Potential* und *Potentialenergie* zweier elektrischen Theilchen und der hiernach gegebenen

Bestimmung ihres Verhältnisses, möge nun auch noch eine ähnliche Bemerkung über den zwischen *lebendiger Kraft* und *Bewegungsenergie* zweier Theilchen zu machenden Unterschied hinzugefügt werden. Denn auch die *Bewegungsenergie* zweier Theilchen braucht nicht nothwendig der *ganzen beiden Theilchen zugehörigen lebendigen Kraft* gleichgesetzt zu werden, sondern es wird im Allgemeinen nur eine *nähere Bestimmung darüber erfordert, in welcher Beziehung die Bewegungsenergie zweier Theilchen zur ganzen den beiden Theilchen zugehörigen lebendigen Kraft stehe.*

Die *ganze den beiden Theilchen zugehörige lebendige Kraft* ist nun in der Note Art. 4 als Summe zweier Theile dargestellt worden, wovon der *erstere* Theil, nämlich $\frac{1}{2}[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon+\varepsilon')][dr^2/dt^2]$, die *relative lebendige Kraft* der beiden Theilchen genannt wurde. Der *andere* Theil war derjenige, welcher beiden Theilchen zukam in Folge ihrer Drehung umeinander im Raume und in Folge der Bewegung ihres Schwerpunkts im Raume.

Geht man nun bei der Feststellung des Begriffs der *Energie* zweier Theilchen davon aus, dass das *Princip der Erhaltung der Energie* zweier Theilchen im Wesen der beiden Theilchen begründet sein soll, und zwar *im Wesen der beiden Theilchen als abgesondertes System betrachtet*, so leuchtet ein, dass zu diesem Zwecke der Begriff der *Energie* zweier Theilchen (ganz unabhängig von den Beziehungen, in welchen diese Theilchen zu allen anderen Körpern im Raume stehen mögen) nur von den im Systeme beider Theilchen als solchem dargebotenen Verhältnissen abhängig gemacht werden dürfe.

Wendet man diesen Grundsatz nun auf die *Bewegungsenergie* zweier Theilchen an, wie es so eben in Beziehung auf die *Potentialenergie* geschehen ist, so sieht man, dass die *Bewegungsenergie* von dem *ersten* Theile der ganzen den beiden Theilchen angehörigen lebendigen Kraft, nämlich von der *relativen lebendigen Kraft* der beiden Theilchen abhängig gemacht werden dürfe, aber nicht von dem *zweiten* Theile der ganzen lebendigen Kraft, welche nämlich den beiden Theilchen nur in Folge ihrer Drehung umeinander im Raume und in Folge der Bewegung ihres Schwerpunkts im Raume zukommt, weil dieser Theil von Verhältnissen abhängt, welche von den Theilchen selbst unmittelbar nicht dargeboten sind. Denn die beiden Theilchen für sich allein betrachtet bieten in räumlicher Beziehung unmittelbar nichts dar als ihren Abstand, woraus keine Kenntniss von Drehung oder Fortbewegung des Schwerpunkts im Raume zu entnehmen ist.

Es soll daher in Folgendem unter *Bewegungsenergie* zweier Theilchen nicht die ganze den beiden Theilchen zugehörige lebendige Kraft, sondern nur die *relative lebendige Kraft* der beiden Theilchen verstanden werden.

Hiernach würde nun aber, wie man leicht ersieht, das System zweier elektrischen Theilchen e, e', während es von aussen die *Bewegungsenergie* $= a$ mitgetheilt erhielte, wirklich eine Aenderung seiner *Potentialenergie* $= - a$ erleiden, so dass die *ganze Energie* des Systems beider Theilchen immer denselben Werth behielte, sowohl wenn die beiden Theilchen ein abgesondertes System, als auch wenn sie kein abgesondertes System bilden. Denn setzt man die von aussen mitgetheilte *Bewegungsenergie*

$$a = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} v^2,$$

während die *vor* dieser Mittheilung vorhandene *Bewegungsenergie* der Theilchen

$$= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot u_0^2$$

war, so ist die *nach* dieser Mittheilung vorhandene *Bewegungsenergie*

$$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} u^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} (u_0^2 + v^2);$$

folglich ist die *Potentialenergie vor jener Mittheilung*

$$- \frac{r}{\varrho} V_0 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} (c^2 - u_0^2),$$

die *Potentialenergie nach jener Mittheilung* dagegen

$$- \frac{r}{\varrho} V = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} (c^2 - u^2) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} (c^2 - u_0^2) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} v^2,$$

also ist die in Folge jener mitgetheilten *Bewegungsenergie* $= + a$ eingetretene Aenderung der *Potentialenergie*

$$= - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} v^2 = - a.$$

7.

Anwendbarkeit auf andere Körper.

Unterscheidet man zwischen Potential und Potentialenergie zweier elektrischen Theilchen auf die im vorigen Artikel angegebene Weise, wonach nämlich

das *Potential* diejenige *Arbeit* ist, welche in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen verrichtet wird während die beiden

Theilchen aus unendlicher Entfernung in die vorhandene Entfernung r mit der vorhandenen relativen Geschwindigkeit dr/dt versetzt werden;

die *Potentialenergie* dagegen die *negativ* genommene *Arbeit* ist, welche in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen verrichtet wird während die beiden Theilchen *aus der grösseren Entfernung* $r = \infty$ *in die kleinere* $r = \varrho$, welche durch die Theilchen e, e', ihre Massen $\varepsilon, \varepsilon'$ und durch die Konstante c *gegeben ist*, mit der vorhandenen relativen Geschwindigkeit dr/dt versetzt werden;

so kann letztere, nämlich die *Potentialenergie in der angegebenen Bedeutung*, in zwei Theile zerlegt werden, wovon der eine dem *Potential* entgegengesetzt gleich, folglich diejenige Grösse ist, welche *früher allein als Potentialenergie* bezeichnet worden, und welche von jetzt an, nur als Theil der Potentialenergie betrachtet, die *freie Potentialenergie* heissen möge. Der übrig bleibende Rest ist der zweite Theil, welcher die *latente Potentialenergie* heissen möge.

Es lässt sich alsdann das Princip der Erhaltung der Energie *erstens* im früheren *weiteren Sinne* folgendermaassen aussprechen:

für ein *abgesondertes* System zweier Theilchen ist die Summe der *Bewegungsenergie* und der *freien Potentialenergie* immer gleich.

Denn, so lange keine Bewegungsenergie von aussen mitgetheilt, noch nach aussen abgegeben wird, wird jede Aenderung der freien Potentialenergie durch eine entgegengesetzt gleiche Aenderung der Bewegungsenergie ersetzt.

Es lässt sich aber alsdann auch *zweitens* das Princip der Erhaltung der Energie im *engeren Sinne* (wenn hierbei Potentialenergie und Bewegungsenergie in der eben festgesetzten Bedeutung genommen werden) folgendermaassen aussprechen:

die *relative Bewegungsenergie* zweier Theilchen und die ihnen bei dieser Bewegungsenergie zukommende *ganze Potentialenergie* bilden zusammen eine stets gleiche Summe, das System möge abgesondert sein oder nicht.

Hieran lassen sich nun folgende Bemerkungen knüpfen:

1. einem Theilchen für sich allein betrachtet kommt blosse *Bewegungsenergie* zu;

2. zweien Theilchen kommt zunächst ebenfalls Bewegungsenergie zu, welche die Summe von denen ist, die ihnen einzeln betrachtet zukommen;

3. diese Summe besteht aus einem Theile A, der theils *ihrem Schwerpunkte* zugeschrieben werden kann, theils der Drehung der beiden Theilchen im Raume um einander, und aus einem Theile B, welcher beiden Theilchen für sich allein betrachtet *relativ gegen einander*

zukommt. Dieser letztere Theil B heisst die *relative Bewegungsenergie oder die des Systems beider Theilchen;*

4. in dem *Systeme beider Theilchen* ist aber ausser seiner Bewegungsenergie noch Etwas vorhanden, was beiden Theilchen einzeln nicht zukommt, nämlich eine grössere oder geringere *Arbeitsfähigkeit*, in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen auf einander. Das *Maass dieser Arbeitsfähigkeit* wird mit dem Namen *Potentialenergie des Systems* oder *relative Potentialenergie der beiden Theilchen* bezeichnet, und zwar dient zu diesem *Maasse der Arbeitsfähigkeit* diejenige Arbeit, welche verrichtet wird in Folge der Wechselwirkung der beiden Theilchen, während ihrer Versetzung *aus der kleineren Entfernung* $r = \varrho$ *in die grössere* $r = \infty$, wo ϱ durch die Theilchen e, e' selbst, durch ihre Massen ε, ε' und durch die Konstante c bestimmt ist;

5. das auf die oben angegebene Weise näher bestimmte Princip der Erhaltung der Energie findet nun aber auf zwei Theilchen nur dann Anwendung, wenn das *Potential* der beiden Theilchen von gleicher Form ist wie das zweier elektrischen Theilchen, nämlich

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} - 1\right).$$

Das *Potential* zweier ponderablen Theilchen m, m' ist dagegen

$$V = \frac{mm'}{r},$$

was (abgesehen vom Vorzeichen) unter jener Form nur subsumirt werden kann, wenn der Werth der Konstanten c für ponderable Theilchen unendlich gross ist; doch leuchtet ein, dass in der Wirklichkeit genügen wird, der Konstanten c nur einen sehr grossen Werth zuzuschreiben, statt eines unendlich grossen Werths, um in keinen nachweisbaren Widerspruch mit der Erfahrung zu gerathen. Und bei dem ausserordentlich grossen Werthe, der auch für elektrische Theilchen der Konstanten c zugeschrieben werden muss, scheint es für ponderable Körper, zur Vermeidung aller nachweisbaren Widersprüche, gar nicht nöthig, einen anderen Werth anzunehmen, sondern es dürfte gestattet sein, für zwei ponderable Theilchen m, m' das *Potential*

$$V = \frac{mm'}{r}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}\right)$$

zu setzen, und darin der Konstanten c *denselben Werth wie im Potential elektrischer Theilchen* beizulegen.

Sollten aber auch künftige feinere Beobachtungsresultate ergeben, dass eine solche Gleichsetzung des Werths der Konstanten *c* für ponderable Theilchen nicht gestattet sei, so würde immer übrig bleiben, für ponderable Theilchen der Konstanten *c* einen noch grösseren Werth beizulegen, der leicht so gross genommen werden kann, dass jeder nachweisbare Widerspruch mit der Erfahrung vollkommen verschwindet.

Ueber die Bewegungen zweier elektrischen Theilchen durch Wechselwirkung.

8.

Durch das elektrische Grundgesetz wird die Wirkung bestimmt, welche irgend ein Theilchen auf ein anderes unter beliebigen Verhältnissen ausübt. Als nächstliegende und einfachste Anwendung, welche dieses Gesetz finden kann, scheint sich die Entwickelung der Bewegungsgesetze zweier Theilchen unter wechselseitigem Einflusse darzubieten; es hat aber ein grösseres praktisches Interesse gehabt, zunächst die Vertheilungsgesetze ruhender Elektricität in Konduktoren, und die Gesetze der von strömender Elektricität in einem geschlossenen Leiter, durch die in einem anderen Leiter strömende Elektricität, auf diesen letzteren Leiter ausgeübten Kräfte, sowie die Gesetze der von geschlossenen Strömen (oder von Magneten) auf die Elektricität in geschlossenen Leitern ausgeübten (elektromotorischen) Kräfte zu entwickeln, weil die Resultate dieser Entwickelungen direkte Prüfungen und Bestätigungen durch die Erfahrung gestatteten. Fehlt nun auch dieses wichtige praktische Interesse der Entwickelung der Bewegungsgesetze zweier Theilchen unter blossem wechselseitigen Einflusse, so dürften doch manche Resultate derselben in anderen Beziehungen Aufmerksamkeit verdienen.

Das Interesse an diesen Resultaten betrifft nämlich vorzugsweise die *Molekularbewegungen* zweier Theilchen, welche von aller direkten experimentellen Forschung ausgeschlossen sind, und für welche daher der Anwendung des aufgestellten Gesetzes, insofern es als Erfahrungsgesetz betrachtet wird, keine Berechtigung zugeschrieben werden kann. Die Entwickelung der *Molekularbewegungen* zweier Theilchen nach dem aufgestellten Gesetze darf daher nur als ein *Versuch* betrachtet werden, für die Theorie der Molekularbewegungen, an der es noch gänzlich fehlt, einen Leitfaden zu gewinnen, der für sich allein freilich nicht genügt, sondern noch einer wesentlichen Ergänzung bedarf. Denn ohne die Kenntniss und genaue Berücksichtigung der ohne Zweifel bei den Molekularbewegungen zur Mitwirkung kommenden, *auf Molekular-*

entfernungen beschränkten Molekularkräfte kann den sich ergebenden Resultaten keine genaue *quantitative*, sondern nur innerhalb gewisser Schranken eine Art *qualitativer* Geltung zugeschrieben werden, welche nur für die erste Rekognoscirung des Gebiets Bedeutung habe.

9.

Bewegungen zweier elektrischen Theilchen in Richtung der sie verbindenden Geraden.

Für zwei blos unter wechselseitigem Einfluss sich bewegende Theilchen e, e' hat man nach den Grundgesetzen Art. 4, wenn

$$\varrho = 2\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{c^2},\quad x = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2},\quad a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot c^2$$

gesetzt wird, und wenn daselbst die Vorzeichen von U und V negativ genommen werden, um die *Potentiale* damit zu bezeichnen,

$$V:U = 2\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{c^2}:r,$$

$$-U+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot c^2;$$

folglich

$$V = \frac{2}{r}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{c^2}\cdot U = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}-1\right).$$

Findet *keine Drehungsbewegung der beiden Theilchen um einander* im Raume Statt, so ist $[1/\varepsilon][dV/dr]$ die Beschleunigung des Theilchens e in Richtung von r, und $[1/\varepsilon'][dV/dr]$ ist die Beschleunigung des Theilchens e' in entgegengesetzter Richtung. Man erhält hiernach die *relative Beschleunigung* beider Theilchen

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{dV}{dr},$$

und hieraus durch Integration von $r=r_0$ bis $r=r$, wenn der Werth von r, in dem Augenblicke, wo $dr/dt = u = 0$ ist, mit r_0 bezeichnet wird, da $\varrho = 2\,(1/\varepsilon + 1/\varepsilon')\,[ee'/c^2]$ gesetzt worden,

$$\frac{dr^2}{dt^2} = u^2 = \frac{r-r_0}{r-\varrho}\cdot\frac{\varrho}{r_0}\cdot c^2.$$

ϱ/r_0 hat stets einen von Null verschiedenen positiven oder negativen Werth; denn $\varrho = 2(1/\varepsilon + 1/\varepsilon')[ee'/c^2]$ hat einen gegebenen endlichen, wenn auch sehr kleinen Werth, welcher positiv oder negativ ist, jenachdem ee' positiv oder negativ ist, und $r_0 = r/(1 + [u^2/c^2] . [(r - \varrho)/\varrho])$ hat ebenfalls einen von Null verschiedenen positiven oder negativen Werth, weil die anfänglichen Werthe von r und u^2, aus denen r_0 bestimmt werden soll, *positive und messbare Grössen* sein müssen, welche durch Beobachtung bestimmt gedacht werden.

Ist ϱ/r_0 positiv, indem Zähler und Nenner positiv sind, so sind alle Bewegungen auf die Entfernungen ausserhalb der Strecke ϱr_0 beschränkt und zerfallen in *Fernbewegungen* und *Molekularbewegungen*, die von einander durch die Strecke ϱr_0 geschieden sind.

Ist ϱ/r_0 aber positiv, indem Zähler und Nenner negativ sind, so erstrecken sich die Bewegungen über alle möglichen Entfernungen, weil die Strecke ϱr_0 ausserhalb der möglichen Entfernungen liegt.

Ist ϱ/r_0 negativ, wo die Strecke ϱr_0 theils *ausserhalb*, theils *innerhalb* der möglichen Entfernungen liegt, so sind alle Bewegungen auf den *innerhalb* möglicher Entfernungen liegenden Theil der Strecke ϱr_0 beschränkt, und sind, wenn ϱ positiv und r_0 negativ ist, *Molekularbewegungen.*

Es ergiebt sich hiernach, wenn ϱ und r_0 positiv sind, *erstens*, dass kein Uebergang von *Fernbewegungen zu Molekularbewegungen* Statt findet; *zweitens*, dass u^2 immer kleiner bleibt als c^2, wenn es anfangs kleiner war; *drittens*, dass, wenn $u^2 < c^2$, r und r_0 (beide zugleich) entweder grösser oder kleiner als ϱ sind.

Hält man sich blos an die Erfahrung, so können einige dieser relativen Bewegungen der beiden Theilchen von der Betrachtung ganz ausgeschlossen werden; denn es leuchtet ein, dass in der Wirklichkeit unendlich grosse relative Geschwindigkeiten gar nicht vorkommen, im Gegentheil ist $[1/c^2] . [dr^2/dt^2]$ fast immer als ein sehr kleiner Bruch zu betrachten.

Diese aus der Natur entnommene Beschränkung ist auch stillschweigend zum Grunde gelegt, wenn $V = [ee'/r]([1/c^2][dr^2/dt^2] - 1)$ als *Potential* angenommen wird, welches $= 0$ sein soll für einen unendlich grossen Werth von r. Denn wäre dr^2/dt^2 unendlich gross, so könnte $[ee'/r]([1/c^2][dr^2/dt^2] - 1)$ auch für einen unendlich grossen Werth von r einen von Null verschiedenen Werth haben.

Ist aber der Werth von dr^2/dt^2 niemals unendlich gross, so muss es einen endlichen Werth geben, den dr^2/dt^2 niemals überschreitet. Als ein solcher Werth mag c^2 angenommen werden.

Diese Beschränkung der relativen Geschwindigkeiten vorausgesetzt, ist r_0 immer positiv, und es giebt für jeden Werth von r_0 nur eine

einzige stetig zusammenhängende Reihe zusammengehöriger Werthe von r und dr^2/dt^2, und zwar erstrecken sich

wenn ϱ positiv und $r_0 > \varrho$ ist,

die zusammengehörigen Werthe von r und dr^2/dt^2 von $r = r_0$ bis $r = \infty$ und von $dr^2/dt^2 = 0$ bis $dr^2/dt^2 = \varrho/r_0$. Die betreffenden Bewegungen sind *Fernbewegungen.*

Ist ϱ positiv und $r_0 < \varrho$, oder ist ϱ negativ,

so erstrecken sich die zusammengehörigen Werthe von $r = r_0$ bis $r = 0$ und von $dr^2/dt^2 = 0$ bis $dr^2/dt^2 = c^2$. Die betreffenden Bewegungen sind im ersteren Falle, wenn ϱ positiv und $r_0 < \varrho$ ist, und desgleichen im zweiten Falle, wenn ϱ negativ und $r_0 < \varrho$ ist, *Molekularbewegungen;* wenn aber im zweiten Falle $r_0 > \varrho$ ist, sind die betreffenden Bewegungen theils *Fernbewegungen*, theils *Molekularbewegungen.*

Unter der angegebenen Beschränkung der Bewegungen erhält man also für zwei blos unter wechselseitigem Einfluss sich bewegende Theilchen e, e', *wenn keine Drehungsbewegung der Theilchen um einander* im Raume Statt findet, folgende Bewegungsgleichung, nämlich wenn $dr/dt = u$ gesetzt wird,

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r - \varrho} \cdot \frac{\varrho}{r_0},$$

wo ϱ einen durch die Theilchen e, e', ihre Massen ε, ε' und durch die Konstante c^2 gegebenen Werth hat, und r_0 eine, nach dieser Gleichung selbst, aus dem positiv und von ϱ verschiedenen, sonst beliebig anzunehmenden, Anfangswerth von r, und aus dem positiv und kleiner als c^2, sonst beliebig anzunehmenden, Anfangswerth von u^2 zu bestimmende Konstante bezeichnet.

10.

Zwei Aggregatzustände eines Systems von zwei gleichartigen Theilchen.

Für zwei gleichartige Theilchen hat ϱ einen positiven Werth. Da nun ferner für jeden Werth von r die relative Geschwindigkeit u zwei entgegengesetzt gleiche Werthe annehmen kann, so kann, obiger Gleichung $u^2/c^2 = [(r - r_0)/(r - \varrho)] \cdot [\varrho/r_0]$ gemäss,

entweder r *zuerst* abnehmen von $r = \infty$ bis $r = r_0$, und dabei nimmt u zu von $u = -c\sqrt{\varrho/r_0}$ bis $u = 0$; *sodann* wird r wieder zunehmen von $r = r_0$ bis $r = \infty$, und dabei nimmt u zu von $u = 0$ bis $u = +c\sqrt{\varrho/r_0}$;

oder es kann r *zuerst* abnehmen von $r = r_0$ bis $r = 0$, und dabei nimmt u ab von $u = 0$ bis $u = -c$; *sodann* wird r wieder zunehmen von $r = 0$ bis $r = r_0$, und dabei nimmt u ab von $u = +c$ bis $u = 0$.

Man sieht leicht, dass die *erstere* Bewegung *keine wiederkehrende* ist; denn nachdem die Entfernung r von beliebiger Grösse bis r_0 abgenommen hat, wächst sie wieder und zwar bis ins Unendliche, d. h. sie nimmt niemals wieder ab. Die *letztere* Bewegung ist dagegen eine *wiederkehrende,* indem die Entfernung r abwechselnd von r_0 bis 0 abnimmt und abwechselnd von 0 bis r_0 wieder zunimmt.

Im Augenblicke, wo $r = 0$ wird, scheint zwar im Werthe der Geschwindigkeit u ein Sprung einzutreten von $-c$ zu $+c$; in der That findet aber kein Sprung Statt, weil $-c$ bei verschwindendem r dieselbe Geschwindigkeit bezeichnet, wie $+c$ bei dem von Null an wachsenden r.

Diese beiden Bewegungen sind ferner von einander dadurch unterschieden, dass *kein Uebergang* von der einen zur anderen Statt findet; denn ein solcher Uebergang würde nach obiger Gleichung für die Strecke ϱr_0 oder $r_0 \varrho$ nur durch imaginäre Werthe von u vermittelt werden.

Auf diese Trennung der beiden Bewegungszustände lässt sich nun die Unterscheidung *zweier Aggregatzustände eines Systems von zwei gleichartigen Theilchen* begründen, nämlich eines Aggregatzustandes, bei welchem die beiden Theilchen sich nur in *Fernbewegung* befinden können, und eines Aggregatzustandes, bei welchem die beiden Theilchen sich nur in *Molekularbewegung* befinden können. Einen Uebergang von dem einen Aggregatzustande zu dem anderen giebt es nicht, so lange beide Theilchen sich nur unter wechselseitigem Einflusse bewegen.

Zu bemerken ist nur noch der Umstand, dass hierbei vorausgesetzt worden, dass die beiden Theilchen, im Raume betrachtet, keine andere Bewegung haben, als nach der Richtung r; jedoch wird in den folgenden Artikeln auch der entgegengesetzte Fall betrachtet werden.

11.

Bewegungen zweier elektrischen Theilchen, welche im Raume, in einer Richtung senkrecht auf die sie verbindende Gerade, ungleiche Geschwindigkeiten besitzen.

Bezeichnet a den Unterschied der Geschwindigkeiten, welche zwei elektrische Theilchen e und e', bei der Entfernung r von einander, im Raume in einer Richtung senkrecht auf die sie verbindende Gerade r besitzen, so ergiebt sich a^2/r als der von a abhängige Theil der relativen Beschleunigung du/dt.

Bringt man diesen Theil a^2/r von der ganzen Beschleunigung du/dt in Abrechnung, so giebt die Differenz $(du/dt - a^2/r)$ denjenigen Theil der relativen Beschleunigung der beiden Theilchen, welcher von den Kräften herrührt, die sie auf einander ausüben. Nach Art. 9 war dieser letztere Theil $= (1/\varepsilon + 1/\varepsilon')(dV/dr)$, wonach folgende Gleichung erhalten wird:

$$\frac{du}{dt} - \frac{a^2}{r} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{dV}{dr}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $udt = dr$, so erhält man

$$udu - a^2\frac{dr}{r} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) \cdot \frac{dV}{dr}dr,$$

und hieraus folgt durch Integration, von dem Augenblicke an gerechnet, wo $u = 0$ ist, wenn der Werth von r in diesem Augenblicke mit r_0 bezeichnet wird,

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)(V - V_0) = \frac{1}{2}u^2 - \int_{r_0}^{r} \frac{a^2}{r}\,dr,$$

wo $V = (ee'/r)([u^2/c^2] - 1)$ und $V_0 = -ee'/r_0$ ist, wo aber, um die letzte Integration auszuführen, a^2 als Funktion von r dargestellt werden muss.

Nun ist $r \,.\, adt$ das von der Verbindungslinie der beiden Theilchen, welche durch Abstossungs- oder Anziehungskräfte auf einander wirken, bei der Bewegung des einen Theilchens um das andere in dem Zeitelement dt beschriebene Flächenelement, welches für gleiche Zeitelemente dt immer gleichen Werth behält, woraus $radt = r_0 a_0 dt$ folgt. Setzt man also hiernach

$$a^2 = r_0^2 a_0^2 \cdot \frac{1}{r^2}$$

im letzten Gliede der obigen Gleichung ein, und führt dann die Integration aus, so erhält man folgende Gleichung:

$$2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{c^2}\left(\frac{r - r_0}{rr_0} + \frac{1}{r} \cdot \frac{u^2}{c^2}\right) = \frac{u^2}{c^2} + \frac{a_0^2}{c^2} \cdot \frac{r_0^2 - r^2}{r^2},$$

woraus, wenn $2(1/\varepsilon + 1/\varepsilon')(ee'/c^2) = \varrho$ gesetzt wird, die Bewegungsgleichung

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{a_0^2}{c^2}\right)$$

erhalten wird. Wird dieser Werth von u^2/c^2 in die Gleichung

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{u^2}{c^2} - 1\right)$$

gesetzt, so erhält man

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{a_0^2}{c^2}\right) - 1\right),$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r_0} \cdot \frac{r_0 - \varrho}{(r - \varrho)^2} - \frac{ee'}{(r - \varrho)^2}\left(1 - \left(3 - 2\frac{\varrho}{r}\right)\frac{r_0^2}{r^2}\right)\frac{a_0^2}{c^2}.$$

12.

Nach dem vorigen Artikel ist für zwei Theilchen, die sich unter wechselseitigem Einflusse beliebig *im Raume* bewegen, eine Gleichung zwischen ihrer relativen Geschwindigkeit u und ihrer relativen Entfernung r gegeben, nämlich

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r}\,\frac{a_0^2}{c^2}\right),$$

worin ϱ eine für zwei *gleichartige* Theilchen *positive*, für zwei *ungleichartige* Theilchen *negative* Konstante bezeichnet.

Es ergeben sich nun hieraus ganz ähnliche Folgerungen für die freien Bewegungen zweier Theilchen *im Raume,* welche in einer Richtung senkrecht auf die sie verbindende Gerade ungleiche Geschwindigkeit besitzen, unter dem Einflusse ihrer eigenen Wechselwirkung, wie für die Art. 10 betrachteten Bewegungen zweier Theilchen *in Richtung der geraden Linie r.* Es ergiebt sich nämlich auch hier für zwei *gleichartige* Theilchen wieder die Unterscheidung derselben zwei Aggregatzustände, nämlich eines Aggregatzustands, in welchem die beiden Theilchen Bewegungen machen mit periodischer Wiederkehr derselben Lage gegen einander, und eines Aggregatzustands, in welchem die beiden Theilchen Bewegungen machen, durch welche sie von einander immer weiter entfernt werden und niemals zu derselben Lage zurückkehren. Einen Uebergang von dem einen Aggregatzustand zu dem anderen giebt es nicht, so lange als beide Theilchen sich nur unter dem Einflusse ihrer eigenen Wechselwirkung bewegen.

13.

Eine Drehung der beiden Theilchen um einander fordert das Vorhandensein einer gewissen *Anziehungskraft,* wenn die beiden Theilchen

bei dieser Drehung in gleicher Entfernung von einander bleiben sollen, und diese durch die Drehung geforderte Anziehungskraft wächst bei unveränderter Entfernung quadratisch mit der Drehungsgeschwindigkeit. Hiernach sollte man erwarten, dass es für zwei *gleichartige* elektrische Theilchen in einer Entfernung $r_0 < \varrho$ (wo sie einander anziehen) stets eine *gewisse Drehungsgeschwindigkeit* a_0 geben müsse, bei welcher die durch die Drehung geforderte Anziehungskraft der aus der Wechselwirkung der beiden Theilchen resultirenden Anziehungskraft gleich wäre, so dass die beiden um einander sich drehenden Theilchen bei dieser Drehungsgeschwindigkeit in gleicher Entfernung r_0 von einander blieben. Dies ist aber nicht der Fall, weil die aus der Wechselwirkung beider Theilchen resultirende Anziehungskraft nicht blos von der Entfernung r_0, sondern auch von der Drehungsgeschwindigkeit a_0 abhängt, und mit letzterer in solcher Weise wächst, dass sie stets grösser bleibt als die durch die Drehungsgeschwindigkeit geforderte Anziehungskraft, wonach also mit jeder solchen Drehung immer eine wechselseitige Annäherung der beiden Theilchen verbunden ist.

Es ergiebt sich nämlich leicht, dass bei zwei *gleichartigen* Theilchen e und e', wo ϱ einen *positiven* Werth hat, wenn $r = r_0$ und folglich $u = 0$ ist, es keinen Werth von a_0 giebt, für welchen $[du/dt] = 0$ wäre, was der Fall sein müsste, wenn beide Theilchen in unveränderter Enternung r_0 bleiben sollten. Denn es ergiebt sich für $r = r_0$ aus der Gleichung am Schlusse von Art. 11

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r_0(r_0 - \varrho)}\left(1 + 2\frac{a_0^2}{c^2}\right),$$

und hieraus ferner, weil $[du/dt] - [a^2/r] = (1/\varepsilon + 1/\varepsilon')\,(dV/dr) = [\varrho/2]\,[c^2/ee'] \,.\, [dV/dr]$ war,

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\frac{c^2}{r_0 - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r^0} + 2\frac{a_0^2}{c^2}\right),$$

wonach du/dt nur dann $= 0$ sein kann, wenn

$$a_0^2 = -\frac{1}{2}\frac{\varrho}{r_0}c^2$$

wäre, was aber für einen *positiven* Werth von ϱ, d. i. wenn e und e' *gleichartig* sind, nicht möglich ist.

Ferner ergiebt sich, dass bei zwei *gleichartigen* Theilchen, wenn $r = r_0$ ist, du/dt entweder *positiv* oder *negativ* sei, jenachdem $r_0 > \varrho$ oder $r_0 < \varrho$ ist. Die beiden Theilchen entfernen sich also stets von einander, wenn $r = r_0 > \varrho$, und sie nähern sich stets einander, wenn $r = r_0 < \varrho$ ist, welchen Werth auch a_0 haben möge.

14.

Ueber die Schwingungsdauer eines elektrischen Atomen-Paares.

Zwei *gleichartige* elektrische Theilchen, in einer Entfernung $r_0 < \varrho$ von einander (wo ihre relative Geschwindigkeit $= 0$ ist), bleiben nicht in dieser Entfernung, sondern nähern sich einander von $r = r_0$ bis $r = 0$ mit einer Geschwindigkeit, welche von $u = 0$ bis $u = \sqrt{c^2 + [r_0^2 a_0^2/\varrho] \cdot [1/r]}$ wächst, d. i. ins Unendliche, wenn die Drehungsgeschwindigkeit a_0 im Augenblicke, wo $r = r_0$, von Null verschieden war. Es ergiebt sich daraus, dass der Zeitraum ϑ, in welchem beide Theilchen von $r = r_0$ bis $r = 0$ sich nähern, einen endlichen Werth hat. Dass im Augenblicke, wo $r = 0$ wird, der Werth der relativen Geschwindigkeit beider Theilchen

$$\sqrt{c^2 + \frac{r_0^2 a_0^2}{\varrho} \cdot \frac{1}{r}} = \pm \infty$$

wird, hat hier nur die Bedeutung, dass diese relative Geschwindigkeit von nun an als eine Entfernungsgeschwindigkeit $= + \infty$ zu setzen ist, während sie bis dahin als Näherungsgeschwindigkeit $= - \infty$ geworden war. Dies vorausgesetzt, ergiebt sich leicht, dass die beiden Theilchen in einem zweiten gleich grossen Zeitraume ϑ sich von $r = 0$ bis $r = r_0$ wieder von einander entfernen werden. Der Zeitraum 2ϑ, in welchem die beiden Theilchen sich von der Entfernung $r = r_0$ bis $r = 0$ einander mit zunehmender Geschwindigkeit nähern und darauf von $r = 0$ bis $r = r_0$ mit abnehmender Geschwindigkeit sich von einander wieder entfernen, kann die *Schwingungsdauer* des von den beiden elektrischen Theilchen gebildeten *Atomen-Paares* genannt werden.

Es bleibt hiernach noch die Aufgabe, *die Schwingungsdauer* 2ϑ *eines solchen Atomen-Paares zu bestimmen.*

Diese *Schwingungsdauer* lässt sich aus der Gleichung

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r_0 + r}{r} \cdot \frac{a_0^2}{c^2}\right)$$

leicht ableiten, wenn man annimmt, dass r_0 darin nicht grösser als ϱ sei.

Betrachtet man nämlich *zuerst* den Grenzfall, wo $r_0 = \varrho$ ist, so ergiebt sich aus obiger Gleichung

$$u^2 = c^2 + a_0^2 + \varrho a_0^2 \cdot \frac{1}{r},$$

und hieraus, $u = dr/dt$ gesetzt,

$$dt = -dr \sqrt{\frac{r}{\varrho a_0^2 + (c^2 + a_0^2) r}}.$$

Durch Integration wird hieraus erhalten

$$\vartheta = -\int_{\varrho}^{0} dr \sqrt{\frac{r}{\varrho a_0^2 + (c^2 + a_0^2) r}}.$$

Hiernach findet man

$$\vartheta = \frac{\varrho}{c^2 + a_0^2} \sqrt{c^2 + 2a_0^2} - \frac{\varrho a_0^2}{(c^2 + a_0^2)^{\frac{3}{2}}} \log\left(\sqrt{1 + \frac{c^2}{a_0^2}} + \sqrt{2 + \frac{c^2}{a_0^2}}\right),$$

oder für kleine Werthe von a_0/c

$$\vartheta = \frac{\varrho}{c}\left(1 - \frac{a_0^2}{c^2} \log \frac{2c}{a_0}\right).$$

Beschränkt man sich *sodann* auf die Betrachtung *kleiner Schwingungen*, d. i. solcher, wo r_0/ϱ sehr klein ist, so ergiebt sich aus obiger Gleichung, wenn r_0 und r gegen ϱ darin als verschwindend angenommen werden,

$$u^2 = \frac{r_0^2 a_0^2}{\varrho} \cdot \frac{1}{r} + c^2 - \left(\frac{c^2}{r_0} + \frac{a_0^2}{\varrho}\right) r,$$

und hieraus, $u = dr/dt$ gesetzt,

$$c\,dt = -dr \sqrt{\frac{r}{\frac{r_0^2 a_0^2}{\varrho c^2} + r - \left(\frac{1}{r_0} + \frac{a_0^2}{\varrho c^2}\right) r^2}},$$

was zu einem elliptischen Integrale führt. Für verschwindende Werthe von a_0/c erhält man

$$c\,dt = -dr \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{r}{r_0}}},$$

woraus durch Integration folgt

$$\vartheta = -\frac{1}{c}\int_{r_0}^{0} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r}{r_0}}} = \frac{2r_0}{c}.$$

Wenn, wie vorausgesetzt worden, $r < \varrho$ ist, kann r_0 die Schwingungsamplitude genannt werden, und es ergiebt sich für kleine Werthe von a_0/c, dass bei kleinen Schwingungsamplituden die Schwingungsdauer 2ϑ eines elektrischen Atomen-Paares der Schwingungsamplitude r_0

proportional ist. Der Faktor aber, womit r_0 zu multipliciren ist, um 2ϑ zu erhalten, welcher für kleine Amplituden konstant $= 4/c$ ist, nimmt bei grösseren Amplituden ab und wird $= 2/c$ für die Amplitude $r = \varrho$.

Setzt man $c = 439\,450\,.\,10^6$ Millimeter/[Sekunde], so ergiebt sich aus letzterer Bestimmung, dass der Werth von ϱ etwa zwischen $\frac{1}{4000}$ und $\frac{1}{8000}$ Millimeter liegen müsste, wenn diese Schwingungen den Lichtschwingungen an Schnelligkeit gleich sein sollten.

Die Verschiedenheit der elektrischen Theilchen e, e' und ihrer Massen ε, ε' hat bei kleinen Werthen von a_0/c und bei kleinen Amplituden auf die Schwingungen gar keinen Einfluss, bei grösseren Amplituden aber nur insofern, als der Werth von ϱ davon abhängt.

15.

Anwendbarkeit auf chemische Atomengruppen.

Die Unterscheidung zweier oder mehrerer Aggregatzustände der Körper, jenachdem sie aus einfachen Atomen, oder aus Atomenpaaren, oder aus Gruppen von noch mehr als zwei Atomen bestehen, hat in der *Chemie* grosse Bedeutung erlangt. Es findet bald der eine, bald der andere Aggregatzustand Statt, und bei vielen chemischen Processen findet ein Uebergang von dem einen zum anderen Statt, aber die bei solchen Uebergängen eintretenden Zwischenzustände können nicht beharren, und jene Aggregatzustände stehen daher als *beharrliche Zustände* von einander ganz isolirt da.

Nun leuchtet ein, dass die *Beharrlichkeit* einiger Atomenzustände, die als besondere Aggregatzustände unterschieden werden, sowie der *Mangel der Beharrlichkeit* aller anderen Atomenzustände, ihren Grund nur in den Gesetzen der Wechselwirkung der Atome haben könne, d. h. in der Verschiedenheit der Kräfte, welche die Atome auf einander ausüben nach Verschiedenheit der Verhältnisse, unter denen sie sich gegen einander befinden. Der Grund der Beharrlichkeit einiger Atomenzustände und des Mangels dieser Beharrlichkeit bei anderen ist in solchen Gesetzen der Wechselwirkung der Atome bisher keineswegs nachgewiesen worden, und es dürfte auch schwerlich gelingen, diesen Grund in solchen Gesetzen der Wechselwirkung aufzufinden, wie man für ponderable Atome aufzustellen und anzunehmen bisher versucht hat.

Es liegt daher die Frage nahe, ob der Grund von der Beharrlichkeit gewisser Atomenzustände nicht vielleicht in solchen Gesetzen der Wechselwirkung zu finden sei, wie hier für die elektrischen Theilchen aufgestellt und angenommen worden sind. Es dürften daher auch in

dieser Beziehung die in den vorhergehenden Artikeln entwickelten Bewegungen zweier elektrischen Theilchen unter Einfluss der ihnen zugeschriebenen Wechselwirkung von Interesse sein, weil dadurch wirklich ein Grund, worauf die Existenz solcher beharrlicher Aggregatzustände beruhen könne, nachgewiesen worden ist. Und es dürfte hierbei insbesondere zu beachten sein, dass dieselben Kräfte, welche den von einfachen und den von Atomenpaaren gebildeten *Aggregatzustand der Elektricität* bedingen, möglicherweise auch zwei ebensolche *Aggregatzustände ponderabler Körper* bedingen können. Denn bei der allgemeinen Verbreitung der Elektricität darf angenommen werden, dass an jedem ponderablen Atome ein elektrisches Atom haftet. Haften aber elektrische Atome fest an ponderablen, so wird in den Verhältnissen der elektrischen Atome nichts geändert als die *Massen*, welche von den auf die elektrischen Atome wirkenden Kräften zu bewegen sind. Diese *Massen* sind aber in obiger Entwickelung unbestimmt gelassen und blos mit ε und ε' bezeichnet worden, während die elektrischen Theilchen selbst, denen die Massen ε und ε' angehören, unabhängig von der Kenntniss der Werthe ε und ε', durch die messbaren Grössen e und e' bestimmt worden sind. Nimmt man nun die Werthe von ε und ε' so gross, dass darin die Massen der an den elektrischen Atomen haftenden ponderablen Atome mit eingeschlossen sind, so finden alle zunächst blos für *elektrische Atome* gefundenen Bestimmungen auch auf die mit elektrischen verbundenen *ponderablen Atome* Anwendung.

16.

Ueber Aggregatzustand und Schwingung zweier ungleichartigen elektrischen Theilchen.

Für zwei *ungleichartige* elektrische Theilchen gelten dieselben Gleichungen, wie für zwei gleichartige, nämlich die Art. 11 gefundenen

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{a_0^2}{c^2}\right),$$

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{a_0^2}{c^2}\right) - 1\right),$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{(r - \varrho)^2}\left(\frac{r_0 - \varrho}{r_0} - \left(1 - \frac{3r - 2\varrho}{r^3} \cdot r_0^2\right)\frac{a_0^2}{c^2}\right),$$

worin $\varrho = 2(1/\varepsilon + 1/\varepsilon')(ee'/c^2)$ ist; nur hat ϱ bei *ungleichartigen* Theilchen einen *negativen* Werth, weil das Produkt ee' *negativ* ist. Hierzu

kommt noch die Gleichung $ar = a_0 r_0$ (weil nämlich nur solche Bewegungen betrachtet werden, welche zwei elektrische Theilchen unter blossem Einfluss ihrer eigenen Wechselwirkung machen), woraus endlich noch die Gleichung folgt

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\varrho c^2}{ee'} \cdot \frac{dV}{dr} + \frac{r_0^2 a_0^2}{r^3}.$$

Hieraus ergiebt sich ebenso wie bei zwei gleichartigen elektrischen Theilchen, dass,

$$\text{für } r = r_0, \quad \frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r_0(r_0 - \varrho)}\left(1 + 2\frac{a_0^2}{c^2}\right),$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\frac{c^2}{r_0 - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + 2\frac{a_0^2}{c^2}\right),$$

und dass, wenn zugleich $a_0 = \sqrt{-\varrho c^2/2r_0}$ (was jetzt einen reellen Werth hat, weil $-\varrho = -2(1/\varepsilon + 1/\varepsilon')(ee'/c^2)$ für ungleichartige Theilchen positiv ist), $du/dt = 0$ wird, wonach also beide Theilchen, wenn $r = r_0$ und $a_0 = \sqrt{-\varrho c^2/2r_0}$ ist, bei ihrer Drehung um einander in *stets gleicher Entfernung* r_0 *bleiben*, ein Fall, der bei zwei *gleichartigen* Theilchen gar nicht vorkommen konnte.

Es ergiebt sich aber ferner aus der Gleichung

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r}\frac{a_0^2}{c^2}\right),$$

oder, wenn der konstante Werth $-r_0^2 a_0^2/\varrho c^2 = n$ gesetzt wird, aus folgender Gleichung

$$-\frac{r - \varrho}{\varrho} \cdot \frac{u^2}{c^2} = \left(\frac{r}{r_0} - 1\right) \cdot \left(n\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r}\right) - 1\right),$$

dass ausser dem Werthe $r = r_0$, für welchen $u = 0$ gegeben ist, im Allgemeinen noch ein anderer Werth von $r = nr_0/(r_0 - n)$ vorhanden ist, für welchen ebenfalls $u = 0$ ist.

Diese beiden Werthe von r, für welche $u = 0$ ist, sind aber, nach dem Werthe von n, bald mehr, bald weniger von einander verschieden, und fallen für $n = r_0/2$, d. i. für $a_0 = \sqrt{-\varrho c^2/2r_0}$, ganz zusammen, und nur dann, wenn die beiden Werthe von r, für welche $u = 0$ ist, so zusammenfallen, tritt der vorher erwähnte Fall ein, dass zugleich $u = 0$ und $du/dt = 0$ sind, folglich beide Theilchen bei ihrer Drehung um einander in gleicher Entfernung bleiben.

In allen übrigen Fällen, wenn z. B. für $r = 2n - x$ (wo $x < n$ sei) die Geschwindigkeit $u = 0$ ist, giebt es noch einen zweiten Werth von

$r = 2n + nx/(n - x)$, für den ebenfalls die Geschwindigkeit $u = 0$ ist. du/dt hat alsdann für $r = 2n - x$ einen positiven Werth, nimmt aber ab und wird $= 0$ zwischen $r = 2n - x$ und $r = 2n + nx/(n - x)$, so dass, für $r = 2n + nx/(n - x)$, du/dt einen negativen Werth hat. Man ersieht hieraus, dass Abstossung der beiden Theilchen Statt findet von $r = 2n - x$ bis zu demjenigen Werthe von r, für welchen $du/dt = 0$ ist, und Anziehung von da an bis zu $r = 2n + nx/(n - x)$, wonach beide Theilchen immer in *schwingender Bewegung gegen einander innerhalb der angegebenen Grenzen* bleiben müssen.

17.

Ueber AMPÈRE'*sche Molekularströme.*

Der eben beschriebene molekulare Aggregatzustand zweier ungleichartigen elektrischen Theilchen, bei welchem nämlich die Entfernung der beiden Theilchen abwechselnd zunimmt und wieder abnimmt, zwischen genau bestimmten Grenzen, und die Bahn, in welcher das eine Theilchen um das andere sich bewegt, an diesen beiden Grenzen in eine Kreisbahn übergeht, verdient besonders in solchen Fällen nähere Beachtung, wo das eine Theilchen als ruhend und blos das andere Theilchen als in Kreisbewegung um ersteres befindlich betrachtet werden darf.

Das Verhältniss beider Theilchen in Beziehung auf Theilnahme an der Bewegung hängt von dem Verhältniss ihrer Massen ε und ε' ab, wobei nach Art. 15 in den Werthen von ε und ε' die Massen der an den elektrischen Atomen haftenden ponderablen Atome mit eingeschlossen werden müssen. Es sei e das positiv elektrische Theilchen; das negative sei demselben entgegengesetzt gleich und werde daher mit $-e$ (statt mit e') bezeichnet. Nur an diesem letzteren hafte ein ponderables Atom, wodurch seine Masse so vergrössert werde, dass die Masse des positiven Theilchens dagegen als verschwindend betrachtet werden dürfe. Das Theilchen $-e$ wird dann als ruhend, und blos das Theilchen $+e$ als in Bewegung um das Theilchen $-e$ herum befindlich betrachtet werden können.

Es stellen alsdann die beiden ungleichartigen, in dem beschriebenen molekularen Aggregatzustande befindlichen Theilchen einen AMPÈRE'schen *Molekularstrom* dar; denn es lässt sich zeigen, dass sie den Annahmen ganz entsprechen, welche AMPÈRE von den *Molekularströmen* gemacht hat.

Um dies zu zeigen, werde der Ausdruck der Kraft entwickelt, welchen *das bewegte Theilchen e* auf irgend ein gegebenes Stromelement ausübt. Man bezeichne mit ds' die Länge des gegebenen Stromelements,

ferner mit $+e'ds'$ die positive und mit $-e'ds'$ die negative Elektricität, die es enthält; endlich mit u' die Geschwindigkeit des positiven Theilchens $+e'ds'$ und mit $-u'$ die Geschwindigkeit des negativen Theilchens $-e'ds'$. Sodann bezeichne r den Abstand des Stromelements vom Theilchen e, u die Geschwindigkeit des Theilchens e; x, y, z die Koordinaten des Theilchens e; x', y', z' die Koordinaten des Stromelements; ϑ und ϑ' die Winkel der Richtungen von u und u' mit r; ε den Winkel der Richtung von u mit der Richtung von u'.

Man transformire sodann den allgemeinen Ausdruck der Abstossungskraft zweier elektrischen Theilchen e und e' beim Abstande r, nämlich

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1-\frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right),$$

auf folgende Weise (siehe Beer, Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik, S. 251). Man differentiire nämlich die Gleichung

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$$

in Beziehung auf die Zeit t, so erhält man

$$r\frac{dr}{dt}=(x-x')\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)+(y-y')\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)+(z-z')\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right),$$

oder auch

$$r\frac{dr}{dt}=r(u\cos\vartheta-u'\cos\vartheta').$$

Durch nochmalige Differentiirung erhält man

$$\frac{dr^2}{dt^2}+r\frac{d^2r}{dt^2}=\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2$$

$$+(x-x')\left(\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d^2x'}{dt^2}\right)+(y-y')\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2y'}{dt^2}\right)+(z-z')\left(\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{d^2z'}{dt^2}\right),$$

worin

$$\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2=u^2+u'^2-2uu'\cos\varepsilon.$$

Bezeichnet man nun die Beschleunigung des einen Theilchens, deren Komponenten d^2x/dt^2, d^2y/dt^2, d^2z/dt^2 sind, mit N, und mit ν den Winkel ihrer Richtung mit r, und auf gleiche Weise die Beschleunigung des

anderen Theilchens, deren Komponenten d^2x'/dt^2, d^2y'/dt^2, d^2z'/dt^2 sind, mit N', und mit ν' den Winkel ihrer Richtung mit r, so ergiebt sich

$$\frac{x-x'}{r}\left(\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d^2x'}{dt^2}\right)+\frac{y-y'}{r}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2y'}{dt^2}\right)+\frac{z-z'}{r}\left(\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{d^2z'}{dt^2}\right)$$
$$= N\cos\nu - N'\cos\nu'.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$2\frac{dr^2}{dt^2}+2r\frac{d^2r}{dt^2}=2(u^2+u'^2-2uu'\cos\varepsilon)+2r(N\cos\nu-N'\cos\nu'),$$
$$3\frac{dr^2}{dt^2} \qquad = 3(u\cos\vartheta-u'\cos\vartheta')^2.$$

Die letztere Gleichung von der ersteren subtrahirt, giebt

$$-\frac{dr^2}{dt^2}+2r\frac{d^2r}{dt^2}=2(u^2+u'^2-2uu'\cos\varepsilon)-3(u\cos\vartheta-u'\cos\vartheta')^2$$
$$+2r(N\cos\nu-N'\cos\nu'),$$

woraus der allgemeine Ausdruck der Abstossungskraft zweier elektrischen Theilchen e und e' im Abstande r, nämlich

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1-\frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right)$$

transformirt sich ergiebt, nämlich

$$=\frac{ee'}{c^2r^2}(c^2+2(u^2+u'^2-2uu'\cos\varepsilon)-3(u\cos\vartheta-u'\cos\vartheta')^2$$
$$+2r(N\cos\nu-N'\cos\nu')).$$

Setzt man nun hierin für das Theilchen e' die positive Elektricität im gegebenen Stromelemente, nämlich $+e'ds'$, so erhält man die Abstossungskraft

$$\frac{ee'ds'}{c^2r^2}(c^2+2(u^2+u'^2-2uu'\cos\varepsilon)-3(u\cos\vartheta-u'\cos\vartheta')^2$$
$$+2r(N\cos\nu-N'\cos\nu'));$$

setzt man aber für das Theilchen e' die negative Elektricität im gegebenen Stromelemente, nämlich $-e'ds'$, so erhält man, weil alsdann $\varepsilon+\pi$, $\vartheta'+\pi$ und $\nu'+\pi$ an die Stelle von ε, ϑ' und ν' tritt, die Abstossungskraft

$$\frac{ee'ds'}{c^2r^2}(-c^2-2(u^2+u'^2+2uu'\cos\varepsilon)+3(u\cos\vartheta+u'\cos\vartheta')^2$$
$$-2r(N\cos\nu+N'\cos\nu'));$$

folglich zusammen, die Abstossungskraft des bewegten Theilchens e auf das ganze Stromelement,

$$\frac{4ee'ds'}{c^2r^2}(3uu'\cos\vartheta\cos\vartheta' - 2uu'\cos\varepsilon - rN'\cos\nu').$$

Die Abstossungskraft des ruhenden Theilchens $-e$ auf das ganze Stromelement dagegen, wo $u = 0$ zu setzen, ist

$$= +\frac{4ee'ds'}{c^2r^2}\cdot rN'\cos\nu',$$

wenn r hierin den Abstand des ruhenden Theilchens $-e$ von dem gegebenen Stromelemente bezeichnet. Der Unterschied dieses letzteren Werthes von r von dem früheren (nämlich von dem Abstande des in Bewegung um $-e$ herum befindlichen Theilchens $+e$ von dem gegebenen Stromelemente) darf aber als verschwindend kleiner Bruchtheil von r betrachtet werden, und es ergiebt sich alsdann die Abstossungskraft des bewegten Theilchens $+e$ und des ruhenden $-e$ zusammen auf das Stromelement

$$= \frac{4ee'ds'}{c^2r^2}(3\cos\vartheta\cos\vartheta' - 2\cos\varepsilon)\,.\,uu'.$$

Wollte man an die Stelle des bewegten elektrischen Theilchens $+e$ ein zweites Stromelement setzen, dessen positive, mit der Geschwindigkeit $+\frac{1}{2}u$ bewegte, Elektricität mit $+eds$, und dessen negative, mit der Geschwindigkeit $-\frac{1}{2}u$ bewegte, Elektricität mit $-eds$ bezeichnet werde, so erhält man die Abstossungskraft dieser beiden Stromelemente auf einander

$$= \frac{4eds\cdot e'ds'}{c^2r^2}(3\cos\vartheta\cos\vartheta' - 2\cos\varepsilon')\,.\,uu',$$

d. i. die nämliche Abstossungskraft wie vorher, wenn das vorher mit $+e$ bezeichnete (mit der Geschwindigkeit u bewegte) elektrische Theilchen der im zweiten Stromelemente enthaltenen mit $+eds$ bezeichneten (mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}u$ bewegten) positiven Elektricität gleich gesetzt wird.

Es ergiebt sich hieraus, dass die Kreisbewegung des elektrischen Theilchens $+e$ um das ruhende Theilchen $-e$ einen kreisförmigen elektrischen Doppelstrom vertritt, wenn die in letzterem enthaltene positive Elektricität $= +e$ ist und sich mit der halben Geschwindigkeit in ihrer Kreisbahn bewegt, wie jenes elektrische Theilchen $+e$, und wenn die in demselben Strome enthaltene negative Elektricität $= -e$ ist und sich mit derselben Geschwindigkeit wie die positive in entgegengesetzter Richtung bewegt.

Man ersieht hieraus, dass ein elektrisches Theilchen $+e$, wenn es in Kreisbewegung um das elektrische Theilchen $-e$ sich befindet, auf alle galvanischen Ströme dieselben Wirkungen ausübt, welche AMPÈRE von seinen Molekularströmen angenommen hat.

Die von AMPÈRE angenommenen Molekularströme unterscheiden sich aber von allen anderen galvanischen Strömen wesentlich dadurch, dass sie, nach AMPÈRE's Annahme, ohne elektromotorische Kraft *beharren*, während alle anderen galvanischen Ströme, dem OHM'schen Gesetze gemäss, der elektromotorischen Kraft proportional sind, also mit der elektromotorischen Kraft zugleich *verschwinden*. Es leuchtet nun aber ein, dass obiges elektrisches Theilchen $+e$ seine Kreisbewegung um das elektrische Theilchen $-e$, ohne elektromotorische Kraft, von selbst immer fortsetzt, und also auch in dieser Beziehung der AMPÈRE'schen Annahme vom Molekularstrome ganz entspricht.

Man erhält also auf diese Weise eine einfache Konstruktion der von AMPÈRE, ohne Beweis von ihrer Möglichkeit, angenommenen Molekularströme, begründet auf die Gesetze des *molekularen Aggregatzustandes zweier ungleichartigen elektrischen Theilchen,* wie sie im vorigen Artikel gefunden worden.

18.

Bewegungen zweier ungleichartigen elektrischen Theilchen im Raume, unter Einfluss einer elektrischen Scheidungskraft.

Bezeichnet $\pi + v$ den Winkel, welchen die Richtung der elektrischen Scheidungskraft mit r bildet, und bezeichnet a die Grösse der von der Scheidungskraft abhängigen relativen Beschleunigung beider Theilchen, so sind $-a\cos v$ und $a\sin v$ die Komponenten von a, von denen *erstere* den von der Scheidungskraft abhängigen Theil der relativen Beschleunigung du/dt, *letztere* den von der Scheidungskraft abhängigen Theil von $d\alpha/dt$ ausdrückt, wenn α den Unterschied der Geschwindigkeiten bezeichnet, mit denen die beiden Theilchen in einer gegen r senkrechten Richtung sich bewegen. — Vorausgesetzt wird, dass die Richtung der Scheidungskraft in der Ebene liegt, in welcher die beiden Theilchen sich um einander drehen. —

Bringt man nun die *erstere* Komponente, nämlich $-a\cos v$, als den von der *Scheidungskraft* abhängigen Theil von du/dt, und ferner α^2/r, als den von der *Geschwindigkeit* α abhängigen Theil von du/dt, in Abrechnung von dem ganzen Werthe der Beschleunigung du/dt, so ergiebt die Differenz $(du/dt + a\cos v - \alpha^2/r)$ denjenigen Theil der relativen Beschleunigung, der von der Kraft herrührt, welche die beiden Theilchen e und e'

auf einander ausüben, nämlich $(1/\varepsilon + 1/\varepsilon')(dV/dr) = [\varrho/2][c^2/ee'].[dV/dr]$, wonach folgende Gleichung erhalten wird:

$$\frac{du}{dt} + a\cos v - \frac{a^2}{r} = \frac{\varrho}{2}\frac{c^2}{ee'}\cdot\frac{dV}{dr}.$$

Bringt man die *letztere* Komponente, nämlich $a\sin v$, als den von der *Scheidungskraft* abhängigen Theil der Beschleunigung da/dt, von dem ganzen Werthe da/dt in Abrechnung, so giebt die Differenz $(da/dt - a\sin v)$ denjenigen Theil von der ganzen Beschleunigung da/dt, *der von der vorhandenen Bewegung unter blosser Einwirkung der von beiden Theilchen auf einander ausgeübten Kräfte herrührt.* Unter blosser Einwirkung der von beiden Theilchen auf einander ausgeübten Anziehungs- oder Abstossungskräfte würde aber das in einem gegebenen Zeitelemente dt beschriebene Flächenelement $ardt$ einen konstanten Werth haben oder es würde $a[dr/dt] + r[da/dt] = 0$ sein; folglich der hieraus sich ergebende Theil der Beschleunigung da/dt

$$= -\frac{a}{r}\frac{dr}{dt}.$$

Durch Gleichsetzung dieses Theils mit obiger Differenz erhält man die Gleichung

$$\frac{da}{dt} - a\sin v = -\frac{a}{r}\frac{dr}{dt}.$$

Hierzu kommt endlich noch, wie von selbst einleuchtet, die dritte Gleichung, nämlich

$$dv = \frac{adt}{r}.$$

Man hat hiernach für die vier veränderlichen Grössen r, u, a, v folgende drei Gleichungen:

$$(1)\qquad a\cos v - \frac{a^2}{r} = \frac{\varrho c^2}{2ee'}\cdot\frac{dV}{dr} - \frac{du}{dt},$$

$$(2)\qquad a\sin v - \frac{adr}{rdt} = \frac{da}{dt},$$

$$(3)\qquad dv = \frac{adt}{r}.$$

Multiplicirt man Gleichung (1) mit $dr = udt$, und Gleichung (2) mit $rdv = adt$, so erhält man

$$a \cos v \,.\, dr - \frac{a^2 dr}{r} = \frac{\varrho c^2}{2ee'} \cdot \frac{dV}{dr} dr - u du, \tag{4}$$

$$a r \sin v \,.\, dv - \frac{a^2 dr}{r} = a d a. \tag{5}$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen giebt

$$a \,.\, d(r \cos v) = \frac{\varrho c^2}{2ee'} \cdot \frac{dV}{dr} dr - a da - u du. \tag{6}$$

Ferner erhält man aus (2) und (3)

$$-2ar^3 \,.\, d(\cos v) = d(a^2 r^2). \tag{7}$$

Durch Integration der Differentialgleichung (6) erhält man, nachdem man mit 2 multiplicirt und $V = (ee'/r)([u^2/c^2] - 1)$ gesetzt hat,

$$2ar \cos v = \frac{\varrho c^2}{r}\left(\frac{u^2}{c^2} - 1\right) - a^2 - u^2 + \text{Konst.} \tag{8}$$

und hieraus, weil $r = r_0$, $a = a_0$ und $\cos v = -1$ für $u = 0$ ist,

$$-2ar_0 = -\frac{\varrho c^2}{r_0} - a_0{}^2 + \text{Konst.}, \tag{9}$$

Die Differenz von (8) und (9) giebt dann

$$2ar \cos v + 2ar_0 = \left(\frac{\varrho}{r} - 1\right) u^2 + \varrho c^2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) - a^2 + a_0{}^2. \tag{10}$$

Durch Integration der Differentialgleichung (7) erhält man, nachdem man mit r^3 dividirt hat,

$$-2a \cos v = \frac{a^2}{r} + 3\int \frac{a^2 dr}{r^2},$$

oder mit r multiplicirt

$$-2ar \cos v = a^2 + 3r \int \frac{a^2 dr}{r^2}, \tag{11}$$

wonach die Summe von (10) und (11)

$$2ar_0 = \left(\frac{\varrho}{r} - 1\right) u^2 + \varrho c^2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) + a_0{}^2 + 3r \int \frac{a^2 dr}{r^2},$$

und also

$$u^2 = \frac{1}{r - \varrho}\left(\varrho c^2 \left(\frac{r}{r_0} - 1\right) + r a_0{}^2 + 3r^2 \int \frac{a^2 dr}{r^2} - 2ar_0 r\right). \tag{12}$$

Aus Gleichung (3) ergiebt sich ferner, weil $dr = u\,dt$ ist,

(13) $$dv = \frac{a}{u}\frac{dr}{r},$$

und da nach Gleichung (7)

$$d(\cos v) = -\frac{d(a^2r^2)}{2ar^3},$$

und nach Gleichung (11)

$$\cos v = -\frac{1}{2a}\left(\frac{a^2}{r} + 3\int\frac{a^2dr}{r^2}\right),$$

so ergiebt sich durch Substitution dieser Werthe in die identische Gleichung

$$dv = -\frac{d(\cos v)}{\sqrt{1-\cos v^2}},$$

nach Gleichung (13)

$$\frac{a}{u}\frac{dr}{r} = \frac{\frac{d(a^2r^2)}{2ar^3}}{\sqrt{1-\frac{1}{4a^2}\left(\frac{a^2}{r}+3\int\frac{a^2dr}{r^2}\right)^2}}$$

und hieraus und aus (12)

$$u^2 = \left(\frac{ar^2dr}{d(a^2r^2)}\right)^2\cdot\left(4a^2 - \left(\frac{a^2}{r}+3\int\frac{a^2dr}{r^2}\right)^2\right)$$

(14) $$= \frac{1}{r-\varrho}\left(\frac{r-r_0}{r_0}\varrho c^2 + r(a_0{}^2 - 2ar_0) + \varrho r^2\int\frac{a^2dr}{r^2}\right)$$

oder folgende Gleichung für die zwei Veränderlichen r und a:

(15) $$4a^2 = \left(\frac{a^2}{r}+3\int\frac{a^2dr}{r^2}\right)^2 + \frac{4}{r-\varrho}\left(\frac{d(ar)}{dr}\right)^2\cdot\left(\frac{r-r_0}{r_0}\cdot\frac{\varrho c^2}{r^2} + \frac{a_0{}^2-2ar_0}{r} + 3\int\frac{a^2dr}{r^2}\right).$$ [1]

[1]) Verschwindet die Scheidungskraft a, so soll nach Art. 11 ar einen konstanten Werth annehmen. Für einen konstanten Werth von ar und für $a = 0$ reducirt sich aber Gleichung (15) auf

$$0 = \frac{a^2}{r} + 3\int\frac{a^2dr}{r^2},$$

was mit dem konstanten Werthe a^2r^2 dividirt die identische Gleichung

$$0 = \frac{1}{r^3} + 3\int\frac{dr}{r^4}$$

giebt, in Uebereinstimmung mit Art. 11.

Beschränkt man sich nun auf kleine Werthe von a, für welche ar zwar nicht, wie für $a = 0$ nach Art. 11, konstant ist, aber doch nur wenig von einem konstanten Werthe $a_0 r_0 = n$ abweicht, so kann

$$ar = n(1 + \varepsilon) \tag{16}$$

gesetzt werden, wo ε stets einen sehr kleinen Werth hat. Es folgt dann hieraus

$$\frac{a^2}{r} = (1 + 2\varepsilon)\frac{n^2}{r^3}, \tag{17}$$

$$\frac{d(ar)}{dr} = n\frac{d\varepsilon}{dr}. \tag{18}$$

Ferner folgt aus (11) und (17)

$$\int \frac{d\varepsilon}{r^3} = -\frac{a}{n^2}\cos v,$$

oder

$$d\varepsilon = \frac{a}{n^2} r^3 \sin v\, dv, \tag{19}$$

aus (18) und (19)

$$\frac{d(ar)}{dr} = \frac{a}{n} r^3 \sin v \cdot \frac{dv}{dr} \tag{20}$$

und aus (17) und (19)

$$\frac{a^2}{r} = \frac{n^2}{r^3} + \frac{2a}{r^3}\int r^3 \sin v\, dv. \tag{21}$$

Substituirt man nun die Werthe von $d(ar)/dr$ und a^2/r aus (20) und (21) in folgender aus (11) und (15) sich ergebenden Gleichung, nämlich

$$a^2 \sin v^2 = \frac{1}{r - \varrho}\cdot\left(\frac{d(ar)}{dr}\right)^2 \cdot \left(\frac{r - r_0}{r_0}\cdot\frac{\varrho c^2}{r^2} + \frac{a_0^2 - 2ar_0}{r} - \frac{a^2}{r} - 2a\cos v\right), \tag{22}$$

so erhält man, wenn für n wieder sein Werth $a_0 r_0$ gesetzt wird, folgende Gleichung zwischen r und v, nämlich

$$\frac{a_0^2 r_0^2}{r^4 c^2}\cdot\frac{dr^2}{dv^2} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r}\cdot\frac{a_0^2}{c^2}\right) - \frac{2a}{(r-\varrho)c^2}\left(r_0 r + \frac{3}{r}\int r^2 \cos v\, dr\right).^{1)} \tag{23}$$

1) Aus obiger Gleichung erhält man, da für dr/dv auch $[r/a]\,u$ gesetzt werden kann,

$$\frac{a_0^2 r_0^2}{a^2 r^2}\cdot\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r}\cdot\frac{a_0^2}{c^2}\right) - \frac{2a}{(r-\varrho)c^2}\left(r_0 r + \frac{3}{r}\int r^2 \cos v\, dr\right),$$

Durch Differentiation dieser Gleichung, nachdem sie mit $r(r-\varrho)$ multiplicirt worden, erhält man

$$\frac{d}{dr}\left((r-\varrho)\frac{a_0^2 r_0^2}{r^3 c^2}\cdot\frac{dr^2}{dv^2}\right)=\frac{\varrho r}{r_0}+(r+r_0)\frac{a_0^2}{c^2}+(r-r_0)\left(\frac{\varrho}{r_0}+\frac{a^2_0}{c^2}\right)$$
$$-\frac{2a}{c^2}(2r_0 r+3r^2\cos v).$$

Setzt man hierin, um einen speciellen Fall zu betrachten,

$$\varrho=-\frac{2r_0}{c^2}(a_0^2+ar_0),$$

d. i. der Fall, in welchem für $a=0$ nach Art. 16 beide Theilchen bei ihrer Drehung um einander in gleicher Entfernung bleiben, so erhält man

$$\frac{d}{dr}\left((r-\varrho)\frac{a_0^2 r_0^2}{r^3 c^2}\cdot\frac{dr^2}{dv^2}\right)=-\frac{2(r-r_0)}{c^2}(a_0^2+ar_0)-\frac{6ar}{c^2}(r_0+r\cos v),$$

dessen Werth $=0$ ist, *erstens*, wenn $u=0$ und folglich $r=r_0$, $a=a_0$ und $\cos v=-1$ ist; *zweitens*, wenn $r_0-r=[3ar(r_0+r\cos v)]/[a_0^2+ar_0]$ ist, ein Fall, welcher für kleine Werthe von a eintritt, wenn $\cos v=+1$, und alsdann näherungsweise $r=r_0-6\,[ar_0^2/a_0^2]$ wird.

Es ergiebt sich hieraus, dass, so wie *ohne Scheidungskraft* nach Art. 16 von zwei ungleichartigen elektrischen Theilchen, für welche $\varrho=-2r_0\,[a_0^2/c^2]$ war, das eine um das andere in einer Kreisbahn sich bewegen konnte, so auch *mit Scheidungskraft* ($=a$) von zwei ungleichartigen elektrischen Theilchen, für welche $\varrho=-2r_0\,([a_0^2/c^2]+ar_0)$ ist, das eine um das andere in einer geschlossenen Bahn sich bewegen könne, die jedoch keine Kreisbahn ist. Der Abstand der beiden Theilchen von einander ist nämlich verschieden, jenachdem das bewegte Theilchen von dem Centraltheilchen aus gerechnet in der Richtung der Scheidungskraft vorwärts oder rückwärts liegt, nämlich in letzterem Falle $=r_0$, im ersteren $=r_0-6\,[r_0^2/a_0^2]\,a$.

Man kann eine solche excentrische Lage des einen Theilchens im Flächenraume der um dieses Theilchen vom anderen beschriebenen Bahn (unter Einwirkung einer Scheidungskraft) mit einer Scheidung ruhender

was, wenn die Scheidungskraft a verschwindet und also nach Art. 11 $ar=a_0 r_0$ wird, in die Gleichung

$$\frac{u^2}{c^2}=\frac{r-r_0}{r-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0}+\frac{r+r_0}{r}\cdot\frac{a_0^2}{c^2}\right)$$

übergeht, d. i. dieselbe Gleichung, welche für diesen Fall Art. 11 schon gefunden worden ist.

elektrischer Fluida unter Einwirkung einer gleichen Scheidungskraft vergleichen, wobei jedoch der merkwürdige Unterschied hervortritt, dass jene Scheidung im umgekehrten Sinne Statt findet wie diese.

Es geht daraus hervor, dass in allen Konduktoren, welche unter Einwirkung von elektrischen Scheidungskräften auf bekannte Weise geladen werden, die Elektricität nicht blos im Aggregatzustande von Ampère'schen Molekularströmen enthalten sein kann, weil sonst die von der Scheidungskraft hervorgebrachte Scheidung im entgegengesetzten Sinne, als es wirklich der Fall ist, Statt finden müsste. Wäre auch alle Elektricität in einem solchen Konduktor, ehe die Scheidungskraft zu wirken begann, im Aggregatzustande von Ampère'schen Molekularströmen vorhanden gewesen, so müssten doch unter diesen Molekularströmen solche gewesen sein, welche unter dem Einfluss der Scheidungskraft nicht fortbestehen könnten (indem die beiden Theilchen fortführen sich in geschlossener Bahn um einander zu drehen), sondern aufgelöst würden, indem die beiden Theilchen sich immer weiter von einander entfernten, bis sie zu den Grenzen des Konduktors gelangten. Unter dem Einfluss der Scheidungskraft würden die positiven und negativen Theilchen der aufgelösten Molekularströme nur bei einer gewissen Vertheilung an der Oberfläche des Konduktors in Ruhe verharren können; beim Aufhören der Scheidungskraft würden sie aber wieder in Bewegung gerathen, so lange, bis sie sich paarweise wieder zu Ampère'schen Molekularströmen vereinigt hätten.

19.

Elektrische Ströme in Konduktoren.

Wäre in Konduktoren alle Elektricität, ehe eine Scheidungskraft zu wirken beginnt, im Aggregatzustande Ampère'scher Molekularströme enthalten, die aber unter dem Einfluss einer Scheidungskraft nicht fortbestehen könnten, sondern aufgelöst würden, indem die beiden um einander sich drehenden ungleichartigen elektrischen Theilchen sich von einander immer weiter entfernten, bis endlich ihre Bahnen asymptotisch der Richtung der Scheidungskraft sich näherten, so würden, bevor die sich immer weiter von einander entfernenden Theilchen zu den Grenzen des Konduktors gelangten, Begegnungen Statt finden zwischen den von verschiedenen Molekularströmen kommenden ungleichartigen elektrischen Theilchen, die dann mit einander neue Molekularströme bildeten. Diese neu gebildeten Molekularströme würden sodann auch wieder aufgelöst werden und die Bahnen der sich immer weiter von einander entfernenden Theilchen würden wieder asymptotisch der Richtung der Scheidungskraft sich nähern u. s. f.

Hierdurch entstünde eine elektrische Strömung im Konduktor in der Richtung der Scheidungskraft. Hätte der Konduktor die Gestalt eines gleichförmigen Ringes und hätte die Scheidungskraft in jedem einzelnen Längenelemente des Ringes bei gleicher Grösse die Richtung des Elements, so würde im Ringe ein konstanter Kreisstrom gebildet werden, und es würden die im vorigen Artikel entwickelten Bewegungsgesetze elektrischer Theilchen unter Einfluss einer elektrischen Scheidungskraft die Grundlage der Theorie dieser konstanten elektrischen Ströme in geschlossenen Konduktoren bilden.

Hierbei leuchtet ein, dass während dieser Strömung von jedem Theilchen, indem es unter Einwirkung der Scheidungskraft in Richtung der Scheidungskraft fortrückt, *Arbeit* verrichtet wird. Und da alle anderen Kräfte, die auf ein solches Theilchen im Konduktor wirken, summarisch einander das Gleichgewicht halten, so tritt jene Arbeit als äquivalente Zunahme an *lebendiger Kraft* des Theilchens hervor, woraus folgt, dass die *lebendige Kraft* aller im Konduktor enthaltenen Ampère'schen Molekularströme, während der Strom durch den Konduktor geht, wächst, nämlich das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher die Theilchen in den Ampère'schen Molekularströmen sich um einander drehen, proportional der Scheidungskraft (*elektromotorischen Kraft*) und proportional dem in der Richtung der Scheidungskraft zurückgelegten Wege (der *Stromintensität*). Wird das Verhältniss der elektromotorischen Kraft zur Stromintensität mit dem Namen *Widerstand* bezeichnet, so kann dafür gesetzt werden, die *lebendige Kraft* aller im Konduktor enthaltenen Molekularströme wachse, während der Strom durch den Konduktor geht, proportional dem *Widerstande* und proportional dem *Quadrate der Stromintensität.*

Dieses Wachsthum der *Bewegungsenergie* der in einem Konduktor enthaltenen elektrischen Theilchen, während ein Strom durch den Konduktor geht, ergiebt sich also als eine nothwendige Folge von der Einwirkung der elektromotorischen Kraft auf die Theilchen, während diese Theilchen in Folge des Stroms in der Richtung dieser Kraft fortrücken.

Diese theoretische Folgerung wird nun durch die Erfahrung zwar nicht auf direktem, aber doch auf indirektem Wege bestätigt, nämlich dadurch, dass ein Wachsthum der *Wärmeenergie* im Konduktor, während ein Strom durch den Konduktor geht, *beobachtet* wird. Und dieses *beobachtete* Wachsthum der *Wärmeenergie* im Konduktor ist jenem *berechneten* Wachsthum der *Bewegungsenergie* der elektrischen Theilchen in den Ampère'schen Molekularströmen des Konduktors *gleich.*

Nun ist die *Wärmeenergie* eines Körpers eine *Bewegungsenergie*, welche von Bewegungen *im Innern des Körpers* herrührt, die sich der direkten Beobachtung entziehen. Ebenso ist die den elektrischen Theilchen

der Ampère'schen Molekularströme in einem Konduktor angehörige *Bewegungsenergie* eine Bewegungsenergie, welche von Bewegungen im *Innern* des *Konduktors* herrührt, die sich der direkten Beobachtung entziehen.

Trotz dieser Uebereinstimmung wäre es möglich, dass jene *Wärmeenergie* eines Körpers und diese Bewegungsenergie der elektrischen Theilchen der in demselben Körper enthaltenen Ampère'schen Molekularströme ihrem Wesen nach ganz verschieden wären. Denn es wäre möglich, dass jene *Wärmeenergie* eine Bewegungsenergie wäre, welche von Bewegungen ganz anderer Theilchen als elektrischen herrührte, und die Bewegungen dieser anderen Theilchen könnten ganz anderer Art sein wie die in den Ampère'schen Strömen.

Zur Erklärung der Identität des oben bestimmten Wachsthums der Energie in den Ampère'schen Molekularströmen mit dem aus der Beobachtung gefundenen Wachsthum der Wärmeenergie würde dann *nach dem Principe der Erhaltung der Energie* schlechterdings nothwendig sein, dass eine *Uebertragung* der Bewegungsenergie von den elektrischen Theilchen in den Ampère'schen Strömen auf die anderen Theilchen, deren Bewegung das Wesen der Wärmeenergie mache, Statt fände. Und zwar müsste *alle* durch den Strom in den elektrischen Theilchen der Ampère'schen Ströme erzeugte Bewegungsenergie auf diese anderen Theilchen in jedem Augenblicke *total* übertragen werden.

Abgesehen davon, dass von einer solchen *totalen* Uebertragung Rechenschaft zu geben nicht möglich ist, leuchtet von selbst ein, dass eine jede auch nur partielle Uebertragung von Bewegungsenergie Ampère'scher Molekularströme auf andere Theilchen in Widerspruch stehen würde mit der allen Ampère'schen Strömen ihrem Wesen nach zukommenden *Beharrlichkeit.* Fände von elektrischen Theilchen in Molekularströmen eine solche Uebertragung ihrer Bewegungsenergie auf andere Theilchen wirklich Statt, so würde daraus einfach blos folgen, dass die von jenen Theilchen gebildeten Molekularströme *keine* Ampère'schen *Molekularströme* wären, weil ihnen keine *Beharrlichkeit* zukäme, worin das Wesen der Ampère'schen Molekularströme besteht.

Es ergiebt sich hieraus also die Folgerung, dass, wenn in den Konduktoren alle elektrischen Theilchen im Aggregatzustande Ampère'scher Molekularströme sich befinden, das beobachtete Wachsthum der *Wärmeenergie* eines Konduktors, während ein Strom durch ihn hindurchgeht, *unmittelbar* von dem Wachsthume der *Bewegungsenergie* der elektrischen Theilchen, welche die Ampère'schen Ströme bilden, herrührt, d. h. dass die dem Konduktor durch den Strom ertheilte *Wärmeenergie* eine *Bewegungsenergie* ist, welche von Bewegungen im Innern des Konduktors herrührt, und zwar von Bewegungen, *die in einer Verstärkung der von*

den elektrischen Theilchen im Konduktor gebildeten AMPÈRE'*schen Molekularströme besteht.*

Man sehe über diese *Identität* von *Wärmeenergie* und *Bewegungsenergie* AMPÈRE'*scher Molekularströme*, was „Ueber die Umsetzung der Stromarbeit in Wärme“ im 10. Bande der Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1862) im 33. Artikel der Abhandlung „Zur Galvanometrie“ gesagt worden ist.[1])

20.

Ueber Thermomagnetismus.

An die Voraussetzung der vorhergehenden Artikel, dass die Elektricität in Konduktoren im Aggregatzustande AMPÈRE'scher Molekularströme sich befinde, und an die daraus folgende Identität der *Wärmeenergie* des Konduktors mit der *Bewegungsenergie* der AMPÈRE'schen Ströme im Konduktor, knüpft sich leicht noch die Bemerkung an, dass *Temperaturgleichheit* zweier Konduktoren hiernach zwar auf gewissen Verhältnissen in Stärke und Beschaffenheit der AMPÈRE'schen Ströme in beiden Konduktoren beruhen müsse; dass aber bei diesen zur Temperaturgleichheit erforderlichen Verhältnissen in den Strömen beider Konduktoren noch folgende Verschiedenheit Statt finden könne. Es kann nämlich in den AMPÈRE'schen Strömen des einen Konduktors *grössere Masse* von Elektricität *mit geringerer Geschwindigkeit*, in denen des anderen Konduktors *kleinere Masse* von Elektricität *mit grösserer Geschwindigkeit* sich bewegen.

Denkt man sich nun einen Ring aus zwei solchen verschiedenartigen Konduktoren gebildet, durch welchen ein konstanter Strom geht, so dass durch alle Querschnitte des Rings in gleicher Zeit gleich viel Elektricität strömt, so leuchtet ein, dass auch durch die beiden Querschnitte, welche die *erste Schicht des zweiten Konduktors* begrenzen, gleich viel Elektricität gehen müsse. Die durch den ersten Querschnitt gehende Elektricität kommt aber aus dem *ersten Konduktor*, wo in den Molekularströmen grössere Masse von Elektricität mit geringerer Geschwindigkeit sich bewegt. Wegen dieser geringeren Geschwindigkeit kommt also dieser in die *erste Schicht des zweiten Konduktors* eindringenden Elektricität eine *geringere lebendige Kraft* zu. — Die durch den zweiten Querschnitt gehende Elektricität kommt aus der betrachteten ersten Schicht des zweiten Konduktors selbst, wo in den AMPÈRE'schen Strömen kleinere Masse von Elektricität sich mit grösserer Geschwindigkeit bewegt, und es kommt ihr also wegen dieser grösseren Geschwindigkeit eine *grössere lebendige Kraft* zu. Es ergiebt sich hieraus, dass

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. IV, p. 91.]

in Folge des Stroms diese *erste Schicht des zweiten Konduktors* mehr lebendige Kraft an die folgende Schicht des zweiten Konduktors abgiebt, als sie von der letzten Schicht des ersten Konduktors empfängt, dass also eine *Abnahme* an Bewegungsenergie in den Ampère'schen Strömen dieser Schicht Statt findet, d. h. eine *Abnahme der Wärmeenergie* oder *Temperatur*.

Das Umgekehrte findet man, wenn man die beiden Querschnitte betrachtet, welche die *erste Schicht des ersten Konduktors* begrenzen. Die durch den ersten Querschnitt in diese Schicht eintretende Elektricität kommt aus dem Ende des *zweiten* Konduktors mit grösserer Geschwindigkeit; die durch den zweiten Querschnitt aus dieser Schicht austretende Elektricität verlässt diese Schicht mit geringerer Geschwindigkeit, woraus sich ergiebt, dass in Folge des Stroms die *erste Schicht des ersten Konduktors* an die folgende Schicht desselben Konduktors weniger lebendige Kraft abgiebt, als sie von der letzten Schicht des zweiten Konduktors empfängt, wonach also eine *Zunahme* an Bewegungsenergie in den Ampère'schen Strömen dieser Schicht Statt findet, d. h. eine *Zunahme der Wärmeenergie oder Temperatur*.

Man sieht, dass hierdurch eine Grundlage für die Lehre vom *Thermomagnetismus*, insbesondere für den Peltier'schen Fundamentalversuch, dargeboten wird, deren weitere Verfolgung hier jedoch zu weit führen würde.

Es genüge, hier nur noch eine ähnliche Bemerkung in Beziehung auf den Seebeck'schen Fundamentalversuch des Thermomagnetismus beizufügen. In einem Körper, der in allen seinen Theilchen gleiche Temperatur besitzt, wird der Wärme ein *mobiles Gleichgewicht* zugeschrieben, oder man spricht, nach Fourier, von einer *wechselseitigen Strahlung* der Körpertheilchen, vermöge deren jedes Theilchen an die umgebenden Theilchen eben so viel Wärme verliert, als es von ihnen empfängt. Besteht nun die Wärme in Ampère'schen Molekularströmen, die sich aber auflösen, indem das positive und negative Theilchen sich von einander entfernen, bis sie anderen Theilchen begegnen, mit denen sie neue Molekularströme bilden, so würde die Temperaturgleichheit darin bestehen, dass die lebendige Kraft der aus einem Körpertheile austretenden elektrischen Theilchen gleich der lebendigen Kraft der in diesen Körpertheil eintretenden elektrischen Theilchen wäre.

Betrachtet man nun die Berührungsfläche zweier Konduktoren, welche sich blos dadurch unterscheiden, dass in den Ampère'schen Strömen des einen grössere Massen von Elektricität mit geringerer Geschwindigkeit, in denen des anderen kleinere Massen mit grösserer Geschwindigkeit sich bewegen, so würde bei gleicher Temperatur der beiden Konduktoren zwar die *lebendige Kraft* der aus dem ersten Kon-

duktor in den zweiten übergehenden elektrischen Theilchen gleich sein der *lebendigen Kraft* der aus dem zweiten Konduktor in den ersten übergehenden Theilchen; aber die *Masse* der elektrischen Theilchen, welche aus dem ersten Konduktor in den zweiten übergeht, würde grösser sein als die *Masse* der elektrischen Theilchen, welche aus dem zweiten Konduktor in den ersten übergeht, woraus sich (wenn es immer positive Elektricität ist, welche übergeht, während die negative Elektricität im Konduktor, an dessen Theilchen sie haftet, zurückbleibt) eine *Differenz der elektrischen Ladung zu beiden Seiten der Kontaktfläche* ergäbe, d. h. es ergäbe sich *das Vorhandensein einer elektromotorischen Kraft* an dieser Kontaktfläche; denn die elektromotorische Kraft einer Kontaktfläche ist eine Kraft, von welcher eine Differenz der elektrischen Ladung zu beiden Seiten der Kontaktfläche hervorgebracht wird.

Sind nun die beiden Konduktoren so beschaffen, dass jene Differenz der Ladung zu beiden Seiten ihrer Kontaktfläche nicht immer die nämliche ist, sondern *nach Verschiedenheit der Temperatur grösser oder kleiner*, so ergiebt sich daraus die Stromerregung in einem aus diesen beiden Konduktoren gebildeten Ringe, wenn an den beiden Kontaktflächen der Konduktoren verschiedene Temperaturen Statt finden.

21.

Helmholtz, *über den Widerspruch zwischen dem Gesetze der elektrischen Kraft und dem Gesetze der Erhaltung der Kraft.*

Helmholtz hat in der Abhandlung: „Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper" im Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 72, Seite 7 und 8 aus dem Gesetze der elektrischen Kraft die Bewegungsgleichung zweier elektrischen Theilchen, für Bewegungen in Richtung der Entfernung r beider Theilchen, abgeleitet, nämlich

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}=\frac{C-\frac{ee'}{r}}{\frac{1}{2}mc^2-\frac{ee'}{r}},$$

oder, $C=ee'/r_0$ und $2ee'/mc^2=\varrho$ gesetzt, die Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}=\frac{r-r_0}{r-\varrho}\cdot\frac{\varrho}{r_0},$$

d. i. dieselbe Gleichung, welche Art. 9 gefunden worden ist.

Ist $ee'/r>\frac{1}{2}mc^2>C$, d. i. $\varrho/r>1>\varrho/r_0$, so ist dr^2/dt^2 positiv und grösser als c^2, also dr/dt reell. Ist letzteres selbst positiv, so

wird r wachsen, bis $ee'/r = \frac{1}{2} mc^2$, d. i. $r = \varrho$, dann wird dr/dt *unendlich gross.*

Dasselbe wird geschehen, wenn im Anfange $C > \frac{1}{2} mc^2 > ee'/r$, d. i. $\varrho/r_0 > 1 > \varrho/r$, und dr/dt negativ ist.

Diese Folgerungen stehen nach Helmholtz in Widerspruch mit dem Gesetze der Erhaltung der Kraft.

Es ist dabei nun *erstens* zu bemerken, dass hier zwei elektrische Theilchen angenommen werden, die sich zwar mit *endlicher* Geschwindigkeit zu bewegen beginnen, die aber grösser ist als die Geschwindigkeit c, d. i. grösser als $439\,450 \cdot 10^6$ Millimeter/Sekunde. Der Fall, dass zwei Körper mit solcher Geschwindigkeit sich gegen einander bewegen, ist nirgends in der Natur nachzuweisen; bei allen praktischen Anwendungen des Gesetzes pflegt man vielmehr $1/c^2 \cdot dr^2/dt^2$ immer als einen sehr kleinen Bruch anzunehmen, was Beachtung verdient.

Denn nach Helmholtz, a. a. O. Seite 7, widerspricht ein Gesetz dem Gesetze von der *Erhaltung der Kraft*, wenn zwei Theilchen, die sich demselben gemäss bewegen und mit *endlicher* Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander *unendliche lebendige Kraft* erreichen und also eine unendlich grosse Arbeit leisten können.

Es scheint hierin der Satz ausgesprochen zu sein, dass nach dem Gesetz der Erhaltung der Kraft zwei Theilchen überhaupt niemals unendliche lebendige Kraft besitzen können.

Denn man würde offenbar obigen Ausspruch auch umkehren und sagen können:

Ein Gesetz widerspricht dem Gesetze der Erhaltung der Kraft wenn zwei Theilchen, die sich demselben gemäss bewegen und mit *unendlicher* Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander *endliche* lebendige Kraft erreichen und also einen unendlich grossen Verlust an Arbeit, die sie leisten können, erleiden.

Die beiden Theilchen müssten also immer unendliche Geschwindigkeit behalten, denn haben sie dieselbe in keiner noch so grossen endlichen Entfernung verloren, so werden sie dieselbe, nach der Natur der Potentiale, auch darüber hinaus niemals verlieren. Körper aber, die sich immer mit unendlicher Geschwindigkeit gegen einander bewegen, sind vom Bereich unserer Forschungen ausgeschlossen.

Besitzen aber zwei Theilchen immer nur endliche lebendige Kraft, so muss es einen endlichen Grenzwerth der lebendigen Kraft geben, den sie niemals überschreiten. Es ist dann möglich, dass dieser Grenzwerth für zwei elektrische Theilchen e und $e' = ee'/\varrho$ ist, d. h. dass das Quadrat der Geschwindigkeit, mit der sich beide Theilchen gegen einander bewegen, nicht grösser als c^2 sein könne.

Der von Helmholtz gerügte Widerspruch würde hiernach nicht

in dem Gesetze liegen, sondern in seiner Annahme, wonach die beiden Theilchen mit einer Geschwindigkeit begönnen, deren Quadrat $dr^2/dt^2 > c^2$ wäre.

Wird eine solche Grenzbestimmung der lebendigen Kräfte im *Gesetze der Erhaltung der Kraft* nach Helmholtz mit aufgenommen, so kann sie *in dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung*, Art. 4, ebenso gut mit aufgenommen werden, indem man die dort mit U bezeichnete *Arbeit*, ebenso wie die mit x bezeichnete *lebendige Kraft* (im Gesetze $U + x = ee'/\varrho$), *beide als ihrer Natur nach positive Grössen* betrachtet.

Zweitens ist zu bemerken, dass jene beiden elektrischen Theilchen zwar in endlicher Entfernung von einander unendliche lebendige Kraft erreichen; diese endliche Entfernung ist aber $\varrho = [2ee'/c^2]\,(1/\varepsilon + 1/\varepsilon')$, eine nach unseren Maassen *unangebbar kleine Entfernung*, aus gleichen Gründen, aus denen die elektrischen Massen ε und ε' selbst nach unseren Maassen unangebbar sind. Diese Entfernung ist daher Art. 9 als eine *Molekularentfernung* bezeichnet worden.

Die *Theorie der Molekularbewegungen* bedarf jedenfalls einer besonderen Entwickelung, an der es überall noch fehlt; so lange aber, als eine solche Theorie von den mechanischen Untersuchungen noch ausgeschlossen bleibt, haben alle Zweifel an *physischer Zulässigkeit*, die sich auf das Bereich der *Molekularbewegungen* beziehen, keine Berechtigung.

Drittens möge bemerkt werden, dass derselbe Einwand, dass nämlich zwei Theilchen, die mit endlicher Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander unendliche lebendige Kraft erreichen, auch das Gravitationsgesetz trifft, wenn man die Massen ponderabler Theilchen *in Punkten koncentrirt* annimmt. Beseitigt man aber diesen Einwand beim Gravitationsgesetze dadurch, dass man die Massen auch der kleinsten Theilchen als einen *Raum erfüllend* sich vorstellt, so wird man dasselbe auch bei elektrischen Theilchen thun müssen, wo sich dann auch ergiebt, dass nur ein verschwindend kleiner Theil eines solchen Theilchens in einem bestimmten Augenblicke zur Entfernung ϱ gelangt; ein anderer verschwindend kleiner Theil, der schon im Augenblicke vorher zur Entfernung ϱ gelangt war, würde die unendlich grosse Näherungsgeschwindigkeit mit unendlich grosser Entfernungsgeschwindigkeit vertauscht haben. Sind aber diese verschwindenden Theile kleinster Theilchen fest an einander gekettet, so dürfte von solchen unendlichen Geschwindigkeiten gar keine Rede sein.

Auch Weltkörper können ihre Bewegung unter physisch zulässigen Verhältnissen beginnen und können, indem sie sich nach dem Gravitationsgesetze weiter bewegen, in physisch unzulässige Verhältnisse gerathen, die nur durch Mitwirkung *der auf Molekularentfernungen*

beschränkten Molekularkräfte beseitigt werden. Ein Absehen von dieser Mitwirkung ist streng genommen nur temporär gestattet, so lange nämlich die Verhältnisse so beschaffen sind, dass ihr Einfluss entweder Null ist oder als verschwindend klein betrachtet werden darf. Ebenso wenig aber, wie daraus ein Einwand gegen das Gravitationsgesetz entnommen wird, dürfte aus den physisch unzulässigen Verhältnissen, zu denen das Grundgesetz der elektrischen Wirkung nach Helmholtz führt, ein Einwand gegen dieses Gesetz sich ergeben, wenn man beachtet, dass diese unzulässigen Verhältnisse nur an gewisse Molekularentfernungen gebunden sind.

IX.

Ueber das Aequivalent lebendiger Kräfte.

Von

Wilhelm Weber.

[Annalen der Physik und Chemie, Jubelband dem Herausgeber J. C. Poggendorff gewidmet, Leipzig 1874, p. 199—213.]

Im 73., 82. und 99. Bande der Annalen[1]) ist schon über einige frühere Abhandlungen meiner elektrodynamischen Maassbestimmungen berichtet worden; hier soll nur noch der Hauptgegenstand der letzten dieser Abhandlungen näher erörtert werden, nämlich der Zusammenhang des aufgestellten Grundgesetzes der elektrischen Wirkung mit dem Principe der Erhaltung der Energie und mit dem durch dasselbe gegebenen Aequivalente lebendiger Kräfte.

Was die gegen das erwähnte Grundgesetz der elektrischen Wirkung erhobenen Einwendungen betrifft, muss ich wegen mangelnden Raums mich hier auf folgende allgemeine Bemerkung beschränken.

Die neueren *mathematischen* Untersuchungen über Elektricität haben vorzugsweise die *Fernwirkungen* betroffen und haben sich daher, abgesehen von der Elektrostatik, meist an die *Integral-* und *Elementargesetze*, im Gegensatz zum Punktgesetze, nach der Neumann'schen Benennung, gehalten; vom *physikalischen* Standpunkte dagegen sind die Wirkungen der Elektricität auf die von ihr durchströmten Körper, nämlich die *Wärmewirkungen* und die *chemischen*, von solcher Wichtigkeit und Bedeutung geworden, dass der *Physiker* nicht umhin kann, seine Aufmerksamkeit auch dem *Punktgesetze* zuzuwenden, welches allein zur Einsicht in den inneren Zusammenhang von Elektricität und Wärme, sowie zur Einsicht in die innere Mechanik chemischer Processe den Weg bahnen kann.

Diese Wärmewirkungen und die chemischen sind es vor Allem, welche dazu nöthigen, den Körpern überhaupt *molekulare Konstitution* zuzuschreiben. Bei molekularer Konstitution ist aber jedes Molekule, gleich einem Weltkörper, eine bewegte Welt für sich, von deren inneren

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 215, 276, 597.]

Verhältnissen und Bewegungen direkt nichts beobachtet wird. Diese inneren Verhältnisse und Bewegungen spielen aber eine grosse Rolle bei allen Wärme- und chemischen Processen, so dass *molekulare Konstitution der Körper* anzunehmen in der *mechanischen Wärmetheorie* sowohl wie in der *chemischen Atomenlehre* zur Nothwendigkeit geworden ist.

Bei *molekularer Konstitution der Körper* kann aber, wie man leicht sieht, von beliebiger Massenvertheilung nicht die Rede sein; denn die Atomenmassen in den Molekulen sind Massen von *gegebener Grösse*, die stets *gesondert* bleiben; sie sind ursprünglich in bestimmten Entfernungen von einander und in bestimmten Bewegungen gegen einander gewesen, und sind stets in solcher Wechselwirkung geblieben, dass sie gesondert und entfernt von einander erhalten wurden. Dass bei solchen Atomen *manche sonst denkbare Massenanhäufungen* gar nicht Statt finden und willkürliche Annahmen über solche Massenanhäufungen zu Widersprüchen führen können, lässt sich gewiss leicht begreifen, wenn darüber auch Näheres und Genaueres weder bestimmt worden ist noch bestimmt werden kann, auch wenn alle Gesetze der Wechselwirkung der Atome bekannt wären, so lange nämlich als das Problem der drei Körper nicht gelöst ist; denn die Kenntniss der Bewegungsgesetze *zweier* wechselseitig auf einander wirkender Körper genügt hierzu nicht.

Die oben erwähnten Einwendungen müssen daher, wenn sie auch sonst begründet sein sollten, doch einstweilen dahin gestellt bleiben, weil die Frage nicht entschieden werden kann, ob die Schuld der gerügten Widersprüche in dem angefochtenen Grundgesetze oder nicht vielmehr in den bei Bestreitung desselben willkürlich angenommenen Massenanhäufungen zu suchen sei.

1.

Princip der Erhaltung der Energie.

Schon aus dem Gesetze der Beharrung hatte sich der Satz ergeben: *wenn auf einen Körper keine Einwirkung von aussen Statt findet, so bleibt seine lebendige Kraft unverändert.*

Hieran schloss sich der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft, nämlich: *wenn auf ein Körpersystem keine Einwirkung von aussen Statt findet, so ist die Summe seiner lebendigen Kräfte in allen denjenigen Zeitmomenten gleich gross, in welchen die gegenseitige Lage der Systemkörper gleich ist.*

Dieser Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft wurde endlich zum Gesetz der Erhaltung der Energie erweitert, nämlich: *wenn auf ein Körpersystem keine Einwirkung von aussen Statt findet, so ist in*

solchen Zeitmomenten, wo die gegenseitige Lage der Systemkörper verschieden ist, zwar nicht die Summe der lebendigen Kräfte allein, aber diese Summe sammt der Arbeit, welche in Folge der Wechselwirkung der Systemkörper bei Versetzung derselben in unendliche Entfernungen von einander geleistet werden würde, gleich gross. Man hat jene Summe der lebendigen Kräfte die *Bewegungsenergie*, diese Arbeit die *Potentialenergie* des Körpersystems genannt, deren Summe beim Ausschluss äusserer Einwirkung immer gleich bleibt.

In diesem eben ausgesprochenen Gesetze der Erhaltung der Energie sind aber, wie man sieht, verschiedenartige Principien enthalten und mit einander verbunden, die besser von einander gesondert werden, nämlich *erstens* Principien, welche Eigenschaften einzelner Körper oder Körpertheilchen, *zweitens* Principien, welche Eigenschaften von Körperpaaren betreffen.

2.

Unterscheidung der Eigenschaften eines einzelnen Körpers oder Körpertheilchens und eines Paares.

1. *Jedem Körper oder Körpertheilchen* (jedem physischen Punkte oder Atome), für sich allein betrachtet, kommen Eigenschaften zu, durch welche sein Verhalten im Raume und in der Zeit vollständig bestimmt ist, wenn sein Verhalten in irgend einem Augenblicke und alle von diesem Augenblicke an auf ihn wirkenden Kräfte gegeben sind. Diese Eigenschaften der einzelnen Körpertheilchen sind *Beharrung* und *Masse*, und es giebt zwischen verschiedenen Körpertheilchen, in Beziehung auf die ihnen einzeln zukommenden Eigenschaften, keinen anderen Unterschied als den der Grösse ihrer Masse.

2. *Jedem Paare von Körpertheilchen* kommen Eigenschaften zu, die ganz unabhängig sind von den Eigenschaften der einzelnen Körpertheilchen. In diesen Eigenschaften der *Paare* liegt der Grund davon, dass bei jeder Aenderung der Entfernung beider Theilchen von einander *Arbeit* verrichtet wird. Es liegt nämlich in den Eigenschaften jeden *Paares* der Grund einer wechselseitigen Abstossungs- oder Anziehungskraft, welche mit der Entfernungsänderung der beiden Theilchen multiplicirt die vom *Paare* verrichtete *Arbeit* giebt.

3. Einem Systeme von *drei* oder mehreren Körpertheilchen kommen *keine* Eigenschaften zu, welche in den Eigenschaften der einzelnen Theilchen und Paare nicht schon enthalten wären.

Diese Beschränkung des Wesens der Körper auf Eigenschaften der *einzelnen Theilchen* und *Paare* führt zu dem wichtigen Resultate, dass die Erforschung der alle Körper umfassenden Naturprocesse sich sehr

vereinfachen lässt durch Zerlegung in die Processe der einzelnen Paare, die unabhängig von einander betrachtet werden können. Die Betrachtung der alle Körper umfassenden Naturprocesse würde keiner solchen Zerlegung fähig sein, wenn besondere Eigenschaften an der *Gesammtheit vieler Körper* hafteten, die in den Eigenschaften der *einzelnen Körper* und *Körperpaare* nicht schon enthalten wären. Es ist jedenfalls sehr wichtig, dass alle für die Betrachtung der allgemeinen Naturprocesse wesentlichen Elemente in den Eigenschaften der *einzelnen Körper* und *Körperpaare* schon vollständig enthalten sind.

3.

Merkmale eines Grundgesetzes der Wechselwirkung.

Nachdem in der *allgemeinen Mechanik* die Eigenschaften der *einzelnen* Körpertheilchen vollständig bestimmt worden sind, hat die *Physik* wesentlich nur noch die jedem *Paare von Körpertheilchen* zukommenden Eigenschaften zu bestimmen. Bei dieser Bestimmung braucht nichts weiter in Betracht gezogen zu werden, als die *Beschaffenheit* und die *gegenseitigen Verhältnisse* der ein Paar bildenden Theilchen, und die unter diesen Verhältnissen *aus ihrer Wechselwirkung bei jeder Entfernungsänderung entspringende Arbeit.* Die *Verhältnisse* dieser beiden Theilchen sind durch ihren *Abstand* und durch die *Geschwindigkeit der Abstandsänderung* gegeben. — Das zu einer vollständigen Bestimmung der Lage und Bewegungen der Theilchen erforderliche im Raume gegebene feste *Koordinatensystem* ist zur Bestimmung jenes Abstands und dessen Aenderung nicht nöthig und kommt daher hier gar nicht in Betracht; es müssen also die *Grundgesetze der Wechselwirkung der Körper*, welche sich aus den jedem *Paare* zukommenden Eigenschaften ergeben, ohne Hülfe von Raumkoordinaten dargestellt werden können.

Für die so darzustellenden *Grundgesetze der Wechselwirkung der Körper* kommen hiernach als veränderliche Grössen nur die *relative Entfernung* r der beiden Theilchen, ihre *relative Geschwindigkeit* dr/dt und Funktionen dieser beiden Grössen in Betracht; Funktionen der Raumkoordinaten werden nicht gebraucht.

Diesen Anforderungen an ein Grundgesetz der Wechselwirkung der Körper entspricht nun keiner von den Art. 1 angeführten Sätzen, auch nicht der letzte, nämlich der unter dem Namen des Princips der Erhaltung der Energie aufgestellte Satz, weil es sich darin nicht blos um die Eigenschaften eines Körperpaares, sondern allgemein um Eigenschaften eines Körpersystems (eines Systems von Körperpaaren) handelt, und zwar um eine Eigenschaft, welche diesem Systeme nicht immer, sondern nur

so lange, als keine Einwirkung von aussen Statt findet, zukommt; ferner weil die Summe, welche nach jenem Satze gleich bleiben soll, ihrem Wesen nach eine Funktion der Raumkoordinaten x, y, z ist.

4.

Zwei Arten von Aequivalenten einer lebendigen Kraft.

Einem Paare von zwei Theilchen ε und ε', die mit der Geschwindigkeit dr/dt von einander sich entfernen oder nähern, gehört eine *relative lebendige Kraft* zu, welche durch das Produkt des Quadrats dr^2/dt^2 in einen von den Massen ε und ε' abhängigen Faktor, nämlich $[1/2]\,[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon+\varepsilon')]$, bestimmt ist. — Die mittlere (ihrem Schwerpunkte zukommende) *absolute* lebendige Kraft des Paares, nämlich $[1/2]\big([(\varepsilon a+\varepsilon' a')^2/(\varepsilon+\varepsilon')]+(\varepsilon+\varepsilon')\,\gamma^2\big)$, worin a und a' die Geschwindigkeiten der beiden Theilchen in der Richtung r, und γ die Geschwindigkeit des Schwerpunkts senkrecht gegen r bezeichnet, und die von der Bewegung der Theilchen *um einander* herrührende lebendige Kraft, nämlich $[1/2]\,[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon+\varepsilon')]\,[ds^2/dt^2]$, worin $[ds/dt]$ die Geschwindigkeit darstellt, mit welcher die beiden Theilchen in der Richtung senkrecht gegen r sich einander entgegen bewegen, brauchen hier nicht berücksichtigt zu werden.

Diese dem Systeme beider Theilchen zugehörige *relative lebendige Kraft* ändert sich aber mit der Zeit, indem bald ein Theil davon verloren geht, bald ein neuer Theil hinzukommt. Eine solche Veränderung findet aber nicht Statt, ohne dass etwas Anderes gleichzeitig verändert wird, und wenn dieses Andere wieder hergestellt wird, stellt sich auch jener verlorene Theil der lebendigen Kraft wieder her. Man sagt, dass der in der Zwischenzeit verloren gegangene Theil der lebendigen Kraft durch etwas Anderes vertreten worden sei und bezeichnet dieses Andere als ein *Aequivalent* des verloren gegangenen Theils der lebendigen Kraft.

Es ist eine Hauptaufgabe der physikalischen Forschung geworden, *Gesetze für dieses Aequivalent* aufzustellen, wonach es aus *messbaren Grössen* bestimmt werden kann.

Dieses *Aequivalent* kann nun *entweder* auch eine Körperbewegung sein, *oder* nicht. Im *ersteren* Falle würde das Aequivalent ebenfalls eine lebendige Kraft sein, wie die von ihm vertretene, und würde sich von letzterer nur dadurch unterscheiden, dass sie anderen Paaren von Körpertheilchen zugehörte, wobei es zugleich geschehen könnte, dass sie als Bewegung für uns unwahrnehmbar würde, wie die Wärme. In allen diesen Fällen, wo das Aequivalent der verloren gegangenen lebendigen Kraft auch eine lebendige Kraft ist und zwar von gleicher Grösse, bleibt die Summe der lebendigen Kräfte unverändert und es handelt

sich blos um eine veränderte Vertheilung derselben, wovon der Grund in den Gesetzen der Fortpflanzung der Bewegung zu suchen ist.

Ganz verschieden davon ist der *andere* Fall, wo an die Stelle der verloren gegangenen lebendigen Kraft unmittelbar keine lebendige Kraft, sondern etwas Anderes, von lebendiger Kraft verschiedenes, tritt. Die Erforschung dieser letzteren Art von Aequivalenten verloren gegangener Theile der relativen lebendigen Kraft zweier Körpertheilchen bedarf vorzugsweise einer genaueren Untersuchung, sowohl was ihr *Wesen* als auch was die Gesetze ihrer Bestimmung aus anderen *messbaren Grössen* betrifft.

5.

Aequivalent der zweiten Art.

1. *Lebendige Kraft* ist etwas wirklich *Vorhandenes* und zwar stets *Positives*, ebenso wie *Masse*. Hieraus folgt, dass das *Potential von Kräften*, z. B. von elektrischen Kräften, was bald positiv, bald negativ ist, *kein Aequivalent lebendiger Kraft* in eigentlichem Sinne sein könne. Auch ist das Potential nichts wirklich *Vorhandenes*; denn es ist diejenige Arbeit, welche verrichtet werden würde, wenn die beiden Theilchen aus unendlicher Entfernung in die Entfernung r gebracht würden. Könnte man nun auch statt der Arbeit, die verrichtet werden würde, in der vom Potential gegebenen Definition die Arbeit setzen, welche bei Versetzung der beiden Theilchen aus unendlicher Entfernung in die Entfernung r *verrichtet worden wäre*, so bestände *diese Arbeit* selbst doch entweder in einer Aenderung der *relativen lebendigen Kraft beider Theilchen* oder in der *Aufhebung anderer Arbeit.* Eine *aufgehobene Arbeit* ist aber auch nichts wirklich Vorhandenes, so wenig wie eine aufgehobene Kraft. Und eine *Aenderung der lebendigen Kraft* ist als Theil schon in der vorhandenen lebendigen Kraft enthalten und kann daher neben der vorhandenen lebendigen Kraft nicht noch besonders als vorhanden in Rechnung gebracht werden.

2. Dennoch könnte eine solche blos *gedachte Arbeit*, wie das Potential ist, welche verrichtet werden würde, wenn die beiden Theilchen *aus einer endlichen Entfernung in eine unendliche* oder umgekehrt gebracht würden, als *Definition und Grössenwerth* von etwas wirklich *Vorhandenem* dienen, nämlich als Definition einer wirklich vorhandenen *Eigenschaft*, welche dem Systeme der beiden Theilchen zugehörte; nur dürfte in der Definition einer solchen Eigenschaft die *vorhandene* Entfernung r nicht als diejenige endliche Entfernung genommen werden, von welcher die beiden Theilchen in unendliche Entfernung zu bringen seien, vielmehr müsste jene endliche Entfernung *ganz unabhängig von*

der vorhandenen Entfernung r bestimmt sein; denn es soll die Eigenschaft *für alle Werthe von r* ohne Unterschied gelten.

Als Erläuterung, wie eine solche blos *gedachte Arbeit* zur Definition einer wirklich vorhandenen Eigenschaft dienen könne, lässt sich das Beispiel *elastischer Stäbe* anführen, für welche eine ganz bestimmte endliche Entfernung der beiden Stabenden von einander durch die sogenannte *natürliche Stablänge* ϱ, *ganz unabhängig von der vorhandenen Stablänge r*, gegeben ist. Bei einem solche Stabe wird nun eine blos *gedachte Arbeit*, nämlich diejenige, welche von dem Stabe verrichtet werden würde, wenn derselbe von der doppelten zur einfachen natürlichen Länge, das ist von 2ϱ zu ϱ, gebracht würde, als *Definition und Grössenmaass* von etwas im Stabe wirklich *Vorhandenem* benutzt, nämlich von der wirklich vorhandenen Eigenschaft der *Elasticität* des Stabes.

Wird nämlich die der Stablänge r entsprechende *Spannung* mit R bezeichnet, so wird die *Elasticität* des Stabes ausgedrückt durch $\int_{2\varrho}^{\varrho} R dr$. Ebenso kann nun der Ausdruck $\int_{\varrho}^{\infty} R dr$ als Definition der oben angegebenen Eigenschaft *zweier elektrischer Theilchen* dienen, wenn R ihre Abstossungskraft in dem Augenblicke bezeichnet, wo bei der Ueberführung aus der *unabhängig von r* bestimmten endlichen Entfernung ϱ in unendliche Entfernung ihr Abstand $= r$ geworden ist. — Soll diese Eigenschaft von den beiden Theilchen allgemein gelten, so muss R Funktion der Zeit t sein, um die Abstossungskraft, welche bei gleichem Abstande zu verschiedenen Zeiten verschieden sein kann, stets richtig darzustellen. — Die durch $\int_{\varrho}^{\infty} R dr$ definirte Eigenschaft der beiden elektrischen Theilchen soll ihre *Arbeitsfähigkeit* genannt werden.

3. Da die relative lebendige Kraft zweier Theilchen etwas von der Entfernung der Theilchen r an sich ganz Unabhängiges ist, so muss das Aequivalent dieser lebendigen Kraft ebenfalls von r unabhängig sein. Wenn daher das Aequivalent, gleich dem Potentiale, durch das Integral einer Funktion von r dargestellt würde, so müsste dieses Integral ein *bestimmtes Integral* sein zwischen solchen Grenzen, welche von r ganz unabhängig wären, ganz so wie die so eben definirte Eigenschaft zweier elektrischer Theilchen, welche ihre Arbeitsfähigkeit genannt wurde.

4. Im Begriffe des Aequivalents lebendiger Kraft liegt es endlich (weil die lebendige Kraft unveränderlich ist, so lange kein Theil derselben durch ein Aequivalent ersetzt wird), dass das, nach passendem Maasse ausgedrückte, Aequivalent des verloren gegangenen Theils der

lebendigen Kraft die Ergänzung des vorhandenen Theils der lebendigen Kraft zu einer *Konstanten* bilden müsse. Durch den jedenfalls *endlichen Werth* dieser Konstanten, als der Summe zweier positiven Grössen, ist aber ein *Grenzwerth* gegeben, welcher von keiner dieser beiden Grössen, weder von der lebendigen Kraft, noch von dem Aequivalente, überschritten werden kann. Es leuchtet hieraus ein, dass überall, wo die relative lebendige Kraft zweier Theilchen über jede Grenze hinaus ins Unendliche wachsen könnte, kein Aequivalent für lebendige Kräfte existire, und also auch kein Princip der Erhaltung der Energie, für welches die Existenz eines Aequivalents lebendiger Kräfte Bedingung und Grundlage ist.

Es könnte nun aber eine durch solchen *Grenzwerth* beschränkte lebendige Kraft, oder beschränkte relative Geschwindigkeit der Körpertheilchen, mit den Principien der *allgemeinen Mechanik* zu streiten scheinen, wo alle Kräfte als gegeben betrachtet werden, ohne nach ihrem *Ursprung* zu fragen, geradeso wie auch die *anfängliche* Vertheilung der Massen und deren Geschwindigkeiten als gegeben betrachtet werden, ohne zu fragen, wie sie zu Stande gekommen. In der That, wenn in der *allgemeinen Mechanik* unter gegebenen Kräften *beliebige Kräfte* verstanden würden, so würde die Möglichkeit, jede beliebige relative Geschwindigkeit zweier Theilchen zu erzeugen, von selbst einleuchten. Diese Möglichkeit leuchtet keineswegs ein, wenn auf den *Ursprung der Kräfte* zurückgegangen wird, wie in der Physik, und alle Kräfte aus *gesetzlicher* Wechselwirkung der Körper abgeleitet werden. Hier sieht man ein, dass *principiell* einem solchen *Grenzwerthe* nichts entgegensteht, sondern dass über Vorhandensein oder Nichtvorhandensein eines solchen Grenzwerths nur aus den *Gesetzen* der Wechselwirkung der Körper selbst entschieden werden könne.

6.

Gesetz der Arbeitsfähigkeit unter der Voraussetzung, dass sie das Aequivalent der lebendigen Kraft sei.

Zu Anfang des vorigen Artikels ist auseinander gesetzt worden, dass nur eine wirklich vorhandene und positive Grösse das gesuchte Aequivalent der lebendigen Kraft sein könne. Es stellte sich danach heraus, dass das Potential zweier Theilchen $\int_{\infty}^{r} R dr$, d. i. *diejenige Arbeit*, welche verrichtet werden würde, wenn die beiden Theilchen aus unendlicher Entfernung in die vorhandene Entfernung r gebracht würden,

keine solche Grösse wäre und also nicht das gesuchte Aequivalent der lebendigen Kraft sein könne; dass dagegen $\int_{\varrho}^{\infty} R dr$, d. i. *diejenige Arbeit,* welche verrichtet werden würde, wenn beide Theilchen aus einer endlichen, von der vorhandenen Entfernung r ganz unabhängig bestimmbaren, Entfernung ϱ in unendliche Entfernung gebracht würden, wohl als *Definition einer solchen Grösse,* nämlich als Definition einer wirklich vorhandenen, dem Systeme beider Theilchen in ihrem gegenwärtigen Zustande zukommenden Eigenschaft, welche die vorhandene *Arbeitsfähigkeit* des Systems genannt wurde, dienen könne. *Diese Arbeitsfähigkeit* soll nun unter der Voraussetzung, dass sie das gesuchte *Aequivalent der lebendigen Kraft* sei, näher bestimmt werden.

Bezeichnet man diese *Arbeitsfähigkeit* zweier elektrischer Theilchen ε und ε' zu irgend einer Zeit mit U, und die *relative lebendige Kraft* dieser Theilchen zu derselben Zeit mit x, so ergiebt sich, dass die Arbeitsfähigkeit U, *als Aequivalent,* die Ergänzung der lebendigen Kraft x zu einer Konstanten a ist, also:

$$x + U = a, \text{ oder } U = a\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Setzt man nun nach Art. 4 die lebendige Kraft $x = [1/2][\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon+\varepsilon')].[dr^2/dt^2]$, und setzt für ein verschwindendes U, wo $x = a$ wird, $dr^2/dt^2 = c^2$, so erhält man:

$$U = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}c^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}\right).$$

In diesem Ausdrucke der Arbeitsfähigkeit U sind aber bekanntlich die Massen ε und ε' Grössen, welche keiner Bestimmung auf dem Wege der Messung fähig sind. Man unterscheidet daher zwei elektrische Theilchen, statt nach ihren unmessbaren Massen ε und ε', gewöhnlich nach den messbaren Kräften e^2 und e'^2, welches jedes von diesen beiden Theilchen einzeln auf ein ihm gleiches im Abstande $= 1$, *bei relativer Ruhe,* ausübt, oder vielmehr nach den Quadratwurzeln dieser Werthe e und e', welche den unmessbaren Massen proportional sind.

Um nun in dem Ausdrucke der *Arbeitsfähigkeit*

$$U = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}c^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}\right)$$

die *messbaren* Grössen e und e' für die *unmessbaren* ε und ε' einzuführen, muss man sich an den *Grenzwerth* von U für verschwindende Werthe

der Geschwindigkeit dr/dt, oder für verschwindende Werthe der lebendigen Kraft $x = [1/2]\ [\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')]\ [dr^2/dt^2]$, halten, welcher mit U_0 bezeichnet werden möge, nämlich

$$U_0 = a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}c^2.$$

Für diesen Fall findet nämlich das *elektrostatische* Gesetz Anwendung, wonach die Arbeit, welche während einer virtuellen Abstandsänderung dr verrichtet werden würde, $= [ee'/r^2]\ dr$ ist. Versteht man also unter U_0 *diejenige Arbeit*, welche in Folge dieser *elektrostatischen* Wechselwirkung verrichtet werden würde, wenn beide Theilchen aus einer endlichen, von der vorhandenen Entfernung r ganz unabhängig bestimmbaren Entfernung ϱ in unendliche Entfernung gebracht würden, so erhält man

$$U_0 = a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}c^2 = \int_\varrho^\infty \frac{ee'}{r^2}dr = \frac{ee'}{\varrho}.$$

Hieraus folgt dann *erstens*, dass es für jedes System zweier elektrischer Theilchen wirklich eine endliche, von der vorhandenen Entfernung r ganz unabhängig bestimmbare Entfernung $\varrho = ee'/a$ gebe; *zweitens* ergiebt sich, wenn man hiernach ee'/ϱ statt a in der Gleichung $U = a\ (1 - [1/c^2]\ [dr^2/dt^2])$ substituirt, *die gesuchte Arbeitsfähigkeit* oder das gesuchte *Aequivalent der lebendigen Kraft*:

$$U = \frac{ee'}{\varrho}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}\right).$$

7.

Ableitung des Potentials aus der Arbeitsfähigkeit.

Die Arbeitsfähigkeit U ist im vorhergehenden Artikel durch diejenige Arbeit definirt worden, welche verrichtet werden würde, wenn beide Theilchen aus der endlichen, von der vorhandenen Entfernung r ganz unabhängig bestimmbaren, Entfernung ϱ in unendliche Entfernung von einander gebracht würden, d. i.

$$U = \int_\varrho^\infty R dr.$$

Nun ist aber am Schlusse des vorhergehenden Artikels

$$U = \frac{ee'}{\varrho}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}\right)$$

gefunden worden, wofür auch geschrieben werden kann:

$$U = \int_{\varrho}^{\infty} \frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right) dr.$$

Hieraus folgt dann, dass die aus der Wechselwirkung beider Theilchen resultirende Abstossungskraft

$$R = \frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right)$$

ist.

Nach der Definition des Potentials V, als *derjenigen Arbeit*, welche in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen verrichtet werden würde, wenn sie aus unendlicher Entfernung in die vorhandene Entfernung r gebracht würden, ergiebt sich endlich:

$$V = \int_{\infty}^{r} R\,dr = \int_{\infty}^{r} \frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right) dr,$$

oder

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right).$$

8.

Allgemeine Anwendung.

Betrachten wir zum Schlusse die Massen m und m' zweier *beliebiger* Körpertheilchen, und ist r ihre relative Entfernung, $[1/2]\,[mm'/(m+m')]$ $[dr^2/dt^2]$ ihre relative lebendige Kraft, und findet zwischen diesen beiden Theilchen *bei relativer Ruhe* eine solche Wechselwirkung Statt, dass der virtuellen Abstandsänderung dr die Arbeit $[kmm'/r^n]\,dr$ entspricht, so ergiebt sich für diese Theilchen, unter derselben Voraussetzung über die Existenz eines Aequivalents der lebendigen Kraft, wie für die bisher betrachteten *elektrischen* Theilchen, eine *Arbeitsfähigkeit* U, nämlich:

$$U = \frac{1}{2}\frac{mm'}{m+m'}c^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}\right).$$

Wenn nun ferner für diese Theilchen die *konstante Summe* der lebendigen Kraft und Arbeitsfähigkeit, d. i. $[1/2]\,[mm'/(m+m')]\,c^2$, dem *Grenzwerthe* der Arbeitsfähigkeit für verschwindende lebendige Kraft, wo das für *relative Ruhe* geltende Gesetz der Wechselwirkung Anwendung findet, gleichgesetzt wird, d. i. wenn

$$\frac{1}{2}\frac{mm'}{m+m'}c^2 = \int_\varrho^\infty \frac{kmm'}{r^n}\,dr = \frac{k}{n-1}\cdot\frac{mm'}{\varrho^{n-1}}$$

gesetzt wird, so erhält man

$$U = \frac{k}{n-1}\cdot\frac{mm'}{\varrho^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}\right),$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$U = k\int_\varrho^\infty \frac{mm'}{r^n}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{(n-1)\,c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right)dr.$$

Hieraus folgt die aus der Wechselwirkung der Theilchen resultirende *Abstossungskraft R* (welche *bei relativer Ruhe* der Theilchen $= kmm'/r$ angenommen wurde), für den Fall der *relativen Bewegung*, nämlich wenn die lebendige Kraft $= [1/2]\,[mm'/(m+m')]\,[dr^2/dt^2]$ ist,

$$R = \frac{kmm'}{r^n}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{(n-1)\,c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right).$$

Endlich ergiebt sich hieraus das Potential V, nämlich:

$$V = \int_\infty^r R\,dr = \int_\infty^r \frac{kmm'}{r^n}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{(n-1)c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right)dr,$$

oder

$$V = \frac{k}{n-1}\cdot\frac{mm'}{r^{n-1}}\cdot\left(\frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right).$$

X.

Ueber die Bewegungen der Elektricität in Körpern von molekularer Konstitution.

Von

Wilhelm Weber.

[Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von J. C. Poggendorff, Bd. 156, Leipzig 1875, p. 1—61.]

In meiner ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen vom Jahre 1846[1]) habe ich ein allgemeines, Elektrostatik und Elektrodynamik zugleich umfassendes Gesetz der *elektrischen Kraft* aufgestellt, und habe später einige speciellere Erörterungen folgen lassen, nämlich *erstens* über das allgemeine *Potentialgesetz* der elektrischen Kräfte, in diesen Annalen vom Jahre 1848, Bd. 73, S. 229;[2]) *zweitens* über das *Princip der Energie* und seinen Zusammenhang mit jenem allgemeinen Gesetze der elektrischen Kraft, in der letzten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen vom Jahre 1871;[3]) und *drittens* endlich über die *Arbeitsfähigkeit* je zweier elektrischer Theilchen, als Aequivalent lebendiger Kräfte, im Jubelbande dieser Annalen vom Jahre 1874, S. 199,[4]) an welche hier nun noch einige weitere Erörterungen angeschlossen werden sollen, die an letzter Stelle keinen Platz fanden. Insbesondere soll hier, nach einigen vorausgeschickten Bemerkungen und Zusätzen zu den beiden letzten Abhandlungen und über die gegen das in der ersten Abhandlung aufgestellte allgemeine Gesetz der elektrischen Kraft erhobenen Bedenken, *von den Bewegungen der Elektricität in Körpern von molekularer Konstitution* gehandelt werden, zu deren Betrachtung die Resultate so vieler anderen Forschungen führen und nöthigen, dass sie selbst zum Gegenstand eingehender besonderer Forschung zu machen, kaum mehr vermieden werden kann, trotz der engen Schranken, welche dieser Forschung von mathematischer Seite gegenwärtig noch gesetzt zu sein scheinen.

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 25.]
[2]) [Ebendaselbst, Bd. III, p. 245.]
[3]) [Ebendaselbst, Bd. IV, p. 247.]
[4]) [Ebendaselbst, Bd. IV, p. 300.]

1.

Bemerkungen zu den in der Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen vom Jahre 1871, Art. 4, aufgestellten elektrischen Grundgesetzen.

In der angeführten Abhandlung vom Jahre 1871 ist im zweiten und dritten Artikel das *Gesetz der elektrischen Kraft*, welches in der Abhandlung vom Jahre 1846 aufgestellt worden war, betrachtet und in Beziehung auf seine Zusammensetzung mit dem weit einfacheren, in diesen Annalen Bd. 73, S. 229 aufgestellten *Gesetze des elektrischen Potentials* verglichen worden. Da aber auch diesem letzteren Gesetze diejenige Einfachheit noch fehlt, welche von einem *Grundgesetze* verlangt wird, so ist im vierten Artikel derselben Abhandlung dieses Potentialgesetz genauer zu analysiren und in solche Bestandtheile, welche die Einfachheit von Grundgesetzen besässen, aufzulösen versucht worden, nämlich in das Gesetz der Abhängigkeit des Potentials zweier Theilchen von ihrer Entfernung *bei gleicher relativer Bewegung*, und in das Gesetz der Abhängigkeit des Potentials von der relativen Bewegung *bei einer bestimmten Entfernung*, wobei aber zur Bestimmung dieser Entfernung noch ein drittes Gesetz wesentlich erforderlich war, nämlich das *Gesetz der Elektrostatik*, welches aber die von einem Grundgesetze verlangte Einfachheit selbst schon besitzt.

Die hiernach im vierten Artikel aufgestellten *elektrischen Grundgesetze, mit Einschluss des elektrostatischen*, sind folgende *drei:*

Erstes Gesetz. Zwei elektrische Massentheilchen ε und ε' in der Entfernung r üben bei relativer Ruhe eine dem Produkte ihrer Massen $\varepsilon\varepsilon'$ direkt, dem Quadrate ihrer Entfernung r^2 umgekehrt proportionale Kraft in der Richtung r auf einander aus $= \mu^2 . [\varepsilon\varepsilon'/r^2]$. — Setzt man $\mu\varepsilon = \pm e$, $\mu\varepsilon' = \pm e'$, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Massentheilchen der positiven oder negativen Elektricität angehört, so giebt der Ausdruck der Kraft ee'/r^2, je nachdem er positiv oder negativ ist, an, ob die Kraft eine Abstossungskraft oder Anziehungskraft ist.

Zweites Gesetz. Wenn zwei elektrische Theilchen e und e' zu verschiedenen Zeiten in den Entfernungen r' und r'' in relativer Ruhe oder gleich grosser relativer Bewegung sich befinden (also gleiche relative lebendige Kraft besitzen), so verhalten sich die Arbeiten V' und V'', welche durch wechselseitige Einwirkung geleistet werden, wenn beide Theilchen aus den gegebenen Entfernungen r' und r'' in unendliche Entfernung gebracht werden, umgekehrt wie die angegebenen Entfernungen, d. h.

$$V' : V'' = r'' : r'.$$

Drittes Gesetz. Die Arbeit U, die unter Einwirkung der Kräfte, welche die Theilchen e und e' auf einander ausüben, geleistet werden würde, wenn die Theilchen aus einer *bestimmten mit ee' proportionalen Entfernung* $\varrho = ee'/a$,[1]) in der sie eine bestimmte lebendige Kraft x besitzen, in unendliche Entfernung versetzt würden, bildet zusammen mit dieser lebendigen Kraft x eine *konstante Summe*, nämlich a, d. h.

$$U + x = a.$$

Zu diesen Gesetzen ist nun *erstens* zu bemerken, dass die im dritten eingeführte Grösse U, welche mit der lebendigen Kraft x die konstante Summe a bildet, ebenso wie die beiden anderen Grössen x und a, *stets positiv* ist, sowohl wenn die beiden elektrischen Theilchen e und e' *gleichartig*, als auch wenn sie *ungleichartig* sind.

Dieser *positive* Werth resultirt aus der nach dem zweiten Gesetze sich ergebenden Gleichung $U = [r/\varrho]\,V$ (worin $V = (ee'/r)\,(1 - [1/c^2]\,[dr^2/dt^2])$ das *Potential* der beiden Theilchen e und e', und $\varrho = ee'/a$ eine *aus der Natur der Elektricität und der Theilchen e und e' bestimmbare Entfernung ist*), weil, je nachdem e und e' entweder gleichartig oder ungleichartig sind, die Grössen V und ϱ beide zugleich entweder positiv oder negativ sind, der Quotient V/ϱ also *stets positiv* bleibt. Es ist dabei zu bemerken, dass, wenn es Bedenken finden sollte, einen *negativen Werth von ϱ*, als Entfernung zweier Punkte von einander, in der Rechnung zuzulassen, wie schon in der Note zum dritten Gesetz bemerkt worden, statt $\varrho = ee'/a$, was für ungleichartige elektrische Theilchen negativ ist, $\varrho = \mu\varepsilon\,.\,\mu\varepsilon'/a$ gesetzt werden kann, was *stets positiv* ist, wo dann aber zugleich U statt der *Arbeit* $(ee'/\varrho)\,(1 - [1/c^2]\,[dr^2/dt^2])$, welche für ungleichartige Theilchen *negativ* ist, dem *absoluten Werthe* dieser Arbeit, $\pm (ee'/\varrho)\,(1 - [1/c^2]\,[dr^2/dt^2]) = \mu^2\,(\varepsilon\varepsilon'/\varrho)\,(1 - [1/c^2]\,[dr^2/dt^2])$, gleich gesetzt werden muss.

Zweitens ist zu bemerken, dass wenn, wie es hier geschehen, das Grundgesetz der Elektrostatik den elektrodynamischen hinzugefügt wird, das eine elektrodynamische Gesetz, nämlich das Gesetz der Abhängigkeit des Potentials zweier Theilchen von ihrer Entfernung *bei gleicher relativer Bewegung*, ganz wegfallen kann, weil es nämlich in den beiden anderen Gesetzen wesentlich schon enthalten ist und aus ihnen abgeleitet werden kann.

Denn aus dem *ersten* Gesetze, dem Grundgesetze der Elektrostatik, ergiebt sich das *Potential* V für $x = 0$ von den drei variablen Grössen

[1]) Statt ee' kann $\mu\varepsilon\,.\,\mu\varepsilon'$ (nämlich der *absolute Werth* von ee') gesetzt werden, wodurch erreicht wird, dass ϱ stets einen *positiven* Werth hat; nur muss alsdann auch die Arbeit U nach ihrem *absoluten Werthe* genommen werden, damit das aufgestellte Gesetz gilt.

e, e', r abhängig, und zwar drei Faktoren E, E' und R proportional, deren jeder nur *eine* dieser Grössen enthält, wonach V, für $x = 0$, durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$V = A \, . \, E E' R.$$

Aus dem *dritten* Gesetze dagegen folgt, dass das *Potential* V für $r = \varrho$ von den variablen Grössen e, e', x abhängt, und drei Faktoren E, E', X proportional ist, deren jeder nur *eine* dieser Grössen enthält, wonach V, für $r = \varrho$, durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$V = B \, . \, E E' X.$$

Hierin ist nun $E = e$, $E' = e'$, $R = 1/r$, $X = (1 - x/a)$, und ausserdem ergiebt sich der Werth der Konstanten A gleich dem Werthe von X für $x = 0$, und der Werth der Konstanten B gleich dem Werthe von R für $r = \varrho$.

Hieraus lässt sich schliessen, dass E, E', R, X, oder e, e', $1/r$, $(1 - x/a)$ stets Faktoren von V sind, und dass ausserdem nur die Möglichkeit noch eines Faktors, nämlich des Faktors $(1 + f(r, x))$, gegeben ist, worin $f(r, x)$ eine solche Funktion von r und x sein müsste, welche sowohl für $r = \varrho$ als auch für $x = o$ verschwände.

Hiernach ist also $V = E E' R X = (ee'/r)(1 - x/a)$ jedenfalls die *einfachste*, nach dem ersten und dritten Gesetze zulässige Bestimmung von V, welche sich aus diesen beiden Gesetzen ergiebt, unabhängig vom zweiten Gesetze, welches selbst vielmehr aus der nunmehr gewonnenen Bestimmung von $V = (ee'/r)(1 - x/a)$ abgeleitet werden kann. Denn aus dieser Bestimmung ergiebt sich für zwei Werthe von V, nämlich V' und V'', welche für gleichen Werth von x, aber für verschiedene Werthe von r, nämlich r' und r'', gelten, folgende Proportion:

$$V' : V'' = \frac{ee'}{r'}\left(1 - \frac{x}{a}\right) : \frac{ee'}{r''}\left(1 - \frac{x}{a}\right) = r'' : r',$$

eine mit dem zweiten Gesetze *ganz identische* Bestimmung.

Eine Komplikation des Gesetzes aber, wie durch Hinzufügung noch eines Faktors $(1 + f(r, x))$ entstehen würde, ist ohne nachgewiesene Nothwendigkeit in keiner Weise als zulässig zu erachten.

Es ergiebt sich hieraus das *Resultat*, dass statt der oben angeführten drei Grundgesetze schon deren zwei genügen, nämlich:

1. das Grundgesetz der Elektrostatik, und
2. das Princip der Energie;

denn man sieht leicht ein, dass das Grundgesetz, welches oben als *drittes* zuletzt gestellt war, das *Princip der Energie* selbst ist, dessen

Wesen darin besteht, dass die *relative lebendige Kraft* x zweier Theilchen e und e' zwar bald grösser bald kleiner ist, dass aber ausser dieser lebendigen Kraft in den beiden Theilchen auch noch ein *Aequivalent von lebendiger Kraft* vorhanden ist, welches bei jeder Vergrösserung der lebendigen Kraft eine Verminderung erleidet, und umgekehrt, so dass die *Summe jener lebendigen Kraft und des gleichzeitig vorhandenen Aequivalents einen konstanten Werth* habe, welcher mit a bezeichnet wird. Zugleich erkennt man, dass die im Ausspruche des obigen Grundgesetzes mit U bezeichnete Grösse *das ausser der lebendigen Kraft x im Theilchenpaare vorhandene Aequivalent von lebendiger Kraft ist.*

Zu einem ähnlichen Resultate, wie das hier gefundene, ist C. Neumann in seinen „Principien der Elektrodynamik", Tübingen 1868, gelangt, wonach nämlich ganz dasselbe, was hier durch das *Princip der Energie* in Verbindung mit dem Grundgesetze der Elektrostatik erreicht wird, durch das von ihm aufgestellte *Fortpflanzungsgesetz der Potentiale* in Verbindung mit dem Grundgesetze der Elektrostatik erreicht worden war. Es wird dadurch ein Zusammenhang zwischen jenem Principe der Energie und diesem Fortpflanzungsgesetze der Potentiale hergestellt, welcher zu einer Erklärung des einen aus dem anderen führen zu müssen scheint. Siehe über dieses Fortpflanzungsgesetz der Potentiale auch noch die Mathematischen Annalen Bd. I, S. 317 und die Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften XVIII, S. 103 ff.

2.

Bemerkungen zum Aufsatz im Jubelbande dieser Annalen, S. 199.[1])

Nach Unterscheidung der Eigenschaften einzelner Theilchen und der Eigenschaften von Theilchenpaaren ist in dem angeführten Aufsatze der Satz ausgesprochen worden, dass einem System von *drei* oder mehreren Theilchen keine Eigenschaften zukommen, welche in den Eigenschaften der einzelnen Theilchen und Paare nicht schon enthalten wären, und es ist demgemäss als Merkmal eines wahren *Grundgesetzes* angegeben worden, dass in demselben nichts weiter in Betracht gezogen werde, als die *Beschaffenheit* und die *gegenseitigen Verhältnisse* der ein Paar bildenden Theilchen, und die unter diesen Verhältnissen *aus ihrer Wechselwirkung bei jeder Entfernungsänderung entspringende Arbeit.* Für ein so darzustellendes *Grundgesetz* kommen hiernach als veränderliche Grössen nur die *Zeit* t, die *relative Entfernung* r der beiden Theilchen, ihre *relative Geschwindigkeit* dr/dt und Funktionen dieser Grössen in Betracht.

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. IV, p. 300.]

Dies vorausgesetzt ergiebt sich als eine an das *Princip der Energie* als Grundgesetz zu stellende Forderung, dass es von einem Theilchenpaare gelten muss unter allen Verhältnissen, unter welchen sich dasselbe befinden möge, sei es allein im Weltenraume oder seien ausser ihm beliebige andere Theilchen noch vorhanden, und dass im letzteren Falle im Ausspruche des Princips weder Beschaffenheit noch Verhältnisse anderer Theilchen in Betracht gezogen werden dürfen.

Es kann sich hiernach im *Principe der Energie* als einem Grundgesetze nur um die dem Theilchenpaare selbst und ihm ausschliesslich zugehörigen *Energien* handeln. Eine solche Energie ist die relative lebendige Kraft des Theilchenpaares, welche seine *Bewegungsenergie* heisst. Da sich nun aber diese Bewegungsenergie eines Theilchenpaares ändert, so setzt das Princip der Energie nothwendig noch die Existenz einer *anderen Energie* im Theilchenpaare voraus, damit eine *unveränderliche Energiesumme* ermöglicht werde. Und diese *andere Energie* muss sich gleichfalls ändern, und zwar in der Art, dass eine Verminderung derselben stets mit einer Vergrösserung der Bewegungsenergie verbunden ist, und umgekehrt. Das Wesen der *zweiten Energie* besteht also darin, dass in Folge jeder Verkleinerung oder Vergrösserung derselben *neue lebendige Kraft erzeugt oder vorhandene lebendige Kraft vernichtet werde.*

Lebendige Kraft wird nun aber durch Arbeit erzeugt oder vernichtet, zum Beispiel durch die aus der Wechselwirkung der beiden Theilchen selbst bei jeder Entfernungsänderung entspringende Arbeit. Die thatsächliche Existenz solcher Arbeit setzt aber ein in der Wechselwirkung der Theilchen begründetes *Arbeitsvermögen* voraus, ein Vermögen lebendige Kraft zu erzeugen oder zu vernichten, und dieses nach der Grösse der lebendigen Kraft, welche erzeugt oder vernichtet werden kann, zu bemessende *Arbeitsvermögen* ist die *zweite Energie des Theilchenpaares*, welche grösser oder kleiner ist, je nachdem die *erste Energie*, nämlich die lebendige Kraft des Theilchenpaares, kleiner oder grösser ist, so dass die *Summe beider Energien*, nämlich der *lebendigen Kraft* und des *Arbeitsvermögens* des Theilchenpaares, unverändert bleibt.

Hieraus entnehmen wir nun für die Definition des *Arbeitsvermögens als Energie*, folgende nähere Bestimmungen. *Erstens*, das Arbeitsvermögen zweier Theilchen e und e' ist eine ihnen, bei *gegebener Bewegungsenergie* (das heisst bei gegebener relativen lebendigen Kraft der Theilchen), *stets zukommende Eigenschaft.*

Zweitens, diese Eigenschaft wird ihrer Grösse nach durch die Arbeit bestimmt, welche in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen *bei einer gewissen näher zu bestimmenden Entfernungsänderung* geleistet werden würde. Diese noch *näher zu bestimmende Entfernungsänderung* ist aber keine solche, welche *wirklich* Statt fände oder Statt finden

könnte (welche nämlich mit der vorhandenen Entfernung r beginnen müsste), sondern ist eine blos *virtuelle Entfernungsänderung*, welche mit einer von der vorhandenen Entfernung r ganz unabhängig bestimmten Entfernung ϱ, in welche die Theilchen versetzt gedacht werden müssen, beginnt. Denn die bei irgend einer, mit der vorhandenen Entfernung r beginnenden, Entfernungsänderung geleistete Arbeit würde zur Bestimmung der Grösse des Arbeitsvermögens nicht dienen können, weil sie von r abhängig wäre, und daher auch *bei unveränderter relativer lebendiger Kraft der Theilchen*, mit r zugleich, verschiedene Werthe annehmen würde, während auf eine fingirte Versetzung der Theilchen in eine immer gleiche, von der vorhandenen Entfernung r unabhängig bestimmbare, Entfernung ϱ, eine Entfernungsänderung folgend gedacht werden kann, zwischen fixen Grenzen ϱ und ϱ', bei welcher in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen *eine immer gleiche Arbeit geleistet werden würde, die ihrem absoluten Werthe nach (denn positive oder negative Arbeit ist für das Arbeitsvermögen von gleicher Bedeutung) als Maass einer dem Theilchenpaare zukommenden Eigenschaft dienen kann. Es versteht sich dabei von selbst, dass bei dieser fingirten Versetzung der Theilchen aus der Entfernung r in die Entfernung ϱ die relative lebendige Kraft der Theilchen unverändert geblieben gedacht werden muss.*

Bezeichnet nun R die aus der Wechselwirkung resultirende Abstossungskraft der beiden Theilchen e und e', und $\varrho' - \varrho$ die gedachte, auf die fingirte Versetzung folgende Entfernungsänderung der Theilchen, so wird das *Arbeitsvermögen* U dieser Theilchen durch die Formel:

$$U = \pm \int_{\sigma=\varrho}^{\sigma=\varrho'} R\,d\sigma$$

dargestellt, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem die beiden Theilchen gleichartig oder ungleichartig sind.

In dieser Formel ist R eine Funktion von σ, aber nicht immer dieselbe, was nur der Fall sein würde, wenn $d\sigma/dt = 0$ wäre, wo nach elektrostatischem Gesetze $R = ee'/\sigma^2$ immer dieselbe Funktion von σ sein würde. Wenn $d\sigma/dt$ nicht Null ist, ist R eine Funktion von σ und $d\sigma/dt$, und $d\sigma/dt$ ist nicht immer dieselbe Funktion von σ, wie daraus einleuchtet, dass *erstens* die *anfänglichen Werthe* von σ und $d\sigma/dt$ beliebig gegeben sein können, wonach also für gleiche Werthe von σ sehr verschiedene Werthe von $d\sigma/dt$ gegeben sein können; und dass *zweitens* bei gleicher Entfernungsänderung die relative Geschwindigkeit $d\sigma/dt$ sehr verschiedene Aenderungen nach Verschiedenheit der *äusseren Kräfte*, welche auf die Theilchen wirken, erleiden kann.

Ist nun R eine Funktion von σ und $d\sigma/dt$, so wird auch das *unbestimmte Integral* $\int R d\sigma$ eine solche Funktion sein; aber das *bestimmte Integral* $\int\limits_{\sigma=\varrho}^{\sigma=\varrho'} R d\sigma$ wird blos vom Anfangs- und Endwerthe von σ, nämlich von ϱ und ϱ', und den diesen Werthen zugehörigen Differentialquotienten abhängen.

Soll nun das *bestimmte Integral* $\int\limits_{\sigma=\varrho}^{\sigma=\varrho'} R d\sigma$ das *Arbeitsvermögen zweier Theilchen, welche die relative Geschwindigkeit r' besitzen*, ausdrücken, so ist schon bemerkt worden, dass die in der Entfernung r vorhandene relative Geschwindigkeit r', bei der fingirten Versetzung der Theilchen in die Entfernung ϱ, unverändert erhalten gedacht werden müsse, so dass $d\sigma/dt = r'$ für $\sigma = \varrho$ gegeben ist, wodurch *die Abhängigkeit des Arbeitsvermögens U von r'* bestimmt wird.

Eine gleiche Abhängigkeit des Arbeitsvermögens U würde nun aber auch von dem Werthe von $d\sigma/dt$, welcher dem Endwerthe $\sigma = \varrho'$ zugehört, Statt finden, den Fall ausgenommen, wo $\varrho' = \infty$ ist, in welchem Falle eine solche Abhängigkeit nicht Statt zu finden braucht. Es folgt hieraus, dass $\varrho' = \infty$ gesetzt werden muss, weil die Formel U als Definition des *Arbeitsvermögens zweier die relative Geschwindigkeit r' besitzenden Theilchen* von keiner anderen relativen Geschwindigkeit abhängig sein kann als von r', nämlich derjenigen, welche die Theilchen in dem Augenblicke, in welchem ihr Arbeitsvermögen betrachtet wird, wirklich besitzen.

Das *Arbeitsvermögen U* der Theilchen e und e' wird hiernach, wenn $\varrho' = \infty$ gesetzt wird, durch die Formel ausgedrückt:

$$U = \pm \int\limits_{\sigma=\varrho}^{\sigma=\infty} R d\sigma,$$

worin R eine Funktion von σ und $d\sigma/dt$ ist, und $d\sigma/dt$ eine Funktion von σ ist, welche für $\sigma = \varrho$ den Werth r' besitzt, d. i. die relative Geschwindigkeit der Theilchen, deren Arbeitsvermögen bestimmt werden soll.

Was endlich die Grösse ϱ betrifft, so wird diese dadurch bestimmt, dass sich nur *eine endliche Entfernung zweier elektrischer Theilchen* angeben lässt, welche, ganz unabhängig von der vorhandenen Entfernung r, blos aus der Natur der Elektricität im Allgemeinen und der beiden Theilchen im Besonderen bestimmbar ist, nämlich aus der dem Theilchenpaare zukommenden unveränderlichen Energiesumme a, und aus den nach dem Grundgesetze der Elektrostatik von jedem der beiden Massen-

theilchen ε und ε' auf ein ihm gleiches Theilchen in der Entfernungseinheit ausgeübten Abstossungskräften $\mu^2\varepsilon^2$ und $\mu^2\varepsilon'^2$, nach der Formel $\varrho = \mu^2 . [\varepsilon\varepsilon'/a]$. Setzt man $\mu\varepsilon = \pm e$, $\mu\varepsilon' = \pm e'$, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Massentheilchen der positiven oder negativen Elektricität angehört, so kann ϱ, was stets positiv ist, $= \pm ee'/a$ gesetzt werden, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem die beiden Theilchen gleichartig oder ungleichartig sind.

Anmerkung. Soll in der Formel U selbst ausgedrückt werden, dass R eine Funktion von σ und $d\sigma/dt$ sei, und dass $d\sigma/dt$ eine Funktion von σ sei, welche für $\sigma = \varrho$ den Werth r' besitze, d. i. die *gegebene* relative Geschwindigkeit der Theilchen, deren *Arbeitsvermögen* bestimmt werden soll, so würde *erstens* $R(\sigma, d\sigma/dt)$ für R gesetzt werden können, *zweitens* würde für $d\sigma/dt$, um es als Funktion von σ zu bezeichnen, $f(\sigma)$ zu setzen sein, und *drittens* endlich, um diese Funktion $f(\sigma)$, welche nämlich hier für $\sigma = \varrho$ *den gegebenen Werth* r' annehmen soll, von anderen Funktionen $f(\sigma)$ zu unterscheiden, welche *den gegebenen Werth* r' für andere Werthe von σ annehmen, kann dem Funktionszeichen f *derjenige Werth von* σ, *für welchen die Funktion den gegebenen Werth annimmt*, besonders hinzugefügt werden, hier also $f_\varrho(\sigma)$ für $f(\sigma)$ geschrieben werden. Man erhält hiernach das *Arbeitsvermögen* ausgedrückt durch:

$$U = \pm \int_{\sigma=\varrho}^{\sigma=\infty} R[\sigma, f_\varrho(\sigma)]\, d\sigma,$$

und die *gegebene relative Geschwindigkeit:*

$$r' = f_\varrho(\varrho).$$

Von den beiden Theilchen, welche zum Zweck der Bestimmung ihres Arbeitsvermögens U aus der Entfernung $\sigma = r$, in welcher sie sich wirklich befinden, mit Beibehaltung der relativen Geschwindigkeit r', welche sie wirklich besitzen, in die Entfernung $\sigma = \varrho$ versetzt gedacht wurden, würde nun aber in Folge ihrer Wechselwirkung auch *bei wirklicher Versetzung aus der vorhandenen Entfernung* $\sigma = r$ bis $\sigma = \infty$ *eine Arbeit geleistet werden, welche das Potential der Theilchen genannt wird* und mit V bezeichnet zu werden pflegt. Nach der für U angegebenen Bezeichnungsweise erhält man *den Ausdruck dieses Potentials:*

$$V = \int_{\sigma=r}^{\sigma=\infty} R[\sigma, f_r(\sigma)]\, d\sigma,$$

und die *gegebene relative Geschwindigkeit:*

$$r' = f_r(r).$$

Nach der gegebenen Definition vom *Arbeitsvermögen* zweier Theilchen e und e', als *Arbeitsenergie*, wodurch zusammen mit der *relativen lebendigen Kraft als Bewegungsenergie* die Energien der beiden Theilchen e und e' vollständig bestimmt sind, und nach dem ausgesprochenen *Principe der Energie*, als dem *Gesetze der unveränderlichen Summe beider Energien,* kann nun die Aufgabe gestellt werden:

aus dem *Principe der Energie* in Verbindung mit dem *Grundgesetze der Elektrostatik* die Kraft R zu ermitteln, mit welcher zwei beliebig bewegte elektrische Theilchen e und e' wechselseitig auf einander wirken.

Denn da aus dem *Grundgesetze der Elektrostatik* die Kraft bestimmt wird, mit welcher zwei elektrische Theilchen e und e', *wenn ihre relative lebendige Kraft Null ist,* auf einander wirken, und da ferner aus dem *Princip der Energie* bestimmt wird, *was in der Wechselwirkung zweier elektrischer Theilchen e und e' geändert wird*, wenn ihre relative lebendige Kraft nicht Null, sondern $= x$ ist (dass nämlich die *Zunahme der Bewegungsenergie* der beiden Theilchen um die Grösse x mit einer *Abnahme der Arbeitsenergie* um dieselbe Grösse x verbunden ist), so scheint daraus hervorzugehen, dass aus dem *Principe der Energie in Verbindung mit dem Grundgesetze der Elektrostatik* das allgemeine, Elektrostatik und Elektrodynamik zugleich umfassende Gesetz der Kraft, mit welcher zwei elektrische Theilchen e und e' wechselseitig auf einander wirken, müsse abgeleitet werden können.

Das *Princip der Energie* giebt hierzu folgende Formeln, nämlich *erstens*, *die Formel der Bewegungsenergie* (oder relativen lebendigen Kraft) der beiden Theilchen, welche die Massen ε und ε' besitzen:

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{d\sigma^2}{dt^2},$$

woraus folgt, wenn für die vorhandene Entfernung $\sigma = r$ die relative Geschwindigkeit mit r', die relative lebendige Kraft mit x bezeichnet wird,

$$x = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot r'^2; \tag{1}$$

zweitens die Formel der Arbeitsenergie, nämlich

$$U = \pm \int_{\sigma=\varrho}^{\sigma=\infty} R\,[\sigma, f_\varrho(\sigma)]\, d\sigma, \tag{2}$$

wo $f_\varrho(\sigma) = d\sigma/dt$ eine Funktion von σ bezeichnet, welche für $\sigma = \varrho$ den gegebenen Werth r' besitzt;

und *drittens*, das *Gesetz der konstanten Energiesumme*, welches in folgender Formel ausgesprochen wird:

$$(3) \qquad x + U = a.$$

Zu diesen *drei* durch das *Princip der Energie* gegebenen Formeln kommt *viertens* die Formel für das *Grundgesetz der Elektrostatik* noch hinzu, nämlich das Gesetz der Abstossungskraft R, mit welcher zwei Theilchen e und e' bei relativer Ruhe aus der Entfernung σ auf einander wirken:

$$(4) \qquad R = \frac{ee'}{\sigma^2}.$$

Für $\xi = 0$, wo auch $x = 0$ ist, geht der Ausdruck der elektrodynamischen Kraft $R\,[\sigma, f_\varrho(\sigma)]$ in den Ausdruck der elektrostatischen Kraft $R = ee'/\sigma^2$ über, und man findet aus Gleichung (2) und Gleichung (3), für $x = 0$,

$$U = \pm \int_{\sigma=\varrho}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2}\, d\sigma = \pm \frac{ee'}{\varrho} = a.$$

Bezeichnet man ferner in Gleichung (1) den Werth von r' für $x = a = \pm ee'/\varrho$ mit c, wonach $\pm ee'/\varrho = \frac{1}{2}[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')].c^2$ erhalten wird, und substituirt den hieraus sich ergebenden Werth von $\frac{1}{2}[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')] = \pm ee'/\varrho c^2$ in Gleichung (1), so findet man

$$x = \pm \frac{ee'}{\varrho} \cdot \frac{r'^2}{c^2}.$$

Setzt man nun diesen Werth von x und den vorher gefundenen Werth von $a = \pm ee'/\varrho$ in Gleichung (3), so erhält man mit Zuziehung von Gleichung (2):

$$U = \pm \frac{ee'}{\varrho}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2}\right) = \pm \int_{\sigma=\varrho}^{\sigma=\infty} R\,[\sigma, f_\varrho(\sigma)]\, d\sigma.$$

Es ist nun identisch:

$$-d \cdot \frac{ee'}{\sigma}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{d\sigma^2}{dt^2}\right) = \frac{ee'}{\sigma^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{d\sigma^2}{dt^2} + \frac{2\sigma}{c^2}\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right) d\sigma,$$

woraus das unbestimmte Integral folgt:

$$-\frac{ee'}{\sigma}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{d\sigma^2}{dt^2}\right) = \int \frac{ee'}{\sigma^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{d\sigma^2}{dt^2} + \frac{2\sigma}{c^2}\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right) d\sigma.$$

Wird nun hierin $d\sigma/dt = f_\varrho(\sigma)$ gesetzt, was eine Funktion von σ bezeichnet, welche für $\sigma = \varrho$ den gegebenen Werth r' besitzt, so ergiebt sich:

$$-\frac{ee'}{\sigma}\left(1 - \frac{1}{c^2}[f_\varrho(\sigma)]^2\right) = \int \frac{ee'}{\sigma^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}[f_\varrho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2}\frac{d\,.\,f_\varrho(\sigma)}{dt}\right) d\sigma,$$

und wenn man dieses Integral zwischen den Grenzen $\sigma = \varrho$ und $\sigma = \infty$ nimmt, erhält man:

$$\frac{ee'}{\varrho}\left(1 - \frac{1}{c^2}[f_\varrho(\varrho)]^2\right) = \int_{\sigma=\varrho}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}[f_\varrho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2}\frac{d\,.\,f_\varrho(\sigma)}{dt}\right) d\sigma,$$

folglich, da $f_\varrho(\varrho) = r'$ und $[ee'/\varrho]\,(1 - r'^2/c^2) = \int_{\sigma=\varrho}^{\sigma=\infty} R\,[\sigma, f_\varrho(\sigma)]\,d\sigma$ ist,

$$\int_{\sigma=\varrho}^{\sigma=\infty} R\,[\sigma, f_\varrho(\sigma)]\,d\sigma = \int_{\sigma=\varrho}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}[f_\varrho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2}\frac{d\,.\,f_\varrho(\sigma)}{dt}\right) d\sigma.$$

Die einfachste Annahme, um dieser Formel zu genügen, besteht darin, dass

$$R\,[\sigma, f_\varrho(\sigma)] = \frac{ee'}{\sigma^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}[f_\varrho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2}\frac{d\,.\,f_\varrho(\sigma)}{dt}\right)$$

gesetzt wird.

Im Ausdruck für das *Arbeitsvermögen U* ist $f_\varrho(\sigma)$ für $d\sigma/dt$ gesetzt worden, um dadurch eine Funktion von σ zu bezeichnen, welche für $\sigma = \varrho$ den gegebenen Werth r' besitzt.

Im Ausdrucke des *Potentials V* würde nun ebenso $f_r(\sigma)$ für $d\sigma/dt$ zu setzen sein, um dadurch eine Funktion von σ zu bezeichnen, welche für $\sigma = r$ den gegebenen Werth r' besässe, und man würde daraus auf ähnliche Weise erhalten:

$$R\,[\sigma, f_r(\sigma)] = \frac{ee'}{\sigma^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}[f_r(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2}\cdot\frac{d\,.\,f_r(\sigma)}{dt}\right).$$

In diesem letzteren Falle, wo $\sigma = r$ und $d\sigma/dt = r'$ die wirklich vorhandene Entfernung und die wirklich vorhandene Geschwindigkeit sind, pflegt man jedoch das Funktionszeichen $f_r(\sigma)$ gar nicht zu gebrauchen, sondern $d\sigma/dt$ unverändert in der Formel stehen zu lassen. Auch kann man dann die besondere Bezeichnung der Abstossungskraft beider Theilchen als Funktion von σ und $d\sigma/dt$ durch Beifügung dieser Variablen unter dem Funktionszeichen R, nämlich $R\,(\sigma, d\sigma/dt)$ weglassen und dafür blos R setzen. Geschieht dies nun, so erhält man das all-

gemeine Gesetz der Kraft R, mit welcher zwei beliebig bewegte elektrische Theilchen e und e' wechselseitig auf einander wirken, durch folgende Formel dargestellt:

$$R = \frac{ee'}{\sigma^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{d\sigma^2}{dt^2} + \frac{2\sigma}{c^2}\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right).$$

Schliesslich soll nun von dem hier aufgestellten *Principe der Energie* noch Anwendung auf das von C. Neumann in den „Principien der Elektrodynamik", Tübingen 1868, S. 37, und in den Berichten der Königl. Sächs. Gesellschaften der Wissenschaften 1871, Art. 20, S. 399 aufgestellte Gesetz gemacht werden, dessen Uebereinstimmung mit obigem Principe besonders nachzuweisen nicht ohne Interesse sein dürfte.

Dieses Gesetz lautet nach dem von Neumann an letzterer Stelle gegebenen Ausspruche:

> „Bewegt sich ein System von beliebig vielen Theilchen $M + \mu$ unter Einwirkung gegebener äusserer Kräfte, so wird für jedes Zeitelement dt die Formel Statt finden:
>
> $$d\,(T + U^0 + U - V) = dS,$$
>
> d. h. für jeden Zeitraum wird der Zuwachs des Systems an *Energie* gleich gross sein mit der vom Systeme während dieses Zeitraums konsumirten Arbeit. Dabei ist unter der *Energie* des Systems der nur von seinem augenblicklichen Zustande (d. i. von den Koordinaten und Geschwindigkeiten) abhängende Ausdruck $T + U^0 + U - V$ zu verstehen, wo T die lebendige Kraft, U^0 das ordinäre Potential des Systems, U das elektrostatische und V das elektrodynamische bezeichnet".

Das *Arbeitsvermögen* oder die *Arbeitsenergie* U zweier elektrischer Theilchen e und e' (welche sich in irgend einer, aber bestimmten, Entfernung r von einander befinden und irgend eine, aber bestimmte, relative lebendige Kraft x besitzen) ist

$$U = \int\limits_{\sigma=\varrho}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}[f_\varrho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2}\frac{d\,.\,f_\varrho(\sigma)}{dt}\right) d\sigma$$

gefunden worden, worin $f_\varrho(\sigma) = d\sigma/dt$ eine solche Funktion von σ bezeichnet, deren Werth für $\sigma = \varrho$ durch die vorhandene lebendige Kraft x gegeben ist, nämlich durch die Gleichung:

$$\pm \frac{ee'}{\varrho c^2}[f_\varrho(\varrho)]^2 = x \quad \text{oder} \quad f_\varrho(\varrho) = c\sqrt{\pm\frac{\varrho x}{ee'}}.$$

Obiger Werth von U lässt sich nun als Summe zweier Theile darstellen, nämlich:

$$U = \int_{\sigma=\varrho}^{\sigma=r} \frac{ee'}{\sigma^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}[f_\varrho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2}\frac{d \,.\, f_\varrho(\sigma)}{dt}\right) d\sigma$$

$$+ \int_{\sigma=r}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}[f_\varrho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2}\frac{d \,.\, f_\varrho(\sigma)}{dt}\right) d\sigma.$$

Da nun hierin über die Funktion $f_\varrho(\sigma)$ im Allgemeinen weiter nichts bestimmt ist als blos ihr Werth für $\sigma = \varrho$, der sich aus der Gleichung $[\pm ee'/\varrho c^2]\ [f_\varrho(\varrho)]^2 = x$ ergiebt, nämlich $f_\varrho(\varrho) = c\sqrt{\pm \varrho x/ee'}$, so können im Allgemeinen sehr verschiedene Funktionen von σ für $f_\varrho(\sigma)$ gesetzt werden.

Wirklich genau bestimmbar würde die Funktion $f_\varrho(\sigma)$ nur dann sein, wenn es sich um eine *wirkliche Versetzung* der Theilchen e und e' handelte, wo alle Verhältnisse, von denen die Funktion $f_\varrho(\sigma)$ abhängt, wirklich gegeben wären. Von einer *wirklichen Versetzung* von ϱ bis ∞ kann aber bei Theilchen nicht die Rede sein, welche sich gar nicht in der Entfernung ϱ, sondern in der Entfernung r, befinden. Zum Zweck der Definition von U genügte es aber, sich die Versetzung der Theilchen von ϱ nach ∞ nur zu denken, nachdem man sich dieselben *vorher* von r nach ϱ versetzt gedacht hatte, und zwar in solcher Weise, dass die relative lebendige Kraft der Theilchen in der Entfernung ϱ dieselbe wieder wäre, wie sie in der Entfernung r gewesen war, nämlich $x = [\pm ee'/\varrho c^2]\ [f_\varrho(\varrho)]^2$, wodurch der Werth der Funktion $f_\varrho(\sigma)$ für $\sigma = \varrho$ bestimmt ist.

Wollte man sich nun ferner denken, dass die weitere Versetzung der Theilchen, nämlich zunächst von ϱ bis r zurück, nur unter wechselseitiger Einwirkung der Theilchen selbst, *ohne Einwirkung äusserer Kräfte*, erfolgte; so würde, da $f_\varrho(\sigma)$ für $\sigma = \varrho$ gegeben ist, nämlich $f_\varrho(\varrho) = c\sqrt{\pm \varrho x/ee'}$, der Werth von $f_\varrho(\sigma)$ für einen von ϱ verschiedenen Werth von σ, z. B. für $\sigma = r$, gefunden werden $= c\sqrt{\pm \varrho y/ee'}$, worin y durch folgende Gleichung zu bestimmen ist:

$$y - x = \int_{\sigma=\varrho}^{\sigma=r} \frac{ee'}{\sigma^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}[f_\varrho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2}\frac{d \,.\, f_\varrho(\sigma)}{dt}\right) d\sigma,$$

das heisst, die Aenderung der relativen lebendigen Kraft während der Entfernungsänderung von ϱ bis r ist der von den Kräften der Wechselwirkung auf dem zurückgelegten Wege geleisteten Arbeit gleich.

Wenn aber ausser den aus der Wechselwirkung resultirenden Kräften noch andere *äussere Kräfte* P auf die Theilchen während ihrer Entfernungsänderung wirkten und sie ebenfalls von einander zu entfernen (oder zu nähern) suchten, so würde y durch folgende Gleichung bestimmt werden:

$$y - x = \int_{\sigma=\varrho}^{\sigma=r} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\varrho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d \, . \, f_\varrho(\sigma)}{dt}\right) d\sigma + S,$$

wenn $S = \int_{\sigma=\varrho}^{\sigma=r} P d\sigma$ die von den *äusseren Kräften* geleistete Arbeit bezeichnet.

Unter allen hiernach denkbaren Fällen befindet sich nun auch derjenige Fall, wo für den Werth $\sigma = r$, welcher der wirklichen Entfernung der die relative lebendige Kraft x besitzenden Theilchen, wofür U gesucht wird, gleich ist,

$$\int_{\sigma=\varrho}^{\sigma=r} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\varrho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d f_\varrho(\sigma)}{dt}\right) d\sigma + S = 0,$$

also $y = x$ ist. Dies bedeutet, dass die lebendige Kraft der beiden Theilchen am Ende der Entfernungsänderung der am Anfange nur dann gleich sein kann, wenn die während der Entfernungsänderung von den *Kräften der Wechselwirkung* geleistete Arbeit durch die von den *äusseren Kräften* geleistete Arbeit aufgehoben wird.

Ist nun aber die mit y bezeichnete relative lebendige Kraft der beiden Theilchen für die Entfernung $\sigma = r$, *am Ende* der im Integrale

$$\int_{\sigma=\varrho}^{\sigma=r} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\varrho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d f_\varrho(\sigma)}{dt}\right) d\sigma$$

angegebenen Entfernungsänderung, dieselbe wie *am Anfang*, nämlich $= x$, so leuchtet ein, dass derselbe Werth der lebendigen Kraft x auch für die Entfernung $\sigma = r$, *zu Anfang* der im Integrale

$$\int_{\sigma=r}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\varrho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d f_\varrho(\sigma)}{dt}\right) d\sigma$$

angegebenen weiteren Entfernungsänderung von r bis ∞ gilt. Hieraus leuchtet aber ein, dass der Unterschied der Funktionen $f_\varrho(\sigma)$ und $f_r(\sigma)$ verschwindet und

$$\int_{\sigma=r}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\varrho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d f_\varrho(\sigma)}{dt}\right) d\sigma$$

dieselbe Arbeit bezeichnet wie

$$\int\limits_{\sigma=r}^{\sigma=\infty}\frac{ee'}{\sigma^2}\left(1-\frac{1}{c^2}[f_r(\sigma)]^2+\frac{2\sigma}{c^2}\frac{df_r(\sigma)}{dt}\right)d\sigma,$$

nämlich diejenige Arbeit, welche in Folge der Wechselwirkung der Theilchen, welche die angegebene lebendige Kraft x besitzen, bei einer Entfernungsänderung von r bis ∞ geleistet werden würde. Es ist also

$$\int\limits_{\sigma=r}^{\sigma=\infty}\frac{ee'}{\sigma^2}\left(1-\frac{1}{c^2}[f_\varrho(\sigma)]^2+\frac{2\sigma}{c^2}\frac{df_\varrho(\sigma)}{dt}\right)d\sigma$$
$$=\int\limits_{\sigma=r}^{\sigma=\infty}\frac{ee'}{\sigma^2}\left(1-\frac{1}{c^2}[f_r(\sigma)]^2+\frac{2\sigma}{c^2}\frac{df_r(\sigma)}{dt}\right)d\sigma=V.$$

Hiernach kann nun also der erste Theil von U, nämlich:

$$\int\limits_{\sigma=\varrho}^{\sigma=r}\frac{ee'}{\sigma^2}\left(1-\frac{1}{c^2}[f_\varrho(\sigma)]^2+\frac{2\sigma}{c^2}\frac{df_\varrho(\sigma)}{dt}\right)d\sigma=-S,$$

und der zweite Theil von U, nämlich:

$$\int\limits_{\sigma=r}^{\sigma=\infty}\frac{ee'}{\sigma^2}\left(1-\frac{1}{c^2}[f_\varrho(\sigma)]^2+\frac{2\sigma}{c^2}\frac{df_\varrho(\sigma)}{dt}\right)d\sigma=V$$

gesetzt werden, woraus sich ergiebt:

$$U=V-S,$$

und substituirt man diesen Werth in der Gleichung

$$U+x=a,$$

so erhält man folgende Gleichung:

$$V+x-S=a.$$

Für dieselben Theilchen, wenn sie in der Entfernung r_1 sich befinden, und die relative Kraft x_1 besitzen, ergiebt sich auf dieselbe Weise folgende Gleichung:

$$V_1+x_1-S_1=a,$$

woraus für kleine Werthe von $r - r_1$ und $x - x_1$ die Differentialgleichung erhalten wird:

$$dV + dx - dS = 0,$$

was dieselbe Gleichung ist, welche von NEUMANN a. a. O. aufgestellt worden ist. Nur hat NEUMANN die lebendige Kraft mit T, und das Potential, als aus einem elektrostatischen und einem elektrodynamischen Theile zusammengesetzt, mit $U - V$ bezeichnet, und hat endlich für den Fall, wo an den elektrischen Theilchen ponderable Massen hafteten, noch das aus der Wechselwirkung dieser ponderablen Massen resultirende Potential U^0 hinzugefügt, wonach er dasselbe Gesetz in folgender Gleichung ausgesprochen hat:

$$d(T + U^0 + U - V) = dS.$$

3.

Ueber die gegen das Grundgesetz der elektrischen Wirkung erhobenen Bedenken.

Wird das Grundgesetz der elektrischen Wirkung, wonach aus der Wechselwirkung zweier elektrischer Theilchen e und e' (in elektrostatischen Einheiten ausgedrückt) die Abstossungskraft

$$R = [ee'/r^2]\,(1 - [1/c^2]\,[dr^2/dt^2] + [2r/c^2]\,[d^2r/dt^2])$$

resultirt, in dem hier entwickelten Zusammenhange mit dem Principe der Energie betrachtet, so leuchtet ein, dass bei allen Anwendungen, die von jenem Gesetze gemacht werden sollen, um aus den *anfänglichen Verhältnissen* der Theilchen ihr späteres Verhalten zu bestimmen, diese *anfänglichen Verhältnisse* nicht ganz willkürlich angenommen werden dürfen. Sie dürfen nicht so angenommen werden, dass in ihnen selbst schon Widersprüche mit dem zu Grunde gelegten Principe enthalten wären, was zum Beispiel der Fall sein würde, wenn zwei elektrischen Theilchen eine solche *anfängliche relative lebendige Kraft* zugeschrieben würde, die für sich allein schon grösser wäre, als die ganze nach jenem Principe unveränderliche Energiesumme der Theilchen.

Durch Annahme solcher in Widerspruch mit dem aufgestellten Principe stehender *anfänglicher Verhältnisse* kann man allerdings zu Folgerungen gelangen, deren Zulässigkeit mit Recht beanstandet werden darf, wodurch das Gesetz widerlegt erscheinen könnte, was jedoch wirklich nicht der Fall ist. Hierauf lassen sich einige von HELMHOLTZ gegen das obige Gesetz erhobene Bedenken zurückführen. Zum Beispiel ist HELMHOLTZ zu der Folgerung aus dem obigen Gesetze gelangt, dass zwei Theilchen, mit anfänglicher zwar endlicher relativen Geschwindigkeit,

die aber grösser als c wäre (woraus sich die relative lebendige Kraft der Theilchen grösser als die ganze dem Principe nach unveränderliche Energiesumme ergiebt), während einer endlichen Entfernungsänderung eine unendliche lebendige Kraft erreichen und also unendlich grosse Arbeit leisten würden. Auch die Möglichkeit eines *perpetuum mobile* würde daraus gefolgert werden können.

Diese Folgerungen fallen nun allerdings von selbst weg, wenn nach dem aufgestellten Principe mit *jeder Energie* der Begriff einer *wesentlich positiven Grösse* verbunden wird, und alle zusammen genommen eine *endliche und unveränderliche Summe* bilden; aber sogar dann, wenn man einer Energie negative und ins Unendliche wachsende Werthe beizulegen für zulässig hielte, würden jene Folgerungen doch nicht nothwendig zur Verwerfung des obigen Gesetzes führen, weil nämlich alsdann der Grund, diese Folgerungen für unzulässig zu erklären, nicht mehr vorhanden wäre. Denn es leuchtet ein, dass, wenn *eine Energie* negativ wäre und *negativ unendlich* würde, eine *andere Energie* zugleich vorhanden sein müsste, welche positiv wäre und positiv unendlich würde. Wäre nun diese ins Unendliche wachsende Energie die *Bewegungsenergie*, so wäre eine unerschöpfliche Quelle *lebendiger Kraft* gegeben, womit alle jene von Helmholtz für unzulässig erklärten Wirkungen würden hervorgebracht werden können.

An die soeben betrachteten Einwürfe gegen das Grundgesetz der elektrischen Wirkung, welche darauf beruhen, dass das aufgestellte Princip der Energie nicht anerkannt wird, und dass in Widerspruch damit stehende anfängliche Verhältnisse der elektrischen Theilchen angenommen werden, schliessen sich nun ferner noch andere Einwürfe an, welche darauf beruhen, dass Helmholtz bewiesen zu haben glaubt, dass die von ihm als *kritisch* bezeichnete Entfernung ϱ nicht immer eine *molekulare* Entfernung sei. Er hat dies aber nur bewiesen, indem er der Entfernung ϱ eine ganz andere Bedeutung beigelegt hat, als ihr zum Zweck der Definition der *Arbeitsenergie* U zweier elektrischer Theilchen e und e' gegeben worden war. Hiernach war nämlich $\varrho = ee'/a$ blos vom Wesen der Elektricität und der beiden Theilchen e und e' abhängig, nämlich von den drei Grössen a, e^2 und e'^2, welche die konstante Energiesumme des Theilchenpaares und die elektrostatischen Abstossungskräfte bezeichnen, welche von den beiden Theilchen, von jedem auf ein ihm gleiches Theilchen, in der Einheit der Entfernung ausgeübt werden.

Helmholtz sagt dagegen a. a. O., S. 43: „Der Werth der Entfernung ϱ ist $\varrho = 2ee'/c^2\mu$". Es ist also hierin von Helmholtz μ für $2a/c^2$ gesetzt worden. Helmholtz fährt sodann fort: „Ist das elektrische Theilchen nur mit seiner eigenen Masse behaftet, so wird e/μ

irgend einen bestimmten Werth β haben. Enthält μ auch noch ponderable Masse, so wird $e/\mu < \beta$ sein". Hieraus leuchtet ein, dass nach Helmholtz ϱ eine auch von der am elektrischen Theilchen e haftenden ponderablen Masse abhängige Grösse ist, also eine ganz andere Bedeutung hat als in dem von mir aufgestellten Gesetze. Helmholtz fährt weiter fort: „Aber wenn auch $b = 2e/c^2\mu$ eine äusserst kleine Grösse ist, so ist ϱ doch nicht allein von b abhängig, sondern es ist $\varrho = be'$, und e' kann noch jede beliebige Grösse haben, folglich auch ϱ. Dabei ist wohl zu beachten, dass, wenn wir uns e' als eine kugelförmige Masse von bestimmter Dichtigkeit denken wollten, sei es als elektrisches Fluidum, sei es als einen mit Elektricität einer Art durchdrungenen oder bedeckten Isolator, bei wachsendem e' der Durchmesser dieser Kugel wie $\sqrt[3]{e'}$ oder wie $\sqrt[2]{e'}$ wachsen würde, je nachdem e' im Innern oder an der Oberfläche angesammelt ist, ϱ aber wie e' selbst, und dass wir also durch entsprechende Vergrösserung von e' der Grösse ϱ jede beliebige endliche Grösse und ihrem Endpunkte jeden beliebigen Abstand von der Oberfläche der elektrischen Masse e' geben können".

Die hier von Helmholtz gegebene Beschreibung des elektrischen Theilchens e' zeigt offenbar, wie verschieden dasselbe nach Helmholtz's Vorstellungsweise von jedem in der Natur wirklich vorhandenen seiner Grösse und Masse nach gegebenen *Atome* ist. Man sieht leicht ein, dass wenn man statt der in der Natur wirklich vorhandenen Körperatome mit unmessbar kleinen Massen, *Atome mit Weltkörpermassen* sich denken will, was Jedermann freisteht, selbstverständlich die Molekular- oder Atomdistanzen in dieser gedachten Welt nicht so unmessbar klein sein werden wie in der wirklichen Welt. Dass solche Riesenatome übrigens in Gemässheit der Fiktion von festen Verbindungen ponderabler Atome unter einander und mit elektrischen herstellbar sein würden, leuchtet von selbst ein; es dürfte dies aber gegen das Grundgesetz der elektrischen Wirkung, was mit solchen Fiktionen in gar keinem Zusammenhange steht, nicht wohl geltend gemacht werden.

Wenn hiernach die von Helmholtz gehegten Bedenken, sowohl in Beziehung auf die Möglichkeit eines perpetuum mobile, als auch in Beziehung auf messbare Grösse der kritischen Entfernung ϱ, hauptsächlich von Verschiedenheiten in Grundansichten und Grundvorstellungen herzurühren scheinen, so dürfte es sich dagegen mit folgendem Einwande anders verhalten. Ein von Helmholtz erhobener Einwand besteht nämlich wesentlich darin, dass wie Helmholtz bewiesen zu haben glaubt, aus dem von mir aufgestellten Grundgesetze folge, „dass in gewissen Fällen bei vorwärts treibender Kraft der (getriebene) Punkt μ rückwärts beschleunigt werde und umgekehrt".

Dieser Beweis beruht nun aber wesentlich darauf, dass Helmholtz sowohl in Borchardt's Journal, Bd. 75, S. 47, als auch im Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1872, April 18., S. 253 von einer *lebendigen Kraft* $= \frac{1}{2}(\mu - [1/c^2][ee'/r]\cos\vartheta^2)\,q^2$ spricht, wo q diejenige Geschwindigkeit ist, mit welcher sich die Masse μ bewegt, wo aber die Grösse $-[1/c^2][ee'/r]\cos\vartheta^2$ gar keine *wirklich vorhandene Masse* ist, viel weniger eine mit der Geschwindigkeit q sich bewegende Masse. Was nun Herr Helmholtz damit hat andeuten wollen, dass er von der Grösse $(\mu - [1/c^2][ee'/r]\cos\vartheta^2)$ sagt, nicht dass sie die Masse, welche sich mit der Geschwindigkeit q bewege, *sei*, sondern dass sie diese Masse *vertrete* (Borchardt's Journal, Bd. 75, S. 48), oder dass sie *gleichsam* diese Masse sei (Monatsbericht 1872, April 18., S. 253), habe ich nicht errathen können, und begreife daher auch nicht, wie Helmholtz mit Hülfe dieser Vergleichung dazu gelangt ist, „als Folge des Weber'schen Gesetzes" zu finden, „dass in gewissen Fällen bei vorwärtstreibender Kraft der Punkt μ rückwärts beschleunigt werde und umgekehrt".

Ebenso wenig begreife ich, wie jene Grösse, die eine Masse nur *vertrete* oder *gleichsam* eine Masse sei, auf eine andere wirklich vorhandene Masse *stossen* könne, und wie die Bewegungen derselben *nach dem Zusammenstosse* aus den Gesetzen bestimmt werden können, welche gelten würden, wenn es sich um *wirklich vorhandene mit der Geschwindigkeit q bewegte Massen* handelte.

In Borchardt's Journal sowohl als auch im Monatsberichte der Berliner Akademie hat Herr Helmholtz die von ihm aus meinem Grundgesetze entwickelte Gleichung der lebendigen Kraft angeführt, die sich für den Fall blos *eines* beweglichen Massenpunkts μ mit dem elektrischen Quantum e in einem Raume, welcher von einer gleichmässig mit Elektricität belegten Kugeloberfläche vom Halbmesser R begrenzt ist, auf folgende Gleichung reducirt, wo ε das Quantum Elektricität auf der Flächeneinheit der Kugeloberfläche bezeichnet, nämlich:

$$\frac{1}{2}\left(\mu - \frac{4\pi}{3c^2}\cdot R\varepsilon e\right)q^2 - V + C = 0.$$

V bezeichnet das Potential der *nicht elektrischen* Kräfte, und dV/ds bezeichnet die *treibende Kraft*, wie Helmholtz angiebt. Es ergiebt sich aus dieser Gleichung durch Differentiation:

$$\left(\mu - \frac{4\pi}{3c^2}\cdot R\varepsilon e\right)q\frac{dq}{ds} - \frac{dV}{ds} = 0;$$

also wenn dV/ds positiv ist, d. i. nach HELMHOLTZ's Angabe *bei vorwärtstreibender Kraft*, wenn zugleich ($\mu - [4\pi/c] . R\varepsilon e$) *negativ* ist, nimmt q ab, das heisst μ wird *rückwärts beschleunigt*.

Hierbei hat nun aber HELMHOLTZ nur *einen Theil der treibenden Kraft* berücksichtigt, nämlich denjenigen, welcher sich aus dem Potential der *nicht elektrischen* Kräfte ergiebt. Den *anderen Theil der treibenden Kraft*, welcher aus dem *elektrischen Potential* ($[4\pi/6c^2] R\varepsilon e . q^2$) sich ergiebt, welches Potential von HELMHOLTZ mit der lebendigen Kraft $\frac{1}{2}\mu q^2$ zusammen gezogen worden ist, blos weil es mit ihr den Faktor q^2 gemein hat, hat HELMHOLTZ gar nicht berücksichtigt, indem er sagt: *„bei vorwärtstreibender Kraft nimmt q ab, oder μ wird rückwärts beschleunigt, wenn ($\mu - [4\pi/3c^2] R\varepsilon e$) negativ ist"*. Es sollte statt dessen heissen: Bei vorwärtstreibender *nicht elektrischer* Kraft wird μ rückwärts beschleunigt, wenn ($\mu - [4\pi/3c^2] R\varepsilon e$) negativ ist. Soll aber statt blos eines *Theils* der treibenden Kraft die *ganze treibende Kraft* in Rechnung gebracht werden, so erhält man aus der obigen Gleichung durch Differentiation:

$$\mu q \frac{dq}{ds} - \left(\frac{4\pi}{3c^2} R\varepsilon e . q \frac{dq}{ds} + \frac{dV}{ds}\right) = 0,$$

wo ($[4\pi/3c^2] R\varepsilon e . q [dq/ds] + dV/ds$) die *ganze treibende Kraft* ist, und hieraus folgt:

$$dq = \frac{ds}{\mu q}\left(\frac{4\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon e . q \frac{dq}{ds} + \frac{dV}{ds}\right),$$

das heisst, mit Rücksicht darauf, dass $ds/\mu q$ stets positiv ist, *bei vorwärtstreibender ganzer Kraft* (elektrische und nicht elektrische zusammen genommen) *wird μ stets vorwärts beschleunigt* und umgekehrt, wobei es ganz gleichgültig ist, ob ($\mu - [4\pi/3c^2] R\varepsilon e$) einen positiven oder negativen Werth hat.

Nachdem auf diese Weise das scheinbar Ungereimte in den von HELMHOLTZ aus meinem Grundgesetze gezogenen Folgerungen beseitigt ist, bleibt immer noch ein überraschendes Resultat übrig, nämlich dass nach diesem Gesetze eine das Theilchen μ in seiner Bewegung *retardirende nicht elektrische* Kraft, welche durch einen negativen Werth von dV/ds dargestellt wird, mittelbar eine elektrische Kraft $= [4\pi/3c^2] R\varepsilon e . q [dq/ds]$ zur Folge habe, welche das Theilchen μ in seiner Bewegung *beschleunige*, und zwar mehr beschleunige als es von ersterer Kraft retardirt wird.

Der *unmittelbare Grund* dieser elektrischen Kraft ($[4\pi/3c^2] R\varepsilon e . q [dq/ds]$) liegt nun aber nicht in der Kraft dV/ds, sondern, dem Grundgesetze gemäss, in der vorhandenen *relativen Beschleunigung*, welche hier

durch $q\,[dq/ds]$ dargestellt ist, woraus jene Kraft in angegebener Weise durch Multiplikation mit $[4\pi/3c^2]\,R\varepsilon e$ erhalten wird. Die Beschleunigung $q\,[dq/ds]$ selbst aber resultirt, nach allgemeinem Bewegungsgesetze, nicht aus *einer*, sondern aus *allen vorhandenen Kräften*, also nicht blos aus der *nicht elektrischen* Kraft dV/ds, sondern auch aus der *elektrischen* Kraft $([4\pi/3c^2]\,R\varepsilon e\,.\,q\,[dq/ds])$ selbst, nämlich durch Division der Summe beider Kräfte durch μ, wonach

$$q\frac{dq}{ds}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{dV}{ds}+\frac{4\pi}{3c^2}\,R\varepsilon e\,.\,q\frac{dq}{ds}\right).$$

Hiernach können nun allerdings die Werthe der *Beschleunigung* $q[dq/ds]$ und der *elektrischen Kraft* $([4\pi/3c^2]\,R\varepsilon e\,.\,q[dq/ds])$ mittelbar auch als blos abhängig von der gegebenen *nicht elektrischen Kraft* dV/ds dargestellt werden, nämlich:

$$q\frac{dq}{ds}=\frac{1}{\mu-\frac{4\pi}{3c^2}\,R\varepsilon e}\cdot\frac{dV}{ds},$$

$$\frac{4\pi}{3c^2}\,R\varepsilon e\,.\,q\frac{dq}{ds}=\frac{\frac{4\pi}{3c^2}\,R\varepsilon e}{\mu-\frac{4\pi}{3c^2}\,R\varepsilon e}\cdot\frac{dV}{ds}.$$

Wenn also der gegebene Werth von dV/ds *negativ* ist, so würde sich bei sehr kleinem negativen Werthe von $(\mu-[4\pi/3c^2]\,R\varepsilon e)$ aus einer *gegebenen*, die mit der Geschwindigkeit q bewegte Masse μ *rückwärts treibenden*, *nicht elektrischen* Kraft eine viel grössere, dieselbe Masse *vorwärts treibende elektrische* Kraft ergeben.

Und da einleuchtet, dass der Nenner $(\mu-[4\pi/3c^2]\,R\varepsilon e)$ nur für einen positiven Werth von εe Null oder negativ werden kann, d. h. nur dann, wenn die Elektricität, mit welcher die Kugeloberfläche belegt ist, von gleicher Art ist wie die Elektricität, welche an der beweglichen ponderablen Masse haftet, so ergiebt sich für $\mu>[4\pi/3c^2]\,R\varepsilon e$ die elektrische Kraft $([4\pi/3c^2]\,R\varepsilon e\,.\,q\,[dq/ds])$ von *gleicher Richtung* wie die nicht elektrische Kraft dV/ds, und ihre *Grösse*, welche für $[4\pi/3c^2]\,R\varepsilon e=\frac{1}{2}\mu$ der anderen Kraft gleich ist, wächst mit zunehmendem Werthe von $[4\pi/3c^2]\,R\varepsilon e$, bis sie für $[4\pi/3c^2]\,R\varepsilon e=\mu$ *unendlich* wird und dann das *Vorzeichen wechselt*.

Ein solcher Sprung in der *Grösse und Richtung* der elektrischen Kraft, nämlich von $+\infty$ zu $-\infty$ könnte nun, wenn er aus dem Gesetze wirklich folgte, als eine Verletzung der Stetigkeit, allerdings mit Recht Anstoss erregen; ein solcher Sprung tritt wirklich aber nach dem

Gesetze gar nicht ein, weil nämlich die Masse μ mit ihrer Ladung e in Folge der ihr ertheilten immer wachsenden Beschleunigung im Innern des Kugelraums gar nicht so lange verweilen kann, bis $[4\pi/3c^2]\,R\varepsilon e = \mu$ geworden ist, sondern schon früher bis an die vom *festen Isolator* gebildete Kugeloberfläche getrieben worden sein müsste, durch deren Widerstand wieder Ruhe hergestellt worden wäre.

Diese Folgerungen, wie man hieraus sieht, enthalten durchaus nichts Ungereimtes, und können unter so ganz ausserordentlichen Verhältnissen, an deren wirkliche Darstellung doch gar nicht zu denken ist, nicht einmal für unerwartet gelten. Denn rechnet man für wirklich darstellbare elektrische Ladungen auf jedes Milligramm des ponderablen Trägers etwa 10 elektrostatische Einheiten Ladung, also $e/\mu = 10$, und rechnet man ferner dieselbe Ladung auf jedes Quadratmillimeter der Oberfläche, also $\varepsilon = 10$, so ergiebt sich aus $[4\pi/3c^2]\,R\varepsilon e > \mu$ die Forderung, einen kugelförmigen Isolator darzustellen, dessen Halbmesser $R > 3c^2/400\pi > 46.10^{19}$ Millimeter wäre, d. h. grösser als der Abstand der Erde von der Sonne 3 Millionen Mal genommen. —

Auf andere fast noch merkwürdigere, doch nicht ungereimte Folgerungen aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung ist übrigens schon in der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen im Jahre 1846[1]) die Aufmerksamkeit gerichtet worden, insbesondere darauf, dass die *Wechselwirkung zweier Körper* dadurch mittelbar von der *Gegenwart dritter Körper* abhängig gemacht werde, woraus Kräfte resultiren, welche Berzelius mit dem Namen *katalytischer* bezeichnet hat.

Finden nun aber auch diese Folgerungen keine Analogien in den aus anderen Gesetzen gezogenen Folgerungen, so kann doch sehr wohl die Frage aufgeworfen werden, ob dieser Mangel an Analogie ein Nachtheil oder ein Vorzug sei, da zur Erklärung vieler Erscheinungsgebiete, insbesondere solcher, welche mit der molekularen Konstitution der Körper in näherer Beziehung stehen, alle Folgerungen aus dem Gravitationsgesetze und aus allen anderen nach Analogie mit demselben aufgestellten Gesetzen offenbar nicht führen können; Gesetze anderer Art also dazu nothwendig erscheinen.

4.

Identität der in allen Körpern enthaltenen beweglichen Theile, deren Bewegung, Wärme, Magnetismus oder Galvanismus ist.

Man theilt alle ponderablen Körper in feste, flüssige und luftförmige, und unterscheidet Statik und Dynamik dieser Körper, je nachdem man sie im Ruhe- oder im Bewegungszustande betrachtet. Indem man aber

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 212.]

in der Statik dieser Körper von ihrem Ruhezustande spricht, bezeichnet man damit keineswegs einen Zustand der Ruhe *aller* in den Grenzen dieser Körper eingeschlossenen Theile, sondern nur der in diesen Grenzen eingeschlossenen *ponderablen* Theile. Ohne diese Beschränkung würde niemals vom Ruhezustande eines Körpers gesprochen werden können, weil in jedem Körper ausser seinen ponderablen Theilen noch andere Theile enthalten sind, die nie zur Ruhe kommen.

Denn *erstens* hat die genauere Erforschung aller an ponderablen Körpern beobachteten *elektrischen* Erscheinungen dahin geführt, dass im Innern aller dieser Körper (auch sogenannter fester und in Ruhe befindlicher) bewegliche Theile vorhanden sind, nämlich elektrische, und dass die Bewegungen dieser Theile im Innern jener Körper der Grund aller galvanischen und elektrodynamischen Erscheinungen und Wirkungen jener Körper seien.

Zweitens hat die genauere Erforschung aller an ponderablen Körpern beobachteten *magnetischen* Erscheinungen, sowohl der paramagnetischen, als auch der diamagnetischen, ebenfalls dahin geführt, dass im Innern aller dieser Körper bewegliche Theile vorhanden seien, welche man lange Zeit unter dem Namen der *magnetischen Fluida* von jenen ersteren, nämlich von den elektrischen, zu unterscheiden versucht hat. Von diesen magnetischen Fluidis wurde behauptet, dass sie im Innern der Körper nach Verschiedenheit der Verhältnisse verschieden *vertheilt* sein könnten, dass sie aber unter beharrlichen Verhältnissen zu Ruhe und Gleichgewicht gelangten. In der *Vertheilung* dieser magnetischen Fluida liege der Grund der magnetischen Erscheinungen, ohne dass es dazu fortdauernder Bewegungen derselben bedürfe. Doch hat die weiter geführte Untersuchung ergeben, dass in solchen ruhenden magnetischen Fluidis, wie sie auch vertheilt sein mögen, nicht der Grund von *allen* magnetischen Erscheinungen (paramagnetischen und diamagnetischen) liegen könne; dass aber *alle* diese Erscheinungen aus dem Vorhandensein *fortwährend bewegter Theile im Innern der ponderablen Körper* erklärt werden können, und zwar der nämlichen Theile, deren Bewegungen der Grund aller galvanischen und elektrodynamischen Erscheinungen und Wirkungen sind, nämlich der *elektrischen.*

Drittens kommt endlich noch hinzu, dass auch die Erforschung der jedem ponderablen Körper zukommenden *Temperatur* dahin geführt hat, dass im Innern aller dieser Körper bewegliche Theile vorhanden sind, und dass der Grund aller an diesen Körpern beobachteten Temperaturerscheinungen, d. i. die *Wärme*, in Bewegungen dieser Theile bestehe.

Sind nun die in allen ponderablen Körpern enthaltenen beweglichen Theile, deren Bewegungen der Grund aller galvanischen Wirkungen sind, keine anderen Theile als diejenigen, deren Bewegungen der Grund

aller magnetischen Wirkungen (paramagnetischen und diamagnetischen) sind, so ist die Vermuthung sehr nahe gelegt, dass auch die in allen ponderablen Körpern enthaltenen Theile, deren Bewegung *Wärme* ist, identisch seien mit den im Innern der ponderablen Körper enthaltenen Theilen, deren Bewegung *Magnetismus* ist, folglich auch identisch mit den im Innern der ponderablen Körper enthaltenen Theilen, deren Bewegung *Galvanismus* ist. Wenn man nämlich auch im Innern der Körper das Vorhandensein von Theilen, die sich bewegen, während die ponderablen Theile in Ruhe verharren, im Allgemeinen zugeben muss, so wird man doch viel mehr Bedenken tragen, das Vorhandensein *mehrerer Arten solcher Theile*, und zwar in jedem kleinsten Körpertheile, anzunehmen, die von einander gehörig zu sondern und jede einzeln genauer zu erforschen wenig Aussicht vorhanden sein würde. — Diese vermuthete Identität wird nun auch durch Thatsachen bestätigt, die in Folgendem näher betrachtet werden sollen.

5.

Identität der von der elektromotorischen Kraft im Strome erzeugten lebendigen Kraft mit der vom Strome im Leiter erzeugten Wärme

Die Wärmeerzeugung durch den galvanischen Strom im Stromleiter ist Gegenstand vieler Untersuchungen gewesen, durch welche das Gesetz begründet worden ist, dass das *mechanische Aequivalent der erzeugten Wärme* im Zeitelemente dt gleich ist dem Produkte von dt in das Quadrat der Stromintensität i und den Widerstand w des Leiters, durch welchen der Strom geht, beide nach absoluten magnetischen Maassen gemessen. Doch ist dabei zu bemerken, dass die meisten hierüber ausgeführten Messungen wirklich gar nicht auf absolute Maasse zurückgeführt worden sind, und dass diese Zurückführung, wo sie versucht worden, doch noch nicht die wünschenswerthe Genauigkeit und Sicherheit erlangt hat, weil es bisher an Widerstandsskalen mit genau verbürgter Reduktion auf absolutes Maass gefehlt hat. Denn die einzigen zu solchen Zwecken bisher brauchbaren Widerstandsskalen sind die erst in neuester Zeit von Siemens ausgeführten, und die einzige genau verbürgte Reduktion dieser Skalen auf absolutes Widerstandsmaass ist erst von Kohlrausch (Ergänzungsband VI, 1873, S. 1) gegeben worden.

Hiernach wäre streng genommen nur das Gesetz der *Proportionalität* der Wärmeerzeugung mit dem Produkt $i^2 w dt$ als bewiesen zu betrachten, und es würde, um *Gleichheit* dafür setzen zu können, noch feinerer absoluter Maassbestimmungen bedürfen als bisher haben ausgeführt werden können. Wir wollen indessen diese *Gleichheit*, obwohl sie noch nicht

mit hinreichender Genauigkeit, aber doch näherungsweise bewiesen worden ist, hier einstweilen annehmen, was auch von anderen Physikern geschehen ist.

Nach den beim Ausspruch dieses Gesetzes zu Grunde gelegten *magnetischen Maassen* ist nun aber bekanntlich der Leitungswiderstand $w = e/i$, wo e die elektromotorische Kraft und i die Intensität des von dieser Kraft im Leiter hervorgebrachten Stroms bezeichnet. Das mechanische Aequivalent der vom Strome im Zeitelemente dt erzeugten Wärme kann daher, statt durch $i^2 w dt$ auch durch $eidt$ dargestellt werden.

Ferner ergiebt sich, dass *nach magnetischen Maassen erstens* die Stromintensität $i = 2\,Eu \,.\, \sqrt{2}/c$ ist,[1]) wo mit $2Eu$ die Summe des Produkts der in der Längeneinheit des Leiters enthaltenen positiven Elektricität in elektrostatischen Einheiten $+E$ in ihre Geschwindigkeit $+u$, und des Produkts der in der Längeneinheit des Leiters enthaltenen negativen Elektricität in elektrostatischen Einheiten $-E$ in ihre Geschwindigkeit $-u$ bezeichnet wird.

Zweitens ergiebt sich, dass *nach magnetischen Maassen* die elektromotorische Kraft $e = [f/E] \,.\, [c/\sqrt{2}]$ ist,[2]) wo f die halbe Differenz der in mechanischem Maasse ausgedrückten Kräfte, welche auf die positive

[1]) Siehe die vierte Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen, 1857, S. 264 [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 652], wo das Verhältniss des magnetischen Maasses der Stromintensität zum mechanischen $= c\sqrt{2} : 4$ angegeben ist. — Die Stromintensität nach mechanischem Maasse wird, indem blos die positive Elektricität berücksichtigt wird, wie dies auch bei der Bestimmung der Stromrichtung üblich ist, durch Eu ausgedrückt, wo E die in der Längeneinheit des Leiters enthaltene positive Elektricität in elektrostatischen Einheiten, und u die Geschwindigkeit bezeichnet, mit der sich dieselbe bewegt. Siehe die erste Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen 1846. Art. 21, S. 114 f. [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 152]. — Hiernach ergiebt sich die Stromintensität nach magnetischem Maasse $i = Eu \,.\, 2\sqrt{2}/c$.

[2]) Unter der auf einen Leiter ausgeübten elektromotorischen Kraft versteht man die Differenz der in mechanischem Maasse ausgedrückten Kräfte, welche auf die positive und auf die negative Elektricität im Leiter wirken würden, wenn jede Längeneinheit des Leiters die Einheit der positiven und negativen Elektricität enthielte. Und zwar wenn jede Längeneinheit die *elektrostatische Einheit* positiver und negativer Elektricität enthielte, so würde die auf den Leiter wirkende elektromotorische Kraft in *mechanischem Maasse* ausgedrückt sein; wenn sie dagegen die *magnetische Einheit* positiver und negativer Elektricität enthielte, welche $c/[2\sqrt{2}]$ Mal grösser ist als die elektrostatische, so würde die auf den Leiter wirkende elektromotorische Kraft in *magnetischem Maasse* ausgedrückt sein. — Bezeichnet man nun mit $2f$ die Differenz der in mechanischem Maasse ausgedrückten Kräfte, welche auf die im Leiter enthaltene positive und negative Elektricität wirklich wirken, und mit E die Zahl der elektrostatischen Einheiten, welche in jeder Längeneinheit an positiver oder negativer Elektricität enthalten ist; so ergiebt sich die auf den Leiter ausgeübte elektromotorische Kraft in *mechanischem Maasse* ausgedrückt $= 2f/E$, in *magnetischem Maasse* $e = [f/E] \cdot [c/\sqrt{2}]$.

und auf die negative Elektricität im Leiter nach Richtung des Leiters wirken, und E die Zahl der elektrostatischen Einheiten, welche in der Längeneinheit des Leiters an positiver oder negativer Elektricität enthalten sind, bezeichnet.

Hieraus folgt das mechanische Aequivalent der vom Strome im Leiter erzeugten Wärme:

$$i^2 w dt = eidt = 2fudt = (+f).(+udt) + (-f).(-udt),$$

gleich der Summe der Produkte der auf jedes strömende Theilchen wirkenden Kraft in den von diesem Theilchen in der Richtung der auf dasselbe wirkenden Kraft zurückgelegten Weg, d. i. gleich der *Stromarbeit*.

Wirkt nun keine andere Kraft auf die im Leiter strömende Elektricität als die elektromotorische Kraft, so leuchtet ein, dass die lebendige Kraft der strömenden Elektricität zunehmen muss, und dass die Grösse dieser Zunahme durch die Grösse der *Stromarbeit* gegeben ist. Aus dieser Zunahme der lebendigen Kraft der strömenden Elektricität folgt dann ferner eine Zunahme der Geschwindigkeit, mit welcher die strömende Elektricität sich bewegt. Wenn daher die strömende Elektricität im Leiter in gar keine andere Bewegung geriethe als in Strombewegung, so würde daraus ein stetiges Wachsthum der Stromintensität folgen, was aber in Widerspruch stehen würde mit dem hier vorausgesetzten *beharrlichen Strome*, zu dessen Hervorbringung nach dem Ohm'schen Gesetze eine beharrliche elektromotorische Kraft erfordert wird.

Es bleibt daher in dem hier vorausgesetzten Falle nur übrig, dass die Elektricität im Leiter sich *nicht immer in blosser Strombewegung* befinde, sondern dass diese Strombewegung zeitweise in eine *andere* Bewegung übergehe und umgekehrt.

Ist nun diese *andere* Bewegung die im Leiter stets vorhandene Bewegung der Elektricität um die ponderablen Molekule herum, die der Grund von allen magnetischen (paramagnetischen und diamagnetischen) Erscheinungen ist, und an der eine so grosse Menge Elektricität Theil nimmt, dass die Menge der strömenden Elektricität dagegen verschwindet; so ergiebt sich von selbst, dass die strömende Elektricität immer mit geringerer Geschwindigkeit von den vorhergehenden Molekularströmen ausgegangen sein muss, als sie zu den folgenden Molekularströmen hingelangt, in Folge der Beschleunigung, die sie auf ihrem Wege durch die elektromotorische Kraft erlitten hat; dass aber die von der strömenden Elektricität dadurch gewonnene Zunahme an lebendiger Kraft an der nächsten Station sogleich an die Molekularströme wieder abgegeben wird, so dass bei beharrlichem Strome blos die *Molekularströme* an lebendiger Kraft zunehmen. Diese Zunahme an lebendiger Kraft ist nichts anderes als die vom Strome im Leiter erzeugte Wärme selbst.

wie sich daraus ergiebt, dass sie dem mechanischen Aequivalent der erzeugten Wärme gleich ist, was, wie schon bemerkt, wenigstens näherungsweise bewiesen worden ist. — Es wird hierdurch die am Schlusse des vorigen Artikels ausgesprochene Vermuthung bestätigt, dass die in allen ponderablen Körpern enthaltenen beweglichen Theile, deren Bewegung *Wärme* ist, *identisch* sind mit den in allen ponderablen Körpern enthaltenen Theilen, deren Bewegung *Magnetismus* ist. Es giebt keine anderen von den ponderablen unabhängig beweglichen Theile im Innern der Körper als diese, nämlich die *elektrischen* Theile.

6.

Bewegung der Elektricität in Konduktoren.

Befindet sich die Elektricität in allen Körpern fortwährend in Bewegung, besonders um die ponderablen Molekule herum, und sind diese Bewegungen der Grund aller *galvanischen*, *magnetischen* und *Wärmeerscheinungen;* so gilt dies auch von der Elektricität in *Konduktoren*, zumal in *metallischen Konduktoren*, die sich vor allen anderen Körpern durch ihr *galvanisches* Verhalten, ferner in Beziehung auf *Wärmeleitung* und einige endlich, wie Eisen und Wismuth, auch durch ihren *Magnetismus* oder *Diamagnetismus* auszeichnen, wovon der Grund offenbar in besonderen Verhältnissen zu suchen ist, in welchen die Elektricität in diesen Körpern sich befindet.

Elektrische Strombewegungen finden vorzugsweise in *metallischen Leitern* Statt, und zwar *rein elektrische* (nämlich solche, wo nur die Elektricität strömt, ohne Theilnahme der ponderablen Theile), *nur* in metallischen Leitern; denn in *nicht metallischen* sogenannten feuchten oder *zersetzbaren Leitern* findet keine Strömung ohne *elektrolytische* Wirkung Statt, d. h. nicht ohne Theilnahme ponderabler Theile an der Strömung, und zwar anderer ponderabler Theile an der Strömung der positiven Elektricität, anderer an der Strömung der negativen.

Zunächst nun bedarf die *Beharrlichkeit* elektrischer Ströme in metallischen Leitern einer näheren Erläuterung. Es ist nämlich aus den Ohm'schen Gesetzen bekannt, dass in geschlossenen Leitern ein *beharrlicher Strom* nur unter beharrlicher Fortwirkung einer bestimmten *elektromotorischen Kraft* existiren kann, und nach dem vorigen Artikel müsste eine solche elektromotorische Kraft die in ihrer Richtung strömende Elektricität *beschleunigen*, wodurch also die Stromintensität verändert würde.

Besteht aber der Strom im Leiter, wie im vorigen Artikel angegeben, aus lauter *Stromelementen*, in welchen die Strombewegung ununterbrochen nur von einem Leitermolekule zum anderen geht, und vermischt sich ein elektrisches Theilchen, wenn es durch diese Strom-

bewegung zum anderen Leitermolekule gelangt ist, mit der hier vorhandenen Elektricität, die sich um dieses Molekule herum bewegt, indem es selbst von Strombewegung zu Rotationsbewegung *übergeht*, während statt seiner irgend ein anderes Theilchen der hier vorhandenen Elektricität, indem es umgekehrt von Rotationsbewegung zu Strombewegung *übergeht*, ein zweites Stromelement bildet u. s. w.; so leuchtet ein, dass zwar Beschleunigung der Elektricität in jedem Stromelemente durch die elektromotorische Kraft Statt finden muss, dass aber darum keine Intensitätszunahme des ganzen Stromes Statt zu finden braucht, wenn nämlich in allen Stromelementen die elektrischen Theilchen ihre Strombewegung mit einer immer gleichen, *aber geringeren* Geschwindigkeit beginnen und dieselbe auch mit einer immer gleichen *aber grösseren* Geschwindigkeit beschliessen.

Es geht daraus hervor, dass in metallischen Leitern der *Uebergang* elektrischer Theilchen von Rotationsbewegung zu Strombewegung und umgekehrt eine besondere Rolle spielen müsse; denn durch diesen Uebergang soll die elektrische Leitung selbst vermittelt werden.

Dazu kommt nun aber, dass *elektrische Leitung* und *Wärmeleitung* in metallischen Konduktoren in nächster Beziehung stehen, und es leuchtet ein, dass, wenn Wärme wirklich identisch mit der lebendigen Kraft der im Innern der ponderablen Körper sich fortwährend bewegenden Elektricität ist, *Wärmeleitung in metallischen Konduktoren* ebenso wie elektrische Stromleitung durch den *Uebergang* von Rotationsbewegung in Strombewegung und umgekehrt vermittelt werden muss.

Liegt nun der Grund des elektrischen und Wärme-Leitungsvermögens metallischer Leiter darin, dass die in Rotationsbewegung befindlichen elektrischen Theile in Strombewegung *übergehen* können und umgekehrt, so fragt sich, wovon dieser Uebergang abhängt, und warum derselbe in *Konduktoren* Statt finde, in *Isolatoren* aber nicht Statt finde. Zu diesem Zwecke gehen wir zu den in der letzten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen (im Bd. 10 der Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1871, Art. 16)[1]) betrachteten Molekularbewegungen zweier *ungleichartiger* elektrischer Theilchen über und zu den darauf sich gründenden Verschiedenheiten der molekularen *Körperkonstitutionen*.

Beschränken wir uns nämlich auf solche Systeme, welche aus Paaren von Theilchen bestehen, von denen das eine $-e$ negativ elektrisch und an eine ponderable Masse gebunden ist, das andere $+e$ positiv elektrisch ist und sich um ersteres herum bewegt, so können solche Systeme sich durch folgende Eigenschaften gradweise von einander unterscheiden.

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. IV, p. 279.]

Erste Eigenschaft. Jedem solchem Systeme kommt ein bestimmter und zwar negativer Werth von ϱ zu (wenn nämlich $ee'/a = \varrho$ gesetzt wird und die Vorzeichen von e und e' davon abhängig gemacht werden ob die damit bezeichneten Theilchen der positiven oder negativen Elektricität angehören), der für verschiedene Systeme sehr verschieden sein kann. Es ist also eine *Eigenschaft* solcher Systeme, dass jedem derselben ein bestimmter Werth von ϱ, oder von ϱc^2, zukommt, durch den es von anderen Systemen unterschieden werden kann.

Zweite Eigenschaft. Nach Art. 11 a. a. O. ist $r^2 \alpha^2 = r_0{}^2 \alpha_0{}^2$ (wenn r_0, α_0 die anfänglichen, r, α die gegenwärtigen Werthe der Entfernung beider Theilchen von einander und ihrer relativen Geschwindigkeit in der Richtung senkrecht auf ihre Verbindungslinie bezeichnen) eine *Konstante* des Systems, so lange wenigstens, als keine anderen Kräfte auf die Theilchen wirken, als die, welche aus ihrer Wechselwirkung resultiren. Diese *Konstante* ist eine *zweite Eigenschaft*, welche ebenfalls zur Unterscheidung verschiedener Systeme dienen kann; jedoch sind dadurch keine *bleibenden* Unterscheidungen gegeben, sondern es können in Folge *äusserer* Einflüsse Uebergänge von einem Systeme zu einem anderen Statt finden.

Dritte Eigenschaft. Bei einem *beharrlichen* Systeme kann zwar der Abstand beider Theilchen sich ändern, aber es muss einen endlichen kleinsten Abstand r_0, sowie auch einen grössten r^0 geben, der von ersterem abhängt. Der Werth des kleinsten Abstandes r_0 kann nun für verschiedene Systeme verschieden sein und kann daher als eine *dritte* zur Unterscheidung verschiedener Systeme dienende *Eigenschaft* betrachtet werden, die jedoch ebenfalls Aenderungen in Folge von äusseren Einflüssen unterworfen ist.

Bezeichnet man nun den aus den drei Konstanten ϱc^2, $r_0{}^2 \alpha_0{}^2$ und r_0 durch Division der zweiten mit dem Produkt aus der ersten und letzten gebildeten Quotienten eines solchen Systems (worin $\varrho = ee'/a$, wie schon bemerkt, einen negativen Werth hat) mit $-n$, setzt also

$$n = -\frac{r_0 \alpha_0{}^2}{\varrho c^2},$$

so ergiebt sich nach Art. 16 a. a. O. folgende Bewegungsgleichung, worin u die relative Geschwindigkeit beider Theilchen bezeichnet, nämlich:

$$\frac{\varrho - r}{\varrho} \cdot \frac{u^2}{c^2} = \left(\frac{r}{r_0} - 1\right) \cdot \left(n\left[\frac{r_0}{r} + 1\right] - 1\right).$$

Es folgt hieraus, dass für $u = o$ entweder $r = r_0$ oder $r = [n/(1-n)]\, r_0 = r^0$ ist.

Ferner ergiebt sich daraus die Unterscheidung zwischen *beharrlichen* und *nicht beharrlichen* Systemen, nach den Werthen von n. Ein *beharrliches System*, nämlich mit r_0 als kleinstem und r^0 als grösstem Werthe von r, existirt nur für $1 > n > \frac{1}{2}$, d. i. wenn der Werth von n zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt; denn für $n > 1$ und für $n < o$ ergiebt sich, dass für r^0, was wesentlich positiv ist, gar kein Werth existirt, und für $\frac{1}{2} > n > o$ würde $r = r^0 < r_0$ erhalten werden, d. h. die Gleichung würde dann nicht dazu dienen, aus dem kleineren der beiden Werthe von r, für welche $u = o$ ist, den grösseren zu finden, sondern umgekehrt aus dem grösseren den kleineren.

Alle *beharrlichen* Systeme lassen sich sodann in zwei Klassen theilen, nämlich in solche, wo $\frac{1}{2} < n < 1 - \varepsilon$ ist, welche *Isolatoren* sind, und in solche, wo $1 - \varepsilon < n < 1$ ist, welche *Konduktoren* sind. Hierin wird ε dadurch bestimmt, dass für $n = 1 - \varepsilon$ der grössere Werth von r, für welchen $u = o$ ist, welcher mit r^0 bezeichnet worden, so gross ist, dass das bewegte Theilchen in die Wirkungssphäre des Nachbarsystems eintritt, und daher aus einem System ins andere übergeht. Setzt man diesen Werth von $r^0 = (1 + \mu) r_0$ und beachtet, dass allgemein $r^0 = [n/(1 - n)] r_0$ ist, so erhält man für $n = 1 - \varepsilon$ die Gleichung $1 + \mu = n/(1 - n)$ folglich $\varepsilon = 1/(2 + \mu)$.

Für den Werth $n = 1 - \varepsilon$, wo der *Uebergang vom Isolator zum Konduktor* Statt findet, ist das Leitungsvermögen $= 0$, und dasselbe wächst mit n, wenn letzteres grösser als $1 - \varepsilon$ ist und noch zunimmt.

7.

Zweierlei Wärmeverbreitung in ponderablen Körpern.

Die Betrachtungen des vorigen Artikels waren im Wesentlichen auf die Bewegungsgesetze zweier elektrischer Theilchen, die blos ihrer eigenen Wechselwirkung überlassen sind, gebauet. Waren andere Theilchen noch vorhanden, so wurden dieselben so entfernt angenommen, dass ihr Einfluss gegen den der beiden betrachteten Theilchen auf einander nahezu verschwinde. Nur in dem Falle, wo die beiden Theilchen eines Paares sich immer weiter von einander entfernen, muss es eine Grenze geben, über die hinaus der Einfluss der anderen Theile grösser als die Wechselwirkung der betrachteten Theile auf einander wird. Die für diesen Uebergang geltenden Bewegungsgesetze lassen sich aber bekanntlich nicht vollständig und allgemein entwickeln. Es ist daher im vorhergehenden Artikel nur das eine Resultat angeführt worden, dass die beiden Theile, welche bisher ein Paar bildeten, von einander getrennt werden, und mit anderen Theilen sich zu neuen Paaren vereinigen.

Ist nun *Wärme* die lebendige Kraft beweglicher Theile im Innern ponderabler Körper, und sind diese beweglichen Theile positiv elektrische, die sich um negativ elektrische an ponderablen haftende Theile herum bewegen, so leuchtet ein, dass in *metallischen Konduktoren*, wie sie im vorigen Artikel definirt worden, an der Grenzfläche je zweier Konduktorelemente, *Wärmeverbreitung durch Leitung* Statt finden werde, und zwar gleichzeitig in entgegengesetzten Richtungen, indem nämlich einzelne positiv elektrische Theilchen mit der Tangential-Geschwindigkeit ihrer Rotationsbewegung von einem Molekul auf der einen Seite herkommend die Grenzfläche überschreiten und sich mit der rotirenden Elektricität eines Molekuls auf der anderen Seite der Grenzfläche vermischen und umgekehrt. Diese *Wärmeverbreitung in metallischen Konduktoren*, welche durch Uebertragung von lebendiger Kraft *sammt ihrem Träger* erfolgt, heisse *Wärmeverbreitung durch Emission* oder kurz *Wärmeleitung*.

Nun findet aber in *Isolatoren* ebenfalls *Wärmeverbreitung* Statt, d. h. Uebertragung von lebendiger Kraft vom Molekul auf der einen Seite zum Molekul auf der anderen Seite der Grenzfläche zweier Isolatorelemente, und umgekehrt, jedoch ohne dass die elektrischen Theilchen, welche die Träger dieser lebendigen Kräfte sind, selbst die Grenzfläche überschritten. Diese *zweite Art von Wärmeverbreitung*, wie sie bei Isolatoren Statt findet, durch *Uebertragung von lebendiger Kraft ohne ihren Träger*, heisse *Wärmeverbreitung durch Strahlung*, oder kurz *Wärmestrahlung*. Sie findet auch Statt von einem ponderablen Körper zum anderen durch den leeren Raum, z. B. durch den Weltenraum.

Für diese Wärmeverbreitung durch Strahlung im leeren Raume oder in Isolatoren gilt bekanntlich dasselbe wie für die Lichtstrahlung, nämlich dass sie durch Wellenfortpflanzung vermittelt wird, was die Existenz eines wellenfortpflanzenden Mediums voraussetzt. Die Beschaffenheit dieses Mediums hat man bisher aus den Gesetzen der Wellenbewegungen, wie sie aus den Beobachtungen der Lichterscheinungen gefunden worden, kennen zu lernen gesucht; bestände nun aber dieses Medium aus Elektricität, und besässe man nähere Kenntniss von seiner Konstitution, so würde es möglich sein, aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung die Gesetze jener Wellenbewegungen zu entwickeln und die Lichterscheinungen daraus zu erklären, was auch wirklich auf verschiedene Weise versucht worden ist, worauf aber näher einzugehen hier zu weit führen würde.

8.

Ueber die von Kohlrausch *entwickelte Ansicht von der Thermo-Elektricität.*

Wir haben zwei Arten der Wärmeverbreitung, nämlich Leitung und Strahlung unterschieden, welche mit zwei Arten der Verbreitung

elektrischer Bewegung zusammenfallen, nämlich mit der Verbreitung der Bewegung entweder mit ihrem Träger oder ohne ihren Träger. Die *erstere* Verbreitungsweise findet in *metallischen Leitern* Statt, in denen die Elektricität auch durch *elektromotorische Kräfte* in Strombewegung versetzt werden kann.

Die elektrischen Strömungen aber, welche Statt finden, auch wenn die Theilchen von keinen elektromotorischen Kräften getrieben werden, sondern indem sie blos den Gesetzen folgen, nach welchen sie sich vermöge ihrer Wechselwirkung um einander bewegen, wobei sie sich aber von einander entfernen, bis sie die Molekulargrenzen überschreiten, unterscheiden sich wesentlich von den durch elektromotorische Kräfte hervorgebrachten elektrischen Strömen dadurch, dass bei ersteren durch die Grenzfläche *zweier gleicher und gleich warmer* Molekule vorwärts gleich viel Elektricität wie rückwärts geht, während bei den durch *elektromotorische Kräfte* hervorgebrachten Strömen durch die Grenzfläche in der Richtung der Kraft eine grössere Menge Elektricität als in entgegengesetzter Richtung geht. Jene entgegengesetzt gleichen Ströme heben einander auf, so dass kein Strom im engeren Sinne übrig bleibt, denn unter Strom im engeren Sinne versteht man nur die *Differenz* der beiden entgegengesetzten Strömungen.

Bei *gleichen aber ungleich warmen* Molekulen eines metallischen Leiters, auf den sonst keine elektromotorische Kräfte wirken, durch die ein beharrlicher Strom in geschlossener Kette hervorgebracht würde, kann zwar während eines Augenblicks von dem wärmeren Moleküle durch die Grenzfläche zum kälteren eine grössere Menge Elektricität gehen als rückwärts, aber dieser Augenblick dauert nur so lange, bis der zu den kälteren Molekulen gelangende Ueberschuss von Elektricität eine Ladung erzeugt hat, die eine elektromotorische Kraft am Orte der Grenzfläche ausübt, durch welche eben so viel Elektricität von den kälteren Molekulen durch die Grenzfläche rückwärts getrieben wird, als ohnedem vorwärts, so dass dadurch wieder Gleichheit hergestellt wird.

Nach so hergestellter Gleichheit ist der *elektrische Strom*, welcher einen Augenblick durch die Grenzfläche ging, verschwunden; der *Wärmestrom* dagegen kann auch dann noch fortdauern, wenn nämlich die von den wärmeren Molekulen kommenden Theilchen *mit grösserer Geschwindigkeit* sich bewegen, als die von den kälteren kommenden. Man sieht hieraus, dass aus dem engen Zusammenhange zwischen Wärmeströmung und elektrischer Strömung, welcher darauf beruht, dass beide von der durch die Grenzfläche gehenden Elektricität herrühren, *keineswegs nothwendig folge*, dass kein Wärmestrom ohne elektrischen Strom existiren könne, oder umgekehrt.

Nach der von Kohlrausch über *Thermoelektricität* in den „Nach-

richten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen" 1874, S. 65 entwickelten Ansicht soll nun aber ein solcher Zusammenhang zwischen Wärmeströmen und elektrischen Strömen *wirklich* existiren, in der Art wie es der Fall sein würde, wenn Elektricität und Wärme zwei Körper wären, welche unter einander durch Kohäsionskräfte zusammenhingen, wo dann von einer Fortführung der Wärme durch die Elektricität, ebenso wie der Elektricität durch die Wärme sehr wohl die Rede sein könnte. Nun ist aber die Wärme kein Körper, sondern die lebendige Kraft eines Körpers, und der *Wärmestrom* folglich die Uebertragung von lebendiger Kraft von einem Ort zum anderen, *entweder* mit ihrem Träger, wie in metallischen Leitern, *oder* ohne Träger, wie in Isolatoren. Nur im *ersteren* Falle, leuchtet ein, nämlich in metallischen Leitern, könnte möglicher Weise der von Kohlrausch vermuthete Zusammenhang Statt finden; im *letzteren* Falle ist ein solcher Zusammenhang nicht möglich, weil dann gar kein elektrischer Strom existirt.

Durch ein Element f der Grenzfläche zwischen zwei metallischen Leiterelementen gehe von den wärmeren Molekulen auf der einen Seite zu den kälteren auf der anderen Seite der Grenzfläche in der Zeiteinheit die elektrische Masse ε (in Milligrammen) mit der Geschwindigkeit α. Durch dasselbe Element der Grenzfläche gehe von den kälteren Molekülen zu den wärmeren rückwärts die Masse ε' mit der Geschwindigkeit α'. Hierdurch ist ein durch f gehender *elektrischer Strom* und zugleich ein durch f gehender *Wärmestrom* gegeben, jener von der Intensität $i = (\varepsilon - \varepsilon')$, nach mechanischem Maasse (Milligramm als Masseneinheit), dieser von der Intensität $W = (\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2)$, nach mechanischen Aequivalenten.

Hiernach sind im Allgemeinen folgende Fälle möglich: 1. dass $\varepsilon = \varepsilon$ wäre, wo ein Wärmestrom von der Intensität $\varepsilon(\alpha^2 - \alpha'^2)$ ohne elektrischen Strom existiren würde; 2. dass $\varepsilon\alpha^2 = \varepsilon'\alpha'^2$ wäre, wo ein elektrischer Strom von der Intensität $(\varepsilon - \varepsilon')$ existiren würde ohne Wärmestrom; 3. dass, wenn auch weder $\varepsilon = \varepsilon'$ noch $\varepsilon\alpha^2 = \varepsilon'\alpha'^2$ wäre, doch ein bestimmtes Verhältniss zwischen $(\varepsilon - \varepsilon')$ und $(\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2)$ Statt fände, was bei Temperaturänderungen des Leiters konstant bliebe, aber nach sonstiger Verschiedenartigkeit der Leiter verschieden wäre. — Der dritte Fall stimmt wesentlich mit der von Kohlrausch über Thermoelektricität entwickelten Ansicht überein.

Kohlrausch macht nämlich die Annahme, dass das Verhältniss der Intensitäten des elektrischen und des Wärmestroms $(\varepsilon - \varepsilon')/(\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2)$ für jeden Leiter konstant, jedoch abhängig von der Beschaffenheit des Leiters sei, und bezeichnet dasselbe mit a, wonach die Stromintensität $i = aW$, wenn W die Intensität des Wärmestroms bezeichnet. Aus

dieser Annahme ergiebt sich nun nach Kohlrausch sowohl das Gesetz der thermo-elektromotorischen Kräfte, nämlich, dass die thermo-elektromotorischen Kräfte nur von den Temperaturen der Kontaktstellen abhängen und der Temperaturdifferenz proportional sind, als auch das Gesetz der Peltier'schen Wärmeentwickelung, wonach an der Berührungsstelle zweier Leiter eine Entwickelung resp. Absorption von Wärme Statt findet, je nachdem daselbst der Strom zu einem Leiter von kleinerer resp. grösserer thermo-elektrischen Konstante geht.

Dem dritten Falle, nämlich dass zwischen $(\varepsilon - \varepsilon')$ und $(\varepsilon a^2 - \varepsilon' a'^2)$ ein bestimmtes Verhältniss Statt finde, wird offenbar genügt, wenn $a^2 = a'^2$ gesetzt wird. Unter dieser Beschränkung findet aber die von Kohlrausch gegebene Herleitung des Gesetzes der thermo-elektromotorischen Kräfte auf Thermosäulen, wo jeder von den die geschlossene Kette bildenden Leitern an seinen beiden Enden verschiedene Temperatur besitzt, keine Anwendung, weil jede Temperaturdifferenz in einem (homogenen) Leiter ihren Grund nur in Verschiedenheiten der Werthe von a^2 und a'^2 haben kann. Aus der Unveränderlichkeit von $(\varepsilon - \varepsilon')/(\varepsilon a^2 - \varepsilon' a'^2)$, welche aus $a^2 = a'^2$ resultirt, lässt sich daher das *erste* Gesetz, nämlich das Gesetz der thermo-elektromotorischen Kräfte, nicht ableiten, wohl aber das *zweite* Gesetz, nämlich das Gesetz der Peltier'schen Wärmeentwickelung resp. Wärmeabsorption.

Hat man nämlich zwei verschiedene metallische Leiter und bezeichnet man den für $a^2 = a'^2$ konstanten Quotienten $(\varepsilon - \varepsilon')/(\varepsilon a^2 - \varepsilon' a'^2)$, für den einen Leiter mit m, für den anderen mit n, so erhält man die Wärmemenge, welche durch die Grenzfläche der beiden letzten Elemente des ersten Leiters geht, $= m\,(\varepsilon - \varepsilon')$; die Wärmemenge, welche durch die Grenzfläche der beiden ersten Elemente des zweiten Leiters geht, $= n\,(\varepsilon - \varepsilon')$. Geht also ein Strom von der Stärke $(\varepsilon - \varepsilon')$ durch die von beiden Leitern gebildete geschlossene Kette hindurch, so wird an der Stelle, wo der erste Leiter den zweiten berührt, die Wärmemenge $(m - n)\,(\varepsilon - \varepsilon')$ entwickelt; an der anderen Berührungsstelle, wo nämlich der zweite Leiter den ersten berührt, wird dagegen die Wärmemenge $(n - m)\,(\varepsilon - \varepsilon')$ *entwickelt*, oder, was dasselbe ist, die Wärmemenge $(m - n)\,(\varepsilon - \varepsilon')$ wird daselbst *absorbirt*.

Es bleibt nun aber ausser den oben angeführten drei Fällen noch ein vierter Fall zu betrachten übrig, nämlich ausser den Fällen, wo in den Quotienten entweder $\varepsilon = \varepsilon'$, oder $\varepsilon a^2 = \varepsilon' a'^2$, oder $a^2 = a'^2$ ist, bleibt noch 4. der Fall zu betrachten, wo, wenn auch weder $\varepsilon = \varepsilon'$ noch $a^2 = a'^2$ ist, doch eine Abhängigkeit des Verhältnisses a^2/a'^2 von dem Verhältnisse ε/ε' Statt findet, wo z. B. a^2/a'^2 irgend einer Potenz von ε/ε' gleich ist.

In einem metallischen Leiter ist nämlich mit der Zunahme der

Temperatur eine Wärmezunahme, d. i. unserer Annahme gemäss eine Zunahme der lebendigen Kraft der beweglichen elektrischen Theile im Leiter, gegeben, woraus eine Geschwindigkeitszunahme dieser Theile folgt, da ihre Menge oder Masse keine Aenderung erleidet. Diese Geschwindigkeitszunahme wird nun auch von den beweglichen Theilen in demjenigen Augenblicke gelten, wo sie die Grenze zweier benachbarter Molekule überschreiten, deren Geschwindigkeit mit α bezeichnet worden ist. Hiernach wird also α mit der Temperatur des Leiters wachsen. Bei dieser mit einer Temperaturzunahme verbundenen Geschwindigkeitszunahme aller beweglichen Theile darf aber angenommen werden, dass auch die Menge oder Masse der die Grenzfläche in der Zeiteinheit passirenden Theilchen ε wachse, so dass also ein gleichzeitiges Wachsen von α und ε mit der Temperatur Statt finde, wie es im vierten Falle angenommen worden ist.

Aus der Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^n,$$

ergiebt sich sodann folgende Gleichung für die Intensität des Wärmestroms

$$\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2 = \varepsilon\alpha^2\left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\cdot\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}\right) = \varepsilon\alpha^2\left(1 - \left[\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right]^{n+1}\right).$$

Dividirt man nun diese Intensität des Wärmestroms mit der Intensität des elektrischen Stroms $(\varepsilon - \varepsilon') = \varepsilon\,(1 - \varepsilon'/\varepsilon)$, so erhält man das Verhältniss beider Intensitäten

$$= \alpha^2\left(1 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \ldots + \left[\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right]^n\right).$$

Man ersieht hieraus, dass, für $n = o$, dieser vierte Fall mit dem schon betrachteten dritten Falle ganz zusammenfällt, indem in beiden Fällen

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2} = \frac{1}{\alpha^2}$$

erhalten wird.

Der diesem Falle nächstliegende Fall ist $n = 1$, für welchen

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2} = \frac{1}{\alpha^2\left(1 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)}$$

erhalten wird. Aus den stets sehr kleinen Verschiedenheiten zwischen zwei benachbarten Molekulen eines Leiters ergiebt sich nun aber ferner,

dass der Werth von ε'/ε nur sehr wenig von 1 verschieden sei, wenigstens bei schwachen Strömen in guten Leitern, so dass näherungsweise in dem eben betrachteten vierten Falle

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon a^2 - \varepsilon' a'^2} = \frac{1}{2a^2}$$

erhalten wird. Es gilt also auch in diesem Falle wenigstens *näherungsweise* die von Kohlrausch gemachte Annahme, dass das Intensitätsverhältniss des elektrischen und Wärmestroms $(\varepsilon - \varepsilon')/(\varepsilon a^2 - \varepsilon' a'^2)$ einen konstanten, nur von der Beschaffenheit des Leiters abhängigen Werth habe. Hieraus folgt, dass *näherungsweise* für diesen vierten Fall sich dieselben Folgerungen ergeben, welche Kohlrausch aus seiner Annahme deducirt hat, insbesondere auch das Gesetz der thermo-elektromotorischen Kräfte, dass nämlich diese Kräfte nur von den Temperaturen der Kontaktstellen abhängen und den Temperaturdifferenzen an diesen Stellen proportional sind.

Wird bei dieser von Kohlrausch gegebenen Herleitung des Gesetzes der thermo-elektromotorischen Kräfte auch keine *Kontaktwirkung* zu Hülfe genommen, so leuchtet doch ein, dass darum keineswegs die Kontaktwirkung ganz ausgeschlossen ist, sondern dass dieselbe möglicher Weise zu jener hinzukommt.

9.

Leitungswiderstand und Stromintensitäts-Maximum.

Befindet sich die Elektricität in metallischen Leitern von molekularer Konstitution wirklich in der Art. 6 angegebenen Bewegung, wonach nämlich die positiv elektrischen Theile sich um die an ponderablen Massen haftenden negativen Theile drehen, dabei aber nicht immer in derselben Kreisbahn bleiben, sondern von einer kleinsten Kreisbahn beginnend, sich bei wachsendem Halbmesser einem anderen Molekule nähern und endlich zu diesem Molekule übergehen; so ergiebt sich eine Abhängigkeit der Stromintensitäten von den elektromotorischen Kräften in solchen Leitern, welche mit der im Ohm'schen Gesetze angegebenen nicht ganz übereinstimmt, sondern darin abweicht, dass die Stromintensität mit der elektromotorischen Kraft nicht immer gleichmässig fortwächst, sondern sich endlich einem bestimmten Grenzwerthe nähert, den sie nicht überschreitet. Dieser Grenzwerth würde aber nur dann erreicht werden, wenn die Richtungen aller in Strombewegung übergehenden Theile, wie verschieden sie auch anfänglich gewesen sein mögen, durch die immer mehr vergrösserte elektromotorische Kraft in

kürzester Zeit ganz in die Richtung dieser Kraft gebracht würden. Die Intensität des Stroms würde dann nicht weiter wachsen können und also ihr Maximum erreicht haben. Es würden hiernach Versuche mit sehr grossen und kleinen elektromotorischen Kräften im nämlichen Leiter, um zu entscheiden, ob die Intensitäten der von ihnen erregten Ströme ihnen immer proportional seien, von grösster Wichtigkeit sein.

Es sei Fig. 1 A ein Molekul, von welchem aus positiv elektrische Theilchen nach allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit a geworfen werden. Eine solche Richtung sei AB, und ξ sei der Weg, welchen das Theilchen mit seiner Geschwindigkeit a in der Zeit t zurücklegen würde. Auf dieses Theilchen wirkt aber eine konstante (elektromotorische) Kraft in der mit AC parallelen Richtung, welche mit AB den Winkel ψ einschliesst, und das Theilchen würde dadurch allein in der Zeit t, einen mit t^2 oder mit ξ^2 proportional wachsenden Weg η zurücklegen.

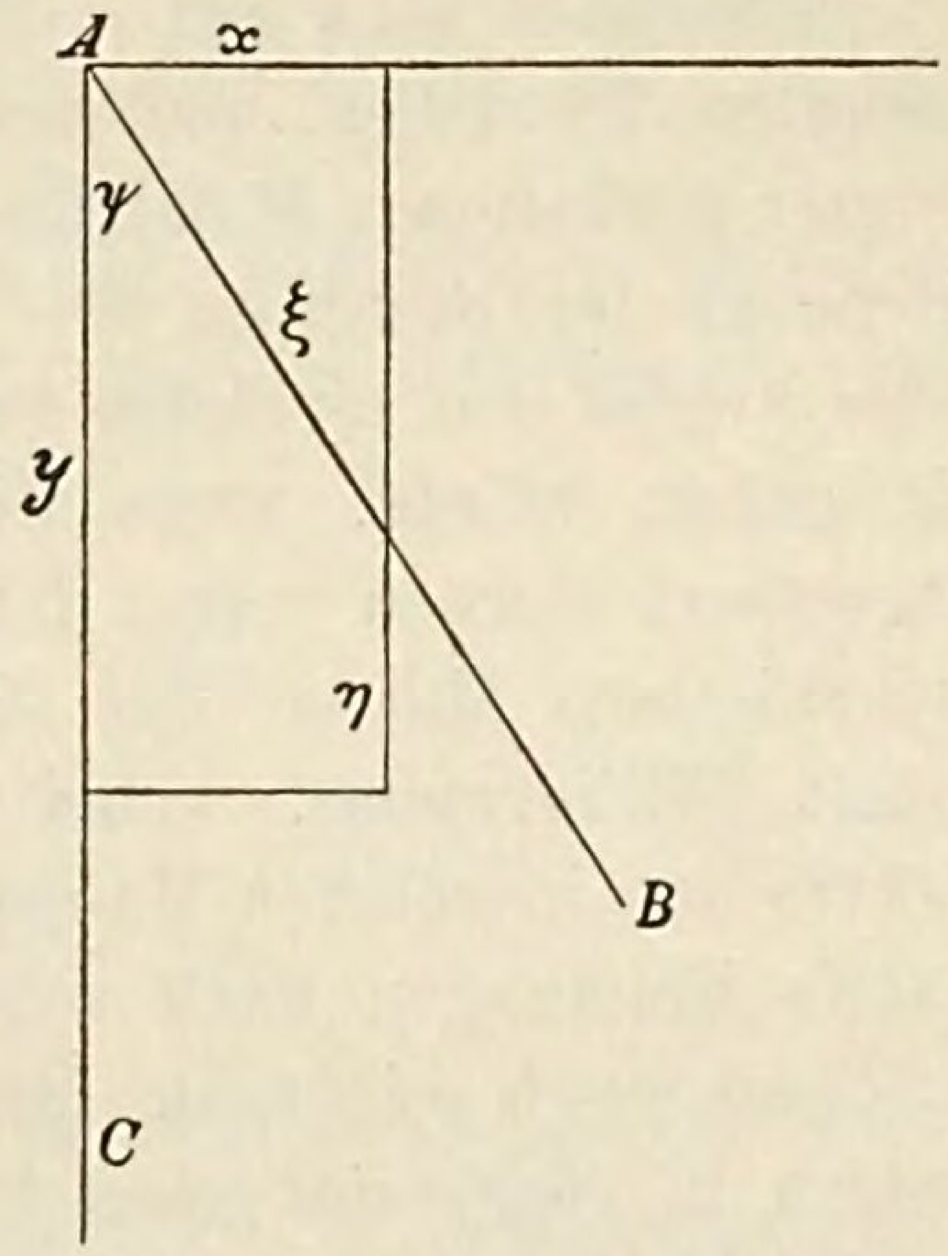


Fig. 1.

Man setze hiernach

$$\eta = a\xi^2,$$

ferner

$$x = \xi \sin \psi,$$

$$y = \xi \cos \psi + \eta = x \cot \psi + \frac{a}{sin\, \psi^2} \cdot x^2,$$

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

woraus

$$y = \cot \psi \,.\, \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{a}{sin\, \psi^2} \cdot (r^2 - y^2)$$

erhalten wird. Diese Wurfbewegung erreiche ihr Ende, wenn die Entfernung des Theilchens von A gleich r geworden ist, indem das Theilchen alsdann zum benachbarten Moleküle gelangt. Diese Entfernung r ist unabhängig von der Richtung der Wurfbewegung und kann für alle von A ausgeworfenen Theilchen als gleich angenommen und als mittlerer Molekularabstand bezeichnet werden.

Zunächst ergiebt sich hieraus, weil je grösser die mit a proportionale elektromotorische Kraft ist, desto mehr alle übrigen Glieder obiger Gleichung gegen dasjenige Glied verschwinden, welches a zum Faktor

hat, dass für wachsende elektromotorische Kraft y^2 sich einem Grenzwerthe nähert, nämlich

$$y^2 = r^2,$$

welcher für alle von A ausgeworfenen Theilchen gleich ist. Es ergiebt sich also, dass der in der Richtung der Kraft von allen Theilchen zurückgelegte Weg alsdann gleich, nämlich $= r$, sein würde.

Bezeichnet man mit ε die Masse der von A in der Zeiteinheit ausgesandten Theilchen, und mit n die Zahl der im Leiterelement von der Länge r enthaltenen Molekule; so ist $n\varepsilon$ die Masse positiver Elektricität, welche in der Richtung der elektromotorischen Kraft durch die Grenzfläche zweier auf einander folgender Molekularschichten in der Zeiteinheit gehen würde, wenn die elektromotorische Kraft ins Unendliche vergrössert worden wäre, d. i. der Grenzwerth der Stromintensität nach mechanischem Maasse mit Zugrundelegung der mechanischen Masseneinheit (Milligramm), wobei nur zu bemerken ist, dass man, weil die Elektricität in solchen Masseneinheiten nicht bestimmbar ist, bei Intensitätsbestimmungen nach sogenanntem mechanischen Maasse die Elektricitätsmengen nicht in Masseneinheiten der Mechanik (Milligramm), sondern in *elektrostatischen* Einheiten auszudrücken pflegt.

Bezeichnet nun σ die Zahl der *elektrostatischen* Einheiten, welche auf die Masseneinheit der Mechanik (Milligramm) gehen; so erhält man obigen Grenzwerth der Stromintensität nach sogenanntem mechanischen Maasse $= n\varepsilon\sigma$, oder wenn man die Bezeichnung der auf die drei Grundmaasse der Mechanik (nämlich der Masse M, der Entfernung R und der Zeit T) zurückgeführten Maasseinheit hinzufügt,

$$= n\varepsilon\sigma \,.\left[\sqrt{\frac{MR^3}{T^4}}\right].$$

Nach *elektrostatischen* Einheiten wird nämlich eine Elektricitätsmenge durch eine Kraft (welche diese Elektricitätsmenge auf eine ihr gleiche ausübt) $= f\,.\,[MR/T^2]$ und durch eine Entfernung (aus welcher diese Kraft ausgeübt wird) $= r\,.\,[R]$ bestimmt und ausgedrückt durch

$$r\sqrt{f}\,.\left[\sqrt{\frac{MR^3}{T^2}}\right];$$

die Stromintensität nach mechanischem Maasse ist aber der Quotient einer solchen durch den Querschnitt des Leiters gegangenen Elektricitätsmenge dividirt durch die Dauer des Durchgangs $= t\,.\,[T]$, also $= r\sqrt{f}/t\,.\,[\sqrt{MR^3/T^4}]$.

Im vorliegenden Falle war $r\sqrt{f}/t = n\varepsilon\sigma$.

Es ist übrigens bei dieser Bestimmung des Grenzwerths der Stromintensität angenommen worden, dass die elektromotorische Kraft selbst auf die Zahl der von den Molekulen ausgesandten elektrischen Theilchen keinen Einfluss habe.

Ist nun dagegen die elektromotorische Kraft oder die damit proportionale Grösse a sehr klein, so kann in der gefundenen Gleichung:

$$y = \cot\psi \,.\, \sqrt{r^2 - y^2 + \frac{a}{\sin\psi^2} \cdot (r^2 - y^2)},$$

im letzten Gliede, welches a zum Faktor hat, für y^2 der Näherungswerth gesetzt werden, der sich für $a = o$ aus der Gleichung ergiebt, nämlich $y^2 = r^2 \cos\psi^2$. Man erhält alsdann

$$y = \cot\psi \,.\, \sqrt{r^2 - y^2 + ar^2},$$

und ebenso hieraus näherungsweise

$$y = \pm r \cos\psi + ar^2 \sin\psi^2.$$

Hiernach ergiebt sich im Mittel für die beiden Theilchen, welche von A aus in den durch die Winkel ψ und $\pi - \psi$ bestimmten Richtungen ausgesandt werden,

$$y = ar^2 \sin\psi^2.$$

Der Mittelwerth der von allen von A ausgesandten Theilchen in der Richtung der Kraft zurückgelegten Wege wird hiernach erhalten

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y \sin\psi\, d\psi = ar^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi^3\, d\psi = \frac{2}{3}\, ar^2.$$

Wäre dieser Werth $= r$, so würde die Stromintensität dieselbe sein, wie der vorher betrachtete Grenzwerth, nämlich $= n\varepsilon\sigma \,.\, [\sqrt{MR^3/T^4}]$; hiervon beträgt nun die wirkliche Stromintensität nur einen sehr kleinen Bruchtheil, nämlich $\frac{2}{3}\, ar$, wonach diese Stromintensität i^0 erhalten wird:

$$i^0 = \frac{2}{3}\, ar \,.\, n\varepsilon\sigma \,.\, \left[\sqrt{\frac{MR^3}{T^4}}\right].$$

Zur Bestimmung des Koefficienten a endlich werde noch bemerkt, dass wenn γ die beschleunigende Kraft bezeichnet, welche auf die von A ausgesandten Theilchen wirkt,

$$\eta = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1}{2}\gamma \cdot \frac{\xi^2}{\alpha^2} = a\xi^2$$

ist, woraus sich ergiebt:

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{a^2},$$

folglich

$$i^0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma r}{a^2} \cdot n\varepsilon\sigma \, . \left[\sqrt{\frac{MR^3}{T^4}}\right].$$

Durch Division der nach *mechanischem* Maasse ausgedrückten Stromintensität i^0 mit $c/2\sqrt{2}$, nämlich mit der Zahl der elektrostatischen Einheiten, welche auf eine magnetische Einheit gehen, erhält man dieselbe nach *magnetischem* Maasse ausgedrückte Stromintensität i, nämlich

$$i = \frac{2\sqrt{2}}{3c} \cdot \frac{\gamma r}{a^2} \cdot n\varepsilon\sigma \, . \left[\sqrt{\frac{MR}{T^2}}\right].$$

Es ist nun ferner die *elektromotorische Kraft* für die Längeneinheit des Leiters nach *mechanischem* Maasse e^0 das Produkt der Beschleunigung γ in die Masse der in der Längeneinheit des Leiters in Strömung begriffenen Elektricität $= n\varepsilon/r$, dividirt durch die Zahl der in der Längeneinheit in Strömung begriffenen elektrostatischen Einheiten $= n\varepsilon\sigma/r$, wonach also

$$e^0 = \frac{\gamma}{\sigma} \cdot \left[\sqrt{\frac{M}{RT^2}}\right].$$

Hieraus ergiebt sich die elektromotorische Kraft für die Längeneinheit des Leiters nach *magnetischem* Maasse e durch Vertauschung der Zahl der elektrostatischen Einheiten $n\varepsilon\sigma/r$ mit der Zahl der magnetischen Einheiten $n\varepsilon\sigma/r \, . \, 2\sqrt{2}/c$, wonach

$$e = \frac{c}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\gamma}{\sigma} \cdot \left[\sqrt{\frac{MR}{T^4}}\right].$$

Substituirt man nun den hieraus sich ergebenden Werth von γ in der vorhergehenden Gleichung zur Bestimmung von i, so erhält man

$$i = \frac{8}{3c^2} \cdot \frac{er}{a^2} \cdot n\varepsilon\sigma^2 \, . \left[\sqrt{\frac{MR}{T^2}}\right].$$

Bezeichnet nun l die Länge des geschlossenen Leiters, so ist el die ganze auf den geschlossenen Leiter wirkende elektromotorische Kraft, und i die Intensität des dadurch erzeugten Stroms, nach *magnetischem* Maasse. Hieraus ergiebt sich der Widerstand w des geschlossenen Leiters

$$w = \frac{el}{i} = \frac{3c^2}{8} \cdot \frac{a^2}{n\varepsilon\sigma^2} \cdot \frac{l}{r} \cdot \left[\frac{R}{T}\right],$$

d. i. eine *Definition des Widerstands*, ganz unabhängig von der dem OHM'schen Gesetze gemässen Bestimmung des Widerstands, durch Messung der elektromotorischen Kraft und Stromintensität.

Es ergiebt sich hiernach für das *Leitungsvermögen* $= 1/w$ eine Bestimmung aus seinen in der Ablenkung der Theilchen von ihren Wurfbahnen liegenden Ursachen. Es leuchtet nämlich ein, dass das *Leitungsvermögen* proportional sein müsse 1. der im Leitungskanale in Wurfbewegung befindlichen Masse, 2. der in dieser Masse von einer bestimmten Kraft auf einem bestimmten Wege hervorgebrachten Ablenkungsgeschwindigkeit. Im Leiterelemente r ist nun jene Masse $n\varepsilon$, und die Ablenkungsgeschwindigkeit durch eine bestimmte Kraft auf der Bahnstrecke r ergiebt sich *dem Quadrate der Wurfgeschwindigkeit* a^2 *umgekehrt proportional*. Hiernach müsste das *Leitungsvermögen* $1/w$ mit $n\varepsilon/a^2$, folglich der *Leitungswiderstand* w mit $a^2/n\varepsilon$ proportional sein. Da dies für den Widerstand des *Leiterelements* r gilt, so ergiebt sich der *Widerstand eines Leiters von beliebiger Länge* l proportional mit $a^3/n\varepsilon \,.\, l/r$, was mit obiger Formel übereinstimmt, wonach dieser Widerstand dem Produkte dieser Grösse in den *konstanten Faktor* $3c^2/8\sigma^2$ gleich ist.

Diese Definition des Leitungswiderstands gewährt besonderes Interesse noch darum, weil daraus folgt, dass für einen Leiter, falls ausser den Werthen von l, n, r, auch sein Widerstand w konstant ist, das Verhältniss der beiden Variablen a^2 und ε, nämlich a^2/ε, ebenfalls konstant sein müsste, d. h., wenn a^2 und ε sich verändert haben und a'^2 und ε' geworden sind, dass alsdann

$$\frac{a^2}{\varepsilon} = \frac{a'^2}{\varepsilon'} \quad \text{oder} \quad \frac{a^2}{a'^2} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$$

sein müsste.

Hieraus ergiebt sich nun, dass, wenn der Widerstand w eines Leiters konstant wäre und sich auch nicht mit der Temperatur des Leiters änderte, der Werth a^2/ε für diesen Leiter auch konstant sein würde, wonach für einen solchen Leiter, Art. 8 gemäss, die von KOHLRAUSCH aufgestellte Ansicht von der Thermo-elektricität gelten würde. Da nun aber der Widerstand metallischer Leiter mit der Temperatur sich mehr oder weniger ändert, so ergiebt sich, dass die von KOHLRAUSCH aufgestellte Ansicht nur näherungsweise Geltung haben könne und zwar am meisten für solche metallische Leiter, deren Widerstand sich mit der Temperatur der Leiter am wenigsten ändert, woraus zu folgen scheint, dass diese Leiter zur Darstellung thermomagnetischer Ketten am geeignetsten sein müssten.

10.

Vertheilung der Elektricität in Konduktoren.

Die *Elektrostatik* ist von Coulomb und Poisson vor Entdeckung des Elektromagnetismus und der Elektrodynamik begründet und entwickelt worden, und es hat daher keine Rücksicht auf diese grossen Entdeckungen von ihnen genommen werden können. Die in der Elektrostatik entwickelten Gesetze der Vertheilung der in Konduktoren in Ruhe und Gleichgewicht befindlichen elektrischen Fluida, sowie der von ihnen bei dieser Vertheilung ausgeübten Kräfte, sind nun zwar sämmtlich, soweit Beobachtung und Messung reicht, in Uebereinstimmung mit der Erfahrung befunden worden; es hat sich aber aus den neuen Entdeckungen, insbesondere des Elektromagnetismus und der Elektrodynamik, ergeben, dass ein solcher Gleichgewichtszustand der elektrischen Flüssigkeiten, wie ihn Coulomb und Poisson in den Konduktoren angenommen, wirklich gar nicht existirt, sondern dass vielmehr alle elektrischen Flüssigkeiten in den Konduktoren sich immer in *beharrlicher Bewegung* um alle ponderable Molekule herum befinden, woraus folgt, dass streng genommen die von Poisson entwickelten Vertheilungs- und Wirkungsgesetze *ruhender* Elektricität gar keine Anwendung auf die in Konduktoren befindliche Elektricität finden.

Alle bisher in der *Elektrostatik* betrachteten Erscheinungen gehören demgemäss eigentlich der *Elektrodynamik* an, in deren Gesetzen ihre vollständige Erklärung gesucht werden muss. Die Elektrostatik, welche früher den grössten und wichtigsten Theil der Elektricitätslehre bildete und am festesten begründet erschien, müsste demgemäss, wie es scheint, eine gänzliche Umgestaltung erleiden. An eine solche Umgestaltung muss aber die Anforderung gemacht werden, dass sie den ganzen bisher *elektrostatisch* erklärten Kreis von Erscheinungen ebenso vollständig und genau *elektrodynamisch* zu erklären vermöge, was bisher nicht geschehen und wozu auch noch nicht einmal ein Versuch gemacht worden ist.

Bei aller Geneigtheit, die man einerseits findet, die von Coulomb und Poisson der mit der Elektrostatik gleichzeitig entwickelten Lehre vom Magnetismus zu Grunde gelegte Vorstellung von *magnetischen Fluidis* aufzugeben, so scheint doch andererseits eine gewisse Scheu vor den damit verbundenen Konsequenzen vorhanden zu sein, nämlich vor der alsdann unentbehrlichen Vorstellung von der Existenz beharrlicher Molekularströme in allen magnetischen und diamagnetischen Körpern, wonach die Elektricität niemals und nirgends zur Ruhe und zum Gleichgewicht gelangt. Dazu kommt, dass jetzt noch jeder Ver-

such zur *elektrodynamischen* Erklärung aller früher *elektrostatisch* betrachteten Erscheinungen überhaupt grosse Schwierigkeiten findet, namentlich wegen mangelnder Hülfe von Seiten der Mathematik, die bei so komplicirten Vorgängen noch lange Zeit als machtlos sich erweisen dürfte.

Aus gleichem Grunde ist aber auch bei Begründung der *Elektrostatik* ebensowenig ein Versuch gemacht worden, von der Konstitution des sogenannten *neutralen Fluidums* und vom *Scheidungsprocesse* dieses Fluidums in den Konduktoren genauere Rechenschaft zu geben, sondern man hat sich auf eine allgemeine Annahme von der gegenseitigen Beweglichkeit der beiden Bestandtheile des neutralen Fluidums, auch bei ihrer Vermischung, beschränkt, wodurch man die Entwickelung der elektrischen Vertheilungsgesetze von der näheren Kenntniss der Konstitution des im Innern der Konduktoren überall verbreiteten, neutralen Fluidums unabhängig zu machen gesucht hat.

Im Grunde wird aber durch diese in der Elektrostatik gemachte Annahme von der gegenseitigen Beweglichkeit der beiden Bestandtheile des neutralen Fluidums, über die innere Konstitution dieses Fluidums selbst gar nichts bestimmt und festgestellt, besonders nichts darüber, ob die beiden Bestandtheile vor ihrer Scheidung sich in Ruhe und Gleichgewicht, oder ob sie sich in Bewegung gegen einander, z. B. in drehender Bewegung um einander, befinden, so dass die Vorstellung von beharrlichen Molekularströmen durch die in der Elektrostatik gemachte Annahme von der gegenseitigen Beweglichkeit der beiden Bestandtheile des neutralen Fluidums im Grunde noch gar nicht ganz ausgeschlossen erscheint; vielmehr könnte die Vorstellung von beharrlichen Molekularströmen als ein Erklärungsversuch von der angenommenen gegenseitigen Beweglichkeit beider Bestandtheile angesehen werden. Es steht hiernach die Elektrostatik, wie sie von Poisson entwickelt worden, ungeachtet sie als die Lehre von der Vertheilung der in Konduktoren zur *Ruhe und zum Gleichgewicht* gelangten Elektricität definirt zu werden pflegt, doch mit der Existenz beharrlicher Molekularströme der Elektricität im Innern der Konduktoren in keinem direkten Widerspruche. Wir haben eine *Statik fester Körper*, eine *Hydrostatik* und *Aerostatik*, welche auch fest begründet erschienen und von denen ganz dasselbe gilt. Auch sie werden als die Lehre von der Ruhe und dem Gleichgewichte dieser Körper definirt, womit es jedoch nicht in Widerspruch steht, dass diese Körper in ihrem Innern von Theilchen erfüllt sind, die sich nicht in Ruhe, sondern fortwährend in Bewegung befinden und zwar in grosser Bewegung. Denn gerade so wie die *magnetischen* und *diamagnetischen* Erscheinungen der Körper auf fortwährende innere Bewegungen (elektrische Molekularströme) in

denselben geführt haben, ebenso haben bei jenen festen, flüssigen und luftförmigen Körpern, für welche die Statik, Hydrostatik und Aerostatik gelten, die *Wärmeerscheinungen* auf solche fortwährende innere Bewegungen geführt. Denn jedem ponderablen Körper kommt in jedem Augenblicke eine bestimmte Temperatur zu, welche die Wirkung der Wärme ist, die der Körper enthält, und diese Wärme ist nichts anderes als die lebendige Kraft, welche den im Innern des Körpers enthaltenen bewegten Theilen zukommt. Aus der messbaren Grösse dieser lebendigen Kraft (dem mechanischen Wärmeäquivalent) hat sich aber ergeben, dass diese Bewegungen im Innern aller dieser Körper sehr gross sind.

Bewegen sich im *Innern der Konduktoren* positiv elektrische Theilchen um die an ponderablen Massen haftenden negativ elektrischen Theilchen, bleiben aber bei dieser Bewegung nicht immer in derselben Kreisbahn, sondern nähern sich bei wachsendem Halbmesser den benachbarten Molekulen, zu denen sie endlich übergehen, und finden solche Uebergänge von einem Molekule im Innern des Konduktors indifferent in allen Richtungen zu allen benachbarten Konduktormolekulen Statt, von denen gleichzeitig ein gleiches Aussenden von Theilchen nach allen Richtungen zu allen Nachbarmolekulen Statt findet, so ergiebt sich dagegen für diejenigen Molekule des Konduktors, welche seiner Oberfläche zunächst liegen, dass sie auf ihrer äusseren Seite Isolatormolekule statt Konduktormolekule zu Nachbarn haben, von denen aus keine solche Aussendung Statt findet, und die auch die von anderen Molekulen ausgesendeten Theilchen nicht aufnehmen. Es ergiebt sich hieraus, wenn einzelne Theilchen bei wachsendem Halbmesser ihrer Kreisbahn sich von ihrem Mittelpunkte so weit entfernt haben, dass sie zu dem Nachbarmolekule übergehen würden, wenn auf der Seite, wo sie sich eben befinden, noch andere Konduktormolekule befindlich wären, dass dies nicht geschehen wird, wenn auf der Seite, wo sie sich befinden, gar keine Konduktormolekule, sondern nur Isolatormolekule vorhanden sind. Jene Theilchen werden alsdann in ihrer Kreisbahn mit wachsendem Halbmesser noch etwas weiter fortgehen, bis sie zu einer Seite gelangen, wo wieder andere Konduktormolekule sich in der Nachbarschaft befinden. Dies wird der Fall sein, wenn die Resultante aller elektrischen Kräfte an dieser Grenze von Konduktor und Isolator Null ist.

Wenn dagegen diese Resultante von Null verschieden und *nach aussen* gerichtet ist, so kann sie denselben Einfluss ausüben, wie ein benachbartes Konduktormolekule, sie kann nämlich bewirken, dass das Theilchen auch auf Seite des angrenzenden Isolators seine um das Konduktormolekule bisher verfolgte Bahn verlässt und an den benachbarten Isolatortheilchen festgehalten wird. Hiernach können solche ausgeschiedene Theilchen der positiven Elektricität überall an den Grenzflächen

zwischen Konduktor und Isolator sich sammeln, an jeder Stelle der Grösse der daselbst nach aussen gerichteten Resultante gemäss.

Wenn die Resultante von Null verschieden und *nach innen* gerichtet ist, so wird die Wirkung derselben auf Vermehrung der von den nächsten Konduktormolekulen *nach innen* gesendeten Theilchen nur dadurch kompensirt werden können, dass die Menge der in diesen Konduktormolekulen befindlichen positiv elektrischen Theilchen etwas verkleinert wird, während die Menge der an der ponderablen Masse haftenden negativ elektrischen Theilchen, um die sich jene drehen, unverändert bleibt.

Für den Ueberschuss von positiver Elektricität an einigen Stellen der Grenzfläche von Konduktor und Isolator, und für den Mangel an positiver Elektricität in den an anderen Stellen dicht an den Isolator angrenzenden Konduktormolekulen (welcher Mangel an positiver Elektricität einem Ueberschuss an negativer Elektricität äquivalent ist) gelten offenbar die von Poisson entwickelten Vertheilungsgesetze, wonach Ueberschuss an positiver oder negativer Elektricität ebenfalls nur an der Grenzfläche von Konduktor und Isolator Statt findet. Denn es ist für diese Vertheilungsgesetze der Elektricität an der Oberfläche gleichgültig, ob im Innern des Konduktors sogenanntes scheidbares, neutrales Fluidum, wie Poisson annimmt, oder ob Konduktormolekule mit darum sich bewegender Elektricität vorhanden sind, zwischen denen ein fortwährender Austausch einzelner Theilchen Statt findet. Solche Konduktormolekule sollen auf die Vertheilung der Elektricität an der Oberfläche ebensowenig Einfluss haben, wie das von Poisson angenommene neutrale Fluidum, und umgekehrt hat die an der Oberfläche nach dem Poisson'schen Gesetze vertheilte Elektricität auf die Konduktormolekule keinen Einfluss, denn die Vertheilung der Elektricität an der Oberfläche wird nach Poisson eben dadurch bestimmt, dass die Resultante aller von der an der Oberfläche vertheilten Elektricität auf irgend einen Punkt im Innern ausgeübten Kräfte gleich Null sein soll, eine Forderung, die ganz unabhängig davon ist, ob an der betrachteten Stelle im Innern des Konduktors neutrales Fluidum ist oder ob Konduktormolekule mit elektrischen Molekularströmen sich daselbst befinden. — Die wahre Konstitution der Körper und die davon abhängigen wahren, wenn auch komplicirteren Vorgänge, die von einfacheren Vorgängen doch nur theilweise vertreten gedacht werden können, werden, aller Hindernisse ungeachtet, doch immer Gegenstand und letztes Ziel der Forschung bleiben.

XI.

Bemerkungen zu Edlund's Erwiderung auf zwei gegen die unitarische Theorie der Elektricität gemachte Einwürfe.[1]

Von

W. Weber.

(Briefliche Mittheilung.)

Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von J. C. Poggendorff, Bd. 157, Leipzig 1876, p. 146—149.

Zunächst muss ich mir die Bemerkung erlauben, dass der erste gegen Neumann gerichtete Einwurf gar nicht denselben trifft. Neumann hat nämlich in der „Nachschrift" seiner Abhandlungen im 155. Bande der Annalen, S. 228, *erstens* die Thatsachen der sogenannten *unipolaren Induktion* angeführt, und hat *zweitens* daraus bewiesen, dass (wenn die Vorstellung überhaupt richtig sei, dass die Wirkungen des elektrischen Stroms irgend welchen Materien zuzuschreiben sind, die mit gewissen Geschwindigkeiten in der Strombahn dahinfliessen) mindestens *zwei* solche Materien anzunehmen seien.

Gegen die letztere Neumann'sche Beweisführung hat nun Edlund nichts eingewendet; aber auch die von Neumann angeführte, keineswegs von ihm aufgestellte oder verbürgte Thatsache, dass nämlich ein kreisförmiger, elektrischer Stromring von konstanter Stärke in einem *ungeschlossenen,* linearen Leiter keine elektromotorische Kraft inducire, falls beide fest aufgestellt sind, hingegen eine elektromotorische Kraft *von gewissem Werthe* inducire, falls er um seine geometrische Axe mit konstanter Geschwindigkeit rotire, — hat Edlund in seiner Erwiderung ebenfalls angeführt und ausdrücklich hinzugefügt, dass sie der allgemeinen Vorstellung über den physischen Verlauf bei der *unipolaren Induktion* wirklich entspreche. Sein gegen die *Richtigkeit der Thatsache* erhobener Zweifel aber trifft Neumann, der sich nicht dafür verbürgt hat, gar nicht.

[1]) Poggendorff's Annalen, Bd. 156, S. 590.

Edlund führt die Thatsache der unipolaren Induktion, S. 592, mit folgenden Worten an: „Die Erfahrung lehrt, dass wenn eine *geschlossene* still liegende Leitungsbahn b sich in der Nähe eines um seine Axe rotirenden Magnets befindet, kein Induktionsstrom in der geschlossenen Leitungsbahn entsteht. — Die Ursache ist nach der gewöhnlichen Vorstellungsweise die, dass der rotirende Magnet in dem einen Theile b_1 der geschlossenen Leitungsbahn einen Induktionsstrom wirklich hervorrufe, dieser aber ebenso gross sei als der, der durch den Magnet im übrigen Theile b_2 der Leitungsbahn hervorgerufen wird; diese beiden Induktionsströme gehen aber in entgegengesetzter Richtung und heben demnach einander auf. Wird aber der Bahntheil b_1 fest mit dem Magnet verbunden und dieser um seine Axe in Rotation versetzt, so wirkt der Magnet nicht auf diesen Bahntheil b_1 ein. Wenn nun bei dem Versuche die Anordnungen so sind, dass b_1 ungeachtet der Rotation fortwährend mit dem anderen Bahntheile b_2 in galvanischer Verbindung steht, so erhält man in der Leitung einen Induktionsstrom; das ist nämlich der Strom, der durch Induktion des rotirenden Magneten in dem Bahntheile b_2 entsteht."

Edlund stellt nun aber die *Richtigkeit* dieser von ihm selbst angeführten Thatsache in Abrede, dass nämlich die Rotation an und für sich (sei es ein Stromring oder ein Magnet, der rotirt) auf einen in der Nähe befindlichen *still liegenden Theil* eines geschlossenen Leiters eine besondere inducirende Wirkung ausübe, vielmehr behauptet er, dass von der Erfahrung das Gegentheil bestätigt werde, und beruft sich zum Beweise dieser Behauptung auf einen von Plücker angestellten Versuch, Bd. 87, S. 352 dieser Annalen, den er zu diesem Zwecke auch selbst wiederholt habe.

Nach Edlund's Beschreibung wird bei diesem Versuche ein Strom beobachtet in einer Leitungsbahn, welche immer geschlossen erhalten wird, während ein von einem kupfernen Cylinder b_1 gebildeter Theil derselben um die Axe eines im Cylinder befindlichen Magnets rotirt. — *Dieser Strom bleibt nach Richtung und Stärke unverändert, der Magnet im Cylinder möge still stehen oder mit dem Cylinder zusammen rotiren.*

Nach der gewöhnlichen Vorstellung von dem physischen Verlaufe bei der unipolaren Induktion, meint nun Edlund, hätte dieser Versuch anders ausfallen sollen. — Wenn nämlich der Cylinder b_1 allein rotirte und der Magnet in Ruhe war, konnte man letzteren mit dem ebenfalls still liegenden Galvanometerdrahte b_2 (welcher mit b_1 einen immer geschlossen bleibenden Leiter b bildete) als fest verbunden betrachten, so dass nach jener Vorstellungsweise die Induktion blos in b_1 Statt finden konnte; wenn dagegen der Magnet und der Cylinder b_1 mit gleicher Geschwindigkeit in gleicher Richtung rotirten, konnte man den

Magnet mit b_1 als fest verbunden betrachten, wonach die Induktion blos in b_2 Statt finden konnte.

Der inducirte Strom, fährt nun Edlund fort, musste demnach *jener Vorstellung gemäss* beim Uebergange von einem Versuche zum anderen die Richtung verändern, und daraus, dass dies nicht der Fall war, folgert Edlund, dass jene Vorstellung, die man sich von dem physischen Verlaufe bei der unipolaren Induktion bisher gebildet hat, *weil sie gegen die Erfahrung streite,* durchaus unrichtig sei.

Folgende Bemerkung wird genügen, um den von Edlund in dieser Deduktion begangenen Irrthum nachzuweisen.

Bei dem *ersten Versuche* rotirte (vorwärts) der inducirte Leitertheil b_1 und der Magnet stand still; bei dem *zweiten Versuche* rotirte (ebenfalls vorwärts) der Magnet, und der inducirte Leitertheil b_2 stand still.

Eine unmittelbare Vergleichung dieser beiden Versuche ist nicht statthaft, aber mittelbar lässt sie sich leicht bewerkstelligen, wenn man beachtet, dass es der Sache nach ganz identisch ist, ob der *Leiter vorwärts rotirt und der Magnet still steht,* oder ob *der Leiter still steht und der Magnet rückwärts rotirt.*

Setzt man im *ersten Versuche* demnach den letzten Fall statt des ersteren, so wird die Vergleichung mit dem *zweiten Versuche* ermöglicht, und man erhält das Resultat, dass der *rückwärts rotirende* Magnet (im ersten Versuche) im still stehenden *Leitertheile* b_1 einen Strom von *gleicher Richtung und Stärke* inducire, wie (im zweiten Versuche) der *vorwärts rotirende* Magnet im still stehenden Leitertheile b_2, was in vollkommener Uebereinstimmung mit der allgemeinen Vorstellung vom physischen Verlaufe bei der unipolaren Induktion steht, wie sie von Edlund selbst angegeben worden ist. — Hiernach werden nämlich, was von Edlund übersehen worden ist, in den beiden Theilen b_1 und b_2, welche zusammen eine immer geschlossene Leitungsbahn b bilden, *entgegengesetzte Ströme* nur dann inducirt, wenn der Magnet relativ gegen den Leiter *in gleicher Richtung rotirt,* sowohl wenn er b_1 als auch wenn er b_2 inducirt; dagegen werden in b_1 und in b_2 *gleichgerichtete Ströme* inducirt, wenn, wie bei obigen Versuchen, der Magnet bei der Induktion von b_1 (relativ gegen diesen Leiter) *rückwärts rotirt,* während er bei der Induktion von b_2 *vorwärts rotirt.*

Leipzig, 23. December 1875.

XII.

Elektrodynamische Maassbestimmungen

insbesondere über die

Energie der Wechselwirkung.

Von

Wilhelm Weber,
Mitglied der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften.

Mit einer Tafel.

[Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse, Bd. 11, Leipzig 1878, p. 641—696.]

Von dem im Jahre 1846 in den Elektrodynamischen Maassbestimmungen aufgestellten allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung,[1]) zu welchem in POGGENDORFF's Annalen 1848, Bd. 73, S. 229,[2]) noch das daraus abgeleitete *Potential* der elektrischen Kraft gefügt worden war, hatte HELMHOLTZ behauptet, und WILLIAM THOMSON, TAIT und Andere hatten ihm beigestimmt, dass es in Widerspruch mit dem Princip der Erhaltung der Energie stände; C. NEUMANN und MAXWELL haben jedoch das Gegentheil dargethan, indem sie den von HELMHOLTZ durch Aufstellung des Satzes, das Princip der Erhaltung der Energie gelte nur für Kräfte, die von der Entfernung *allein* abhängig seien, begangenen Irrthum nachwiesen.[3])

HELMHOLTZ hat darauf ein vollkommen *neues* Princip der Energie aufgestellt, dessen Unterschied vom *gewöhnlichen* Princip der Energie von NEUMANN mit folgenden Worten näher bestimmt worden ist: „Während das *gewöhnliche* Princip der Energie für jedes materielle System die Existenz einer *Energiefunktion*, d. i. die Existenz einer vom augenblicklichen Zustande des Systems abhängenden Funktion, verlangt, welche die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraum um eben so viel anzuwachsen, als die dem System während dieses Zeitraums zugeführte Arbeit beträgt, — verlangt das *neue* von HELMHOLTZ aufgestellte Princip nicht allein die *Existenz* einer solchen Funktion, sondern zugleich eine gewisse specielle *Beschaffenheit* derselben, indem es behauptet, der „*kinetische* Theil dieser Funktion (derjenige Theil derselben, welcher von der Geschwindigkeit abhängt) müsse stets positiv sein".

Hierzu bemerkt NEUMANN noch: „Es unterliegt keinem Zweifel, dass die physikalischen Principien ihrer Natur nach dehnbar und biegsam sind. Das *Princip der lebendigen Kraft* hat sich allmählig zum *Princip der Energie* ausgedehnt, und ist möglicher Weise einer noch weiteren Ausdehnung fähig".

[1]) Siehe Abhandlungen bei Begründung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1846. [WILHELM WEBER's Werke, Bd. III, p. 25.]

[2]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. III, p. 245.]

[3]) Siehe auch AD. MAYER: „Ueber den allgemeinsten Ausdruck der inneren Potentialkräfte eines Systems bewegter materieller Punkte, welches sich aus dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergiebt". Mathematische Annalen, Bd. 13, S. 20.

Wirklich liegt es ganz im Wesen und Gange *experimenteller Forschung*, sich eines solchen Princips als *Leitfadens* auch dann schon zu bedienen, wenn die *definitive* Formulirung noch fehlt und erst später aus den Resultaten der Forschung gewonnen werden kann; da aber einleuchtet, dass das Princip, um als *Leitfaden* der Forschung zu dienen, doch *formulirt* werden müsse, was also nur *versuchsweise* geschehen könne, so ergiebt sich als selbstverständlich, dass ein solches Princip *während* dieser Forschung wirklich *dehnbar* und *biegsam* sei.

Wenn Helmholtz hiernach berechtigt war, das Princip der Energie *versuchsweise* in der Art zu formuliren, dass mein von ihm verworfenes Grundgesetz damit *in Widerspruch* geriethe, so ist offenbar das Gegentheil ebenso berechtigt, nämlich dasselbe Princip *versuchsweise* so zu formuliren, dass es nicht allein *in Uebereinstimmung* mit jenem Grundgesetze stehe, sondern dass letzteres sogar als nothwendige Folge desselben sich ergebe, indem bewiesen werde, dass alle *elektrodynamischen* Gesetze, zu denen jenes Grundgesetz gehört, mittelst des versuchsweise aufgestellten Princips aus den *elektrostatischen* Gesetzen abgeleitet werden können. Dies zu versuchen ist der Zweck der vorliegenden Abhandlung, wodurch statt des in der ersten Abhandlung aufgestellten allgemeinen Grundgesetzes *der elektrischen Wirkung*, welches Elektrostatik und Elektrodynamik zugleich umfasste, das *Princip der Erhaltung der Energie* an die *Spitze* gestellt wird, woraus dann in Verbindung mit dem *statischen* Grundgesetze der Wechselwirkung zweier Theilchen *erstens* jenes Grundgesetz der elektrischen Wirkung, *zweitens* die Existenz einer *Energiefunktion* für jedes Theilchenpaar, aus der die Geltung des *gewöhnlichen* Princips der Energie folgt, wie es von Neumann ausgesprochen worden ist, *deducirt* werden soll.

1.

Leitfaden der experimentellen Forschung in der Elektrodynamik.

Nach der durch die *allgemeinen Bewegungsgesetze der Körper* gewonnenen Grundlage blieben in der Physik wesentlich nur die *Gesetze der Wechselwirkungen der Körper* zu erforschen übrig; denn ohne Wechselwirkungen würden alle Körper im Zustande der Ruhe oder Bewegung, in dem sie sich befinden, *immer verharren.* Alle Veränderungen dieser Zustände und alle davon abhängigen Erscheinungen sind daher *Folgen* ihrer Wechselwirkungen.

Solche Wechselwirkungen üben nun aber die Körper sowohl in *Berührung* mit einander, als auch aus der *Ferne* aus, und es ergab sich leicht, dass mit der Erforschung der letzteren begonnen werden müsse,

um einen *Leitfaden* zur Erforschung der ersteren zu gewinnen, welcher besonders nöthig wird, wenn die räumlichen Verhältnisse der Körper sich der direkten Beobachtung entziehen, wie es bei den Wechselwirkungen sich berührender Körper der Fall ist. Auch ist dies wirklich geschehen, indem mit der Erforschung der Wechselwirkungen der *Weltkörper*, d. i. mit den *Gravitationswirkungen* begonnen wurde.

An dieses erste Gebiet erfolgreicher Erforschung der *Wechselwirkungen der Körper*, nämlich der Gravitationswirkungen, hat sich sodann zunächst die Erforschung der *elektrischen und magnetischen Wechselwirkungen* angeschlossen, weil ausser den Gravitationswirkungen diese Wirkungen die einzigen waren, welche von einem Körper auf den anderen *aus messbarer Entfernung* ausgeübt wurden und selbst durch Messung bestimmbar waren.

Lange Zeit hat nun fast allen theoretischen Untersuchungen über *Elektricität* und *Magnetismus*, insbesondere denen von Coulomb und Poisson, die Newton'sche Gravitationslehre als *Leitfaden* zu Grunde gelegen, bis endlich in Folge von Oersted's und Ampère's Entdeckungen in der *Aequivalenz geschlossener Ströme und Magnete* ein ganz *neuer Leitfaden* gewonnen wurde, welcher *erstens* auf die *Zurückführung aller magnetischen Wirkungen auf elektrische Stromwirkungen* leitete, und *zweitens* zur Aufstellung eines *Grundgesetzes der Wechselwirkung je zweier Stromelemente* führte.

Als ein *dritter Leitfaden* hat sodann die allgemeine Idee von der Zurückführung der Wechselwirkungen aller Körper unter einander auf blosse *Wechselwirkungen je zweier* gedient, wonach also auch die Wechselwirkungen von *Stromelementen* auf blosse Wechselwirkungen *je zweier elektrischen Theilchen* zurückführbar sein sollten. Diese Idee konnte im Allgemeinen, ganz abgesehen davon, dass das Gegentheil (nämlich Wechselwirkungen *dreier* oder mehrerer Körper, die nicht auf Wechselwirkungen *je zweier* zurückführbar wären) zu unendlichen Verwickelungen führen würde, erfahrungsmässig schon in weitem Kreise als fest begründet und bestätigt angesehen werden.

Die bei Wechselwirkung zweier Stromelemente wesentlich in Betracht kommenden Körpertheilchen waren nun ein positiv und ein negativ elektrisches Theilchen in jedem Stromelemente, zwischen denen vier von einander unabhängige Wechselwirkungen je zweier Theilchen unterschieden werden konnten. Zur Bestimmung dieser vier Wechselwirkungen bot sich das Coulomb-Poisson'sche (dem Gravitationsgesetze nachgebildete) Grundgesetz dar, welches sich im ganzen Gebiete der Elektrostatik bewährt hatte; die hiernach bestimmten vier Wechselwirkungen ergeben aber keine Gesammtwirkung, sondern alle einzelnen Wirkungen heben einander vollkommen auf, wonach also das Ampère'sche

Grundgesetz der Fernwirkungen elektrischer Stromelemente nicht zurückführbar war auf das Coulomb-Poisson'sche Grundgesetz der Wechselwirkung je zweier elektrischen Theilchen.

Das Coulomb-Poisson'sche Grundgesetz der Wechselwirkung je zweier elektrischen Theilchen war aber nur für je zwei in *relativer Ruhe* befindliche Theilchen aufgestellt worden, oder konnte wenigstens nur für solche Theilchen als erfahrungsmässig begründet gelten. Die vier elektrischen Theilchen in zwei Stromelementen bilden dagegen vier Paare von Theilchen, die nicht in relativer Ruhe, sondern *in relativer Bewegung* sich befinden, und es lag daher die Vermuthung sehr nahe, dass das Coulomb-Poisson'sche Grundgesetz der Wechselwirkung je zweier elektrischen Theilchen, *wenn diese Theilchen in relativer Bewegung sich befinden,* noch einer *Korrektion* bedürfe, welche mit x bezeichnet werden möge. Unterscheidet man dann die Korrektionen der obigen vier Wechselwirkungen von einander der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, x_4, so müsste die *Summe* derselben von Null verschieden und der durch Ampère's Gesetz bestimmten Kraft gleich sein.

Auf diese Weise wurde nun gefunden, dass, — wenn man zwei beliebige elektrische Theilchen nach absolutem Maasse mit e, e' und ihre relative Entfernung, Geschwindigkeit und Beschleunigung mit r, dr/dt und d^2r/dt^2 bezeichnet, und diese Werthe für die vier in zwei Stromelementen betrachteten Paare durch die Indices 1, 2, 3, 4 unterscheidet, — die durch das Ampère'sche Gesetz bestimmte Abstossungskraft zweier Stromelemente, nämlich

$$\frac{aa'ii'}{r^2}(3\cos\vartheta\cos\vartheta' - 2\cos\varepsilon)$$

(wo a, a' die Längen, i, i' die Stromintensitäten der beiden Stromelemente, r ihre Entfernung von einander, ϑ, ϑ' die Winkel, welche a und a' mit r bilden, und ε den Winkel bezeichnet, den a und a' mit einander bilden), durch die Summe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

wirklich dargestellt werde, wenn

$$x = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{ee'}{r^2}\left(2r\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{dr^2}{dt^2}\right)$$

gesetzt wird, worin c eine bestimmte *Konstante* bezeichnet, nämlich diejenige relative Geschwindigkeit zweier elektrischen Theilchen, bei welcher, während sie unverändert bleibt, keine Wechselwirkung Statt findet.

Um dies zu beweisen, ist nur erforderlich, die auf die Stromelemente sich beziehenden Grössen a, a', i, i' und die Winkel ϑ, ϑ' und ε durch die Grössenwerthe von e, e', r, dr/dt, d^2r/dt^2, bezogen auf die vier einzelnen Theilchenpaare, auszudrücken.

Diese *Korrektion* ist also der durch das Coulomb-Poisson'sche Grundgesetz bestimmten Abstossungskraft noch hinzuzufügen, wenn es für elektrische Theilchenpaare nicht blos in relativer Ruhe, sondern auch bei solchen Bewegungen gelten soll, die in Stromelementen Statt finden, für welche das Ampère'sche Gesetz gilt.

Es leuchtet aber ein, dass jene vier elektrischen Theilchen auch noch in *mannigfaltige andere relative Bewegungen* gebracht werden können, als diejenigen, welche in zwei Stromelementen, für welche das Ampère'sche Gesetz gilt, Statt finden. Es lassen sich nämlich leicht Einrichtungen treffen, wonach die beiden in einem Stromelemente befindlichen Theilchen positiver und negativer Elektricität, statt sich mit *gleicher und konstanter Geschwindigkeit in entgegengesetzten Richtungen* zu bewegen (wie Ampère voraussetzt), sich entweder in gleicher aber *veränderlicher* Geschwindigkeit in entgegengesetzten Richtungen, oder mit *ungleicher Geschwindigkeit* in Richtungen bewegen, die einen *beliebigen Winkel* mit einander bilden. Alle diese verschiedenen Fälle lassen sich leicht darstellen, theils indem man den im einen Leiter vorhandenen Strom, durch Oeffnen und Schliessen der Stromkette, bald *verschwinden,* bald wieder *entstehen* lässt, theils indem man den im Leiter entgegengesetzt strömenden Elektricitäten noch eine *gemeinsame Bewegung mit ihrem Leiter* ertheilt.

Gilt nun das *korrigirte* Coulomb-Poisson'sche *Gesetz* wirklich allgemein von zwei elektrischen Theilchen nicht blos in relativer Ruhe, oder wenn sie konstanten Strömen in ruhenden Leitern angehören, sondern auch bei allen ihren anderen Bewegungen, so muss daraus die Wirkung von Stromelementen, wie von einzelnen Theilchen, auch in den soeben angeführten, wie überhaupt in allen Fällen, wo das Ampère'sche Gesetz nicht gilt (die lange Zeit unbeachtet und unbeobachtet geblieben waren) vorausgesagt und vorausbestimmt werden können, was zur Prüfung und Bestätigung der allgemeinen Gültigkeit jenes Gesetzes dient. Es sind auf diese Weise wirklich *alle Gesetze der Volta-Induktion,* in vollkommener Uebereinstimmung mit den von Faraday entdeckten Erscheinungen, gefunden und durch die mannigfaltigsten Beobachtungen und Messungen allseitig bestätigt worden.

An dieses allgemeine Grundgesetz der Wechselwirkung zweier elektrischen Theilchen lassen sich nun noch weitere Betrachtungen über das *Wesen der Wechselwirkung* knüpfen.

Bei allen Veränderungen in der Körperwelt bleiben die *Massen*

der Körper immer unverändert, und auch die *lebendigen Kräfte* der Körper würden, wenn keine *Wechselwirkung* Statt fände, dem Trägheitsgesetze gemäss, unverändert bleiben. *Wechselwirkungen* ergeben sich demnach als Grund aller Veränderungen lebendiger Kräfte, und es liegt daher die Frage sehr nahe, ob nicht ebenso umgekehrt der Grund aller Veränderungen der Wechselwirkungen in den *lebendigen Kräften* zu suchen sei, sodass Verstärkung der Wechselwirkung nur gewonnen werde, wenn lebendige Kraft verloren geht, und dass umgekehrt lebendige Kraft nur gewonnen werde, wenn die Wechselwirkung eine Verminderung erleidet. *Wechselwirkung* der Körper wäre dann das *Aequivalent* für die verloren gegangene lebendige Kraft, und *lebendige Kraft* das *Aequivalent* für verloren gegangene Wechselwirkung, wodurch die *Grössenwerthe* der Wechselwirkungen und lebendigen Kräfte in bestimmte *Abhängigkeit* von einander gebracht würden.

Das oben angeführte allgemeine Grundgesetz der elektrischen Wirkung entspricht dieser Vorstellung dadurch, dass von ihm die Abhängigkeit der aus der Wechselwirkung resultirenden Kraft von der lebendigen Kraft der Körper festgestellt wird, im Gegensatz zum COULOMB-POISSON'schen Gesetze, nach welchem eine solche Abhängigkeit nicht Statt findet.

Wird nun die Grösse der Wechselwirkung zweier Theilchen ihre *Wechselwirkungsenergie*, und ebenso die Grösse der relativen lebendigen Kraft zweier Theilchen ihre *Bewegungsenergie* genannt, so liegt die Vermuthung sehr nahe, dass bei *Zunahme* der einen Energie und gleichzeitiger *Abnahme* der anderen, der Gewinn an einer Energie auch *quantitativ* einen Ersatz für den Verlust an der anderen Energie gewähre, was die *Homogeneität* beider Energiegrössen voraussetzt, und so viel heisst, als dass *ihre Summe konstant* sei. Bezeichnet man also mit Q die relative lebendige Kraft zweier Theilchen, und mit P die Energie ihrer Wechselwirkung, so würde hiernach

$$P + Q = a$$

zu setzen sein, wo a eine jedem *Theilchenpaare* zukommende Konstante wäre, ebenso wie die Masse eine jedem *einzelnen Theilchen* zukommende Konstante ist.

Es würde dadurch bestimmt werden, *was in der Wechselwirkung zweier Theilchen durch gegenseitige Bewegungen geändert wird,* wodurch ein Fundament für Ableitung der *dynamischen aus den statischen* Gesetzen gewonnen würde.

Die konstante Energiesumme a wäre zugleich der Grenzwerth, welcher von der Energie P nicht überschritten werden könnte, weil nämlich die Energie Q (d. i. die lebendige Kraft der Theilchen) keinen kleineren Werth als Null haben kann.

Die hier ausgesprochene Vermuthung hat nun *mancherlei Modifikationen* erlitten, und hat demgemäss verschiedenen Ausdruck in den versuchsweise gegebenen Aussprüchen von dem *Princip der Erhaltung der Energie* gefunden, welches der *Leitfaden* vieler Forschungen in neuester Zeit, vorzüglich im Gebiete der Wärmelehre und Elektricitätslehre, geworden ist.[1]) Bei der Wichtigkeit und Bedeutung, die dieser neue *Leitfaden* gewonnen, verdienen einige Verschiedenheiten der Ansichten und Meinungen, die dabei hervorgetreten sind, besondere Beachtung.

Der oben versuchsweise gegebene Ausspruch vom *Princip der Erhaltung der Energie* ist nämlich wesentlich verschieden, und könnte

[1]) Die Bezeichnung der Summe der *lebendigen Kraft* und *Wärme* eines Körpersystems nebst der durch sein *Potential* bestimmten Arbeit mit dem Namen seiner *mechanischen Energie*, oder kurz seiner *Energie*, rührt von Thomas Young und W. Thomson her, und ist sodann von Clausius als sehr zweckmässig gewählt anerkannt und angenommen worden.

Thomas Young, Lectures on Natural Philosophy, London 1807, Lecture VIII, sagt Seite 78: The term energy may be applied, with great propriety, to the product of the mass or weight of a body, into the square of the number expressing its velocity. — Young bezeichnet hiernach blos die lebendige Kraft eines Körpers (eigentlich ihren doppelten Werth) mit dem Namen energy, jedoch ohne ausdrücklich hinzuzufügen, dass der Körper nur diese und keine andere Energie besitze. Vielmehr da er auf der folgenden Seite für die lebendige Kraft eines Körpers die vollständigere Bezeichnung energy of its motion gebraucht, so scheint dadurch angedeutet zu sein, dass einem Körper, abgesehen von seiner Bewegung, noch eine andere Energie zukommen könne.

W. Thomson im Phil. Magazin and Journal of Science, IV. Series 9. London 1855, p. 523, sagt: A body which is either emitting heat, or altering his dimensions against resisting forces, is doing work upon matter external to it. The mechanical effect of this work in one case is the excitation of thermal motions, and in the other the overcoming of resistances. The body must itself be altering in its circumstances, so as to contain a less store of work within it by an amount precisely equal to the aggregate value of the mechanical effects produced; and conversely the aggregate value of the mechanical effects produced must depend solely on the initial and final states of the body, and is therefore the same whatever be the intermediate states through which the body passes, provided the *initial* and *final* states be the same. — The total *mechanical energy* of a body might be defined as the mechanical value of all the effect it would produce in heat emitted and in resistances overcome, if it were cooled to the utmost, and allowed to contract indefinitely or to expand indefinitely, according as the forces between its particles are attractive or repulsive, when the thermal motions within it are all stopped.

Es ist hierin von W. Thomson mit dem *Namen der Energie* zugleich auch das Princip der *Erhaltung der Energie* ausgesprochen worden; denn was ein Körpersystem an seinem Vorrath an Energie verliert, gewinnt ein anderes Körpersystem, hieraus folgt offenbar die *Erhaltung der Energie* in allen Körpersystemen zusammengenommen. — Dasselbe Princip ist im Wesentlichen, nur unter anderem Namen, schon früher ausgesprochen worden, namentlich von Helmholtz unter dem Namen des *Princips der Erhaltung der Kraft.*

leicht im Widerspruch zu stehen scheinen (was näher betrachtet, nicht der Fall ist) mit dem Ausspruch des „*gewöhnlichen Princips der Energie*“, von welchem C. Neumann im XI. Bande der Mathematischen Annalen, S. 320, sagt: „Dieses Princip verlangt, dass für jedes materielle System eine *Energiefunktion* existire, d. i. eine vom augenblicklichen Zustande des Systems abhängende Funktion, welche die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraum um eben so viel anzuwachsen, als die dem Systeme während dieses Zeitraums von aussen zugeführte Arbeit beträgt. Zugleich erkennen wir, dass diese *Energiefunktion* (welche man kurzweg die *Energie* des Systems zu nennen pflegt) bei Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes [womit Neumann das oben angeführte korrigirte Coulomb-Poisson'sche Gesetz bezeichnet] durch die Summe von lebendiger Kraft und Potential dargestellt ist Helmholtz indessen nimmt dieser Frage gegenüber eine etwas andere Stellung ein nämlich in dem Aufsatze (Monatsber. d. Berl. Akad., 18. April 1872) heisst es:

> „Man hat sich bei den Untersuchungen darüber, ob das Gesetz der Erhaltung der Energie für gewisse Naturprocesse gültig sei oder nicht, meist damit begnügt, zu untersuchen, ob, wenn ich das analytische Resultat praktisch ausdrücken darf, ein immer wiederholter Cirkelprocess in das Unendliche Arbeit erzeugen oder zerstören kann. — In diesem Sinne nun verletzt die Weber'sche Annahme das Gesetz der Erhaltung der Energie nicht; aber sie thut es in einem anderen Sinne — — —“

„Der nun folgende Einwand,“ fährt Neumann weiter fort, „betrifft indessen nicht mehr das gewöhnliche Princip der Energie, sondern ein vollkommen *neues*, hier zum ersten Mal ausgesprochenes Princip. Während nämlich das gewöhnliche Princip der Energie für jedes materielle System die Existenz einer Energiefunktion, d. i. die Existenz einer Funktion verlangt, welche die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraum um eben so viel anzuwachsen, als die dem System während dieses Zeitraums zugeführte Arbeit beträgt, — verlangt jenes neue Princip nicht allein die *Existenz* einer solchen Funktion, sondern zugleich eine gewisse specielle *Beschaffenheit* derselben, indem es behauptet, der *kinetische* Theil dieser Funktion (derjenige Theil derselben, welcher von der Geschwindigkeit abhängt) müsse stets *positiv* sein.“

Neumann fügt in einer Note noch folgende, bereits oben citirte Bemerkung hinzu: „Es unterliegt keinem Zweifel, dass die physikalischen Principien einer festen Formulirung unfähig, mithin ihrer Natur nach dehnbar und biegsam sind. *Das Princip der lebendigen Kraft* hat sich allmählig zum *Princip der Energie* ausgedehnt, und ist möglicher Weise einer noch weiteren Ausdehnung fähig. — Demgemäss ist es a priori keineswegs unmöglich, dass dieses *Princip der Energie* sich allmählig

zu jenem *neuen* Helmholtz'schen *Princip* erweitere. Nur scheint es mir zweckmässig, vorläufig wenigstens, die beiden Principien mit verschiedenen Namen zu bezeichnen." —

Diese letzte Bemerkung gilt nun nicht blos von dem neuen Helmholtz'schen Princip, sondern auch von dem oben aufgestellten, welches ebenfalls von dem *gewöhnlichen* abweicht, weshalb zu seiner besseren Unterscheidung schon bisher der Name des Princips der *Erhaltung* der Energie gebraucht worden ist, weil darnach die *ganze Energie*, nämlich die der Bewegung und der Wechselwirkung in Summa, wirklich unverändert *erhalten* wird, während nach dem gewöhnlichen Energieprincip blos eine *Energiefunktion* existirt, deren Grösse keineswegs unverändert erhalten wird, sondern die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraume um eben so viel anzuwachsen, als die dem Systeme während dieses Zeitraums *von aussen* zugeführte Arbeit beträgt. Nur in zwei besonderen Fällen kann das gewöhnliche Princip ebenfalls als ein Princip der *Erhaltung* der Energie betrachtet werden, nämlich in dem Falle, wo das betrachtete materielle System *alle* Körper in der Welt umfasst, und ferner in dem Falle, wo das betrachtete System als *vollkommen isolirt* anzusehen ist, weil es nämlich in diesen beiden Fällen gar keine *äusseren* Einwirkungen giebt.

Dass nun aber bei dieser Verschiedenheit doch kein *Widerspruch* Statt finde zwischen obigem Principe der *Erhaltung* der Energie und dem *gewöhnlichen* Energieprincip, wie es von Neumann definirt worden ist, muss *bewiesen* werden, wozu es, wie man leicht sieht, nur der Nachweisung bedarf, dass die Energie der Wechselwirkung P in jedem Zeitraum um eben so viel wachse, als für diesen Zeitraum die Differenz des Wachsthums des Potentials V, und der dem Theilchenpaare von aussen zugeführten Arbeit S beträgt, d. h. dass $dP = dV - dS$ sei, was mit Zuziehung der durch das Princip der Erhaltung der Energie gegebenen Gleichung, nämlich $P + Q = a$, wo a eine Konstante bezeichnet, zum *gewöhnlichen* Energieprincipe führt, nämlich

$$d(Q + V) = dS,$$

wo $(Q + V)$ die Neumann'sche *Energiefunktion* bezeichnet. — Diesen Beweis zu geben, wird unten im 4. Artikel versucht werden.

Das Ziel, welches durch diesen neuen, sowohl von dem *gewöhnlichen* als auch von dem von Helmholtz aufgestellten verschiedenen Ausspruch des Energieprincips erreicht werden soll, besteht aber wesentlich darin,

ein Princip zu gewinnen, wodurch bestimmt werde, was in der Wechselwirkung der Körper durch ihre Bewegung verändert wird.

Wechselwirkung findet nur zwischen je zwei Körpern Statt und erleidet

nur durch die relative lebendige Kraft ihrer Bewegung eine Veränderung. Dies vorausgesetzt, und ferner vorausgesetzt, dass diese *Wechselwirkung* zweier Körper oder Körpertheilchen eine mit ihrer relativen lebendigen Kraft *homogene* Grösse sei, welche mit der Grösse dieser Kraft die konstante *Energiesumme* a bilde, so bedeutet a offenbar die Grösse der Wechselwirkung der beiden *ruhenden* Theilchen, d. i. ihre *statische* Wechselwirkung, und das Princip der Erhaltung der Energie ist dann das Gesetz, wodurch bestimmt wird, dass diese *statische* Wechselwirkung, in Folge irgend einer durch die lebendige Kraft Q ihrer Grösse nach gegebenen relativen *Bewegung*, um Q vermindert werde.

Das *allgemeine Grundgesetz der elektrischen Wirkung* würde *als solches* alsdann durch das Princip der Erhaltung der Energie vollkommen ersetzt und in ein *Theorem* verwandelt werden, welches aus dem *elektrostatischen* Grundgesetze, mittelst des *Princips der Erhaltung der Energie*, abgeleitet und bewiesen würde.

2.

Die Energie der Wechselwirkung auf absolutes Maass zurückgeführt.

Es leuchtet ein, dass aus der im vorhergehenden Artikel aufgestellten Gleichung, in welcher versuchsweise das Princip der Erhaltung der Energie ausgesprochen worden ist, nämlich

$$P + Q = a,$$

die *Energie der Bewegung* Q bestimmt werden kann, wenn die *Energie der Wechselwirkung* P gegeben ist, und umgekehrt; zugleich leuchtet aber ein, dass der Sinn der Gleichung, als Ausspruch eines Princips, auf der *physikalischen Bedeutung* beruht, welche mit dem Begriff jeder *einzelnen* Energie zu verbinden ist, aus welcher die Möglichkeit der Grössenbestimmung jeder Energie unabhängig von der anderen einleuchten muss. Für die *Bewegungsenergie* ist eine solche Bestimmung bekanntlich längst gegeben; es handelt sich daher nur um eine ebensolche Bestimmung für die *Energie der Wechselwirkung.*

Die Wechselwirkung zweier Theilchen während einer Entfernungsänderung besteht in *Arbeit.* Ohne Entfernungsänderung findet zwar Wechselwirkung, aber *keine Arbeit* Statt; doch besitzt das Theilchenpaar stets ein *Arbeitsvermögen*, d. i. die Eigenschaft, bei Entfernungsänderungen Arbeit leisten zu können. Aus diesem *Arbeitsvermögen* wird die Wechselwirkung erkannt und seine Grösse giebt den Maassstab für die *Energie* der Wechselwirkung.

Eine Grössenbestimmung des Arbeitsvermögens muss auf *Arbeitsmessung* gegründet werden. Nun besteht aber *Arbeit* entweder in *Aufhebung* entgegengesetzter Arbeit, oder in *Erzeugung* (resp. Vernichtung) von *lebendiger Kraft.* Arbeiten, die einander aufheben, entziehen sich direkter Messung; dagegen ist Zunahme oder Abnahme der lebendigen Kraft unter geeigneten Verhältnissen ein Gegenstand direkter Beobachtung und Messung, worauf in letzter Instanz alle *Arbeitsmessung* zurückzuführen ist.

Ist hiernach *Arbeit* bestimmbar aus der messbaren lebendigen Kraft, welche von ihr erzeugt wird, wenn sie von keiner entgegengesetzten Arbeit aufgehoben wird, so genügt für das *Arbeitsvermögen* eines Theilchenpaares die Bestimmung der Arbeitsgrösse, welche durch *Wechselwirkung* der Theilchen während einer gewissen noch näher zu bestimmenden Entfernungsänderung geleistet werden würde. Ob diese Arbeitsgrösse positiv oder negativ ist, kommt dabei nicht in Betracht, und es dient daher der *absolute Werth*[1]) dieser Arbeitsgrösse als *Maass* des Arbeitsvermögens.

Dagegen muss, nach dem aufgestellten Princip der Erhaltung der Energie, beim Arbeitsvermögen die Geschwindigkeit dr/dt in Betracht gezogen werden, mit welcher die Entfernungsänderung erfolgt, weil mit dieser Geschwindigkeit die Bewegungsenergie Q, und folglich nach dem angeführten Principe auch die Wechselwirkungsenergie P sich ändert. Es leuchtet daraus ein, dass die Energie P, d. i. das Arbeitsvermögen eines Theilchenpaares, nur für einen *gegebenen Werth der Geschwindigkeit* dr/dt genau bestimmbar ist, und dass dieser Werth während der betreffenden Entfernungsänderung als *konstant* angenommen werden müsse.

Da aber bei konstantem Werthe von dr/dt keine Zunahme oder Abnahme der lebendigen Kraft Statt findet, welche zu *direkter* Arbeitsmessung dienen könnte, so muss zur Bestimmung des Arbeitsvermögens eine *indirekte* Methode der Arbeitsmessung gesucht werden. Soll nun während einer Entfernungsänderung keine Aenderung der relativen Geschwindigkeit durch Wechselwirkung hervorgebracht werden, so muss die während der Entfernungsänderung durch *Wechselwirkung* geleistete Arbeit von der durch *äussere* Einwirkung geleisteten aufgehoben werden, und diese letztere kann, wenn sie aus bekannten Ursachen stammt, z. B. wenn sie von bekannten Gewichten herrührt, welche während der

[1]) Hieraus folgt, dass die Gültigkeit des Princips $P + Q = a$ beschränkt ist auf die Fälle, wo Q den Werth von a nicht überschreitet. Alle lebendigen Kräfte Q der uns bekannten Körper sind jedoch nur so kleine Bruchtheile von a, dass höchstwahrscheinlich der Fall $Q > a$ gar nicht vorkommt. Nach unserer jetzigen Kenntniss würden nämlich dazu zwei Körper mit einer relativen Geschwindigkeit $> 439\,450$ Kilometer/[Sekunde] erforderlich sein.

Entfernungsänderung auf die Theilchen wirken, und dadurch genau bestimmt ist, zur *indirekten* Messung der durch Wechselwirkung geleisteten Arbeit benutzt werden.

Die durch Wechselwirkung der beiden Theilchen e und e' während der Entfernungsänderung dr geleistete Arbeit wird nun ihrem absoluten Werthe nach durch $\pm [\partial V / \partial r]\, dr$[1]) dargestellt, wo V das *Potential* des Theilchenpaares bezeichnet, und das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Produkt ee' positiv oder negativ ist. Die während einer grösseren Entfernungsänderung von ϱ' bis ϱ'' geleistete Arbeit wird auf ähnliche Weise durch $\pm \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\partial V}{\partial r} dr$ dargestellt. Die Aufgabe, die Energie der Wechselwirkung zweier Theilchen e und e' auf absolutes Maass zurückzuführen, d. i. die Bestimmung ihres Arbeitsvermögens nach absolutem Maasse, ist hiernach auf die Bestimmung des Integralwerths $\pm \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\partial V}{\partial r} dr$ zurückgeführt, worin nur die Integrationsgrenzen ϱ' und ϱ'' noch der näheren Bestimmung bedürfen.

Da unter *Arbeitsvermögen* der Grössenwerth der durch Wechselwirkung während einer *genau zu bestimmenden Entfernungsänderung* geleisteten Arbeit verstanden wird, so leuchtet ein, dass die Entfernungsgrenzen ϱ' und ϱ'' im Ausdrucke $\pm \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\partial V}{\partial r} dr$ *genau bestimmte und konstante Werthe* erhalten müssen, woraus folgt, dass diese Grenzen nicht dieselben wie die des *Potentials* $\int_{\infty}^{r} \frac{dV}{dr} dr$ sein können, von denen eine, nämlich r, *variabel* ist.

Da es sich ferner um die Bestimmung des *ganzen*, dem betrachteten Theilchenpaare vermöge der Wechselwirkung seiner Theilchen zukommenden *Arbeitsvermögens* handelt, so leuchtet ein, dass diese Grenzen möglichst weit auseinander zu rücken sind, so weit als es geschehen kann, ohne dadurch in Widerspruch mit dem Princip der Erhaltung der Energie zu gerathen, nach welchem die dem Theilchenpaare zugehörige *Energiesumme* eine Konstante a sein soll, und diese Konstante zugleich der Grenzwerth sein soll, welchen die *Energie der Wechselwirkung* nicht

[1]) Das Zeichen der *partiellen* Differentiation ist hier gewählt worden, um auszudrücken, dass bei dieser Differentiation dr/dt als konstant betrachtet werden soll.

überschreiten darf, und nur dann erreichen soll, wenn die *Bewegungsenergie* Null ist.

Hieraus ergiebt sich zunächst die Bestimmung der einen Grenze $\varrho' = \infty$; was dagegen die andere Grenze ϱ'' betrifft, so darf ihr Werth nicht kleiner sein als derjenige, für welchen $\pm \int_\infty^{\varrho''} \frac{\partial V}{\partial r} dr = a$ sein würde. Der hiernach bestimmte Werth von ϱ'' soll mit ϱ bezeichnet werden.

Zur Grössenbestimmung der mit P bezeichneten *Energie der Wechselwirkung* zweier Theilchen e und e', deren Massen mit ε und ε' bezeichnet worden, und deren Bewegungsenergie $Q = \frac{1}{2}[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')].[dr^2/dt^2]$ ist, wird dann folgende Gleichung erhalten:

$$P = \pm \int_\infty^{\varrho} \frac{\partial V}{\partial r} dr,$$

wobei zu beachten ist, dass erstens während der Entfernungsänderung ausser der Wechselwirkung eine *äussere* Einwirkung auf das Theilchenpaar Statt finden soll, durch welche der gegebene Werth von $\partial r/\partial t$ in *V konstant* erhalten wird; ferner dass das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Produkt ee' positiv oder negativ ist; und endlich dass $P = a$ ist für $Q = 0$, was zur Bestimmung von ϱ dient.

Diese Formel für P kann noch auf folgende Weise transformirt werden. Man kann $P = \pm \int_\infty^{\varrho} \frac{\partial V}{\partial r} dr$ in zwei Theile zerlegen, nämlich:

$$P = \pm \int_\infty^{r} \frac{dV}{dr} dr \pm \int_r^{\varrho} \frac{\partial V}{\partial r} dr,$$

wovon der *erstere* Theil der absolute Werth des *Potentials V* ist, worin die gewöhnlichen Differentialzeichen gesetzt sind, weil es gleichgültig ist, ob darin dr/dt variabel gesetzt wird oder nicht. Bei dem *letzteren* Theile bleibt aber zu beachten, dass der *gegebene* Werth der Geschwindigkeit dr/dt während der Entfernungsänderung von r bis ϱ *konstant* anzunehmen ist.

Bezeichnet dann s die während der Entfernungsänderung von r bis ϱ durch *äussere* Einwirkung geleistete Arbeit, so muss nothwendig, um dr/dt *konstant* zu erhalten,

$$\pm \int_r^{\varrho} \frac{\partial V}{\partial r} dr + s = 0$$

sein, woraus zur Bestimmung der Energie P folgende Formel erhalten wird:

$$P = \pm V - s,$$

wo V das *Potential* der Theilchen e und e' bezeichnet, und s die Arbeit, welche während der Entfernungsänderung von r bis ϱ durch *äussere* Einwirkung geleistet werden muss, damit der für r *gegebene* Werth der relativen Geschwindigkeit dr/dt unverändert bleibe.

3.

Ableitung des elektrodynamischen aus dem elektrostatischen Potentialgesetze mittelst des Energieprincips.

Nach gegebener Definition der beiden Energien eines elektrischen Theilchenpaares e und e', deren Massen mit ε und ε', und deren Entfernung mit r bezeichnet worden, nämlich

der *Energie der Bewegung* $Q = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$,[1]) und

der *Energie der Wechselwirkung* $P = \pm \int_\infty^\varrho \frac{\partial V}{\partial r}\, dr$,

— wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Produkt ee' positiv oder negativ ist, und der mit der Grösse Q gegebene Werth der relativen Geschwindigkeit dr/dt während der Entfernungsänderung *konstant* und dem für Q gültigen gleich anzunehmen ist, — ergiebt sich aus dem Art. 1 ausgesprochenen Energieprincipe, wonach $P + Q = a$ eine *konstante* Summe bildet, folgende Gleichung zwischen den beiden Konstanten a und ϱ und den beiden Variablen Q und V, nämlich

$$(1) \qquad \pm \int_\infty^\varrho \frac{\partial V}{\partial r}\, dr = a - Q.$$

[1]) Bezeichnen α, β die Geschwindigkeiten der Masse ε in der Richtung r und senkrecht darauf, α', β' dieselben Geschwindigkeiten für ε', wonach $\alpha - \alpha' = dr/dt$ die relative Geschwindigkeit beider Theilchen ist, so ist $\frac{1}{2}\varepsilon(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{2}\varepsilon'(\alpha'^2 + \beta'^2)$ die ganze den beiden Theilchen zugehörige lebendige Kraft. Setzt man nun

$$\text{für } \alpha,\ \frac{\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha'}{\varepsilon + \varepsilon'} + \frac{\varepsilon'(\alpha - \alpha')}{\varepsilon + \varepsilon'};\quad \text{für } \alpha',\ \frac{\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha'}{\varepsilon + \varepsilon'} - \frac{\varepsilon(\alpha - \alpha')}{\varepsilon + \varepsilon'},$$

so erhält man die ganze lebendige Kraft der beiden Theilchen als Summe *zweier Theile*, $= \frac{1}{2}[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')] \cdot [dr^2/dt^2] + \frac{1}{2}((\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2/(\varepsilon + \varepsilon') + \varepsilon\beta^2 + \varepsilon'\beta'^2)$, wovon der *erstere*, nämlich $\frac{1}{2}[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')] \cdot [dr^2/dt^2]$ die *relative lebendige Kraft* der beiden Theilchen ist, welche oben mit Q bezeichnet worden. — Siehe Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. X, S. 12. [Wilhelm Weber's Werke, Bd. IV, p. 257.]

Nun ist nach dem Grundgesetze der *Elektrostatik* für $Q = 0$ das Potential $V = ee'/r$ gegeben. Setzt man diese Werthe der Variablen Q und V in Gleichung (1), so erhält man folgende Gleichung zwischen den beiden Konstanten a und ϱ, wodurch sie auf einander zurückgeführt werden, nämlich

$$\pm \int_{\infty}^{\varrho} \frac{d\frac{ee'}{r}}{dr}\, dr = a,$$

woraus der Werth der Konstanten ϱ gefunden wird

$$\varrho = \pm \frac{ee'}{a}. \tag{2}$$

Setzt man nun diesen Werth von ϱ in die Gleichung (1), so ergiebt sich folgende Gleichung blos zwischen *einer* Konstanten, nämlich a, ferner dem gegebenen Werthe der Variablen Q und dem gesuchten Werthe der Variablen V, nämlich

$$\pm \int_{\infty}^{\pm\frac{ee'}{a}} \frac{\partial V}{\partial r}\, dr = a - Q, \tag{3}$$

woraus V zu bestimmen ist.

Man sieht leicht ein, dass dieser Gleichung (3) durch folgende Bestimmung von V

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{Q}{a}\right)$$

genügt werde; denn substituirt man diesen Werth im ersten Gliede der Gleichung (3), und berücksichtigt, dass, nach der Art. 2 gegebenen Definition, in der Formel $P = \pm \int_{\infty}^{\varrho} \frac{\partial V}{\partial r}\, dr$ der gegebene Werth der relativen Geschwindigkeit dr/dt, folglich auch $Q = \frac{1}{2}[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')].[dr^2/dt^2]$, während der Entfernungsänderung *konstant* anzunehmen ist, so findet man für den einen Grenzwerth, $r = \pm ee'/a$, den Werth von $V = \pm a\,(1 - Q/a)$, und für den anderen Grenzwerth $r = \infty$ den Werth $V = 0$, folglich die Differenz dieser Werthe

$$\int_{\infty}^{\pm\frac{ee'}{a}} \frac{\partial V}{\partial r}\, dr = \pm a\left(1 - \frac{Q}{a}\right),$$

folglich

$$\pm\int_{\infty}^{\pm\frac{ee'}{a}} \frac{\partial V}{\partial r}\, dr = a\left(1-\frac{Q}{a}\right) = a - Q,$$

ganz in Uebereinstimmung mit Gleichung (3).

Diese aus dem Grundgesetze der *Elektrostatik* mit Hülfe des *Energieprincips* abgeleitete Formel des *elektrodynamischen Potentialgesetzes,* nämlich

$$(4) \qquad V = \frac{ee'}{r}\left(1-\frac{Q}{a}\right),$$

lässt sich nun noch auf folgende Weise umgestalten.

Die *konstante Energiesumme* a ist nach dem Energieprincipe der Grenzwerth der Bewegungsenergie $Q = \frac{1}{2}[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon+\varepsilon')].[dr^2/dt^2]$ für abnehmende Werthe der Energie der Wechselwirkung P, d. h. es ist $Q = a$ für $P = 0$. Bezeichnet man daher die relative Geschwindigkeit dr/dt der beiden Theilchen für diesen *Grenzwerth* der Bewegungsenergie a mit c, so ergiebt sich

$$a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot c^2.$$

Substituirt man nun diese Werthe von $Q = \frac{1}{2}[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon+\varepsilon')].[dr^2/dt^2]$ und $a = \frac{1}{2}[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon+\varepsilon')].c^2$ in Gleichung (4), so erhält man für das elektrodynamische Potentialgesetz folgenden Ausdruck:

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}\right).$$

Zwischen den drei in dieser Ableitung des elektrodynamischen Potentialgesetzes vorkommenden *Konstanten* a, ϱ, c eines elektrischen Theilchenpaares e, e', dem die Massen ε und ε' zugehören, finden endlich folgende Beziehungen Statt, wonach jede derselben aus jeder von den beiden anderen bestimmt werden kann, nämlich

$$a = \pm\frac{ee'}{\varrho} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot c^2.$$

Für das *elektrodynamische Potential* V erhält man durch Vertauschung dieser Konstanten folgende Formeln:

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1-\frac{Q}{a}\right) = \frac{ee'}{r}\left(1-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}\right) = \frac{ee'}{r} \mp \frac{\varrho}{r}Q,$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Produkt ee' positiv oder negativ ist.

4.

Ableitung des gewöhnlichen Princips der Energie aus dem Princip der Erhaltung der Energie.

Das *gewöhnliche* Energieprincip, wie es Neumann ausgesprochen hat, verlangt, dass für jedes materielle System eine *Energiefunktion* existire, d. i. eine nur vom augenblicklichen Zustande des Systems abhängende Funktion, welche die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraume um eben so viel anzuwachsen, als die dem System während dieses Zeitraums von aussen zugeführte Arbeit beträgt. Diese *Energiefunktion* hat man oft kurzweg die *Energie* genannt.

Im Falle eines Systems von zwei Theilchen in der Entfernung r von einander, auf welches während der Entfernungsänderung dr durch Wechselwirkung die *innere* Arbeit Rdr, und durch *äussere* Einwirkung die *äussere* Arbeit dS ausgeübt wird, ist nach einem bekannten *allgemeinen Satze der Mechanik* die Zunahme der lebendigen Kraft Q eben so gross, wie die Summe aller auf das System ausgeübten *inneren* und *äusseren* Arbeiten, nämlich

$$dQ = Rdr + dS.$$

Giebt es also eine vom augenblicklichen Zustande des Theilchenpaares abhängende Funktion, welche die Eigenschaft hat, während der Entfernungsänderung dr um $dQ - Rdr = dS$ anzuwachsen, so gilt für ein solches Theilchenpaar das *gewöhnliche* Energieprincip.

Da nun für ein elektrisches Theilchenpaar e, e' durch das, unter Voraussetzung des Princips der *Erhaltung* der Energie, im vorigen Artikel entwickelte *Potentialgesetz* bewiesen ist, dass die *innere* Arbeit Rdr das vollständige Differential der Funktion $-(ee'/r)(1 - dr^2/c^2dt^2)$ ist, welche ebenso wie Q nur vom augenblicklichen Zustande des Theilchenpaares abhängt, so leuchtet ein, dass die Differenz beider Grössen, welche ebenfalls nur vom augenblicklichen Zustand des Theilchenpaares abhängt, nämlich

$$Q + \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{dr^2}{c^2dt^2}\right),$$

die Eigenschaft hat, während der Entfernungsänderung dr um $dQ - Rdr = dS$ anzuwachsen, wonach also für ein solches Theilchenpaar nicht allein das Princip der *Erhaltung* der Energie, sondern auch das *gewöhnliche* Energieprincip gilt, und

$$Q + \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{dr^2}{c^2dt^2}\right)$$

seine *Energiefunktion* ist.

Die gleichzeitige Geltung beider Principien, nämlich des Princips der *Erhaltung* der Energie, wonach $P + Q = a$ ist, und des *gewöhnlichen* Energieprincips, wonach $d(Q + V) = dS$ ist, wo S die durch äussere Einwirkung geleistete Arbeit bezeichnet, setzt voraus, wie schon am Schlusse von Art. 1 bemerkt worden, dass

$$dP = dV - dS,$$

oder, da nach Art. 2 $P = \pm V - s$, folglich

$$dP = \pm dV - ds$$

war, dass $\pm dV - ds = dV - dS$ sei, was mit Hülfe der Art. 2 und 3 gefundenen Gleichungen:

(1) $$\pm \int_r^\varrho \frac{\partial V}{\partial r} dr + s = 0,$$

(2) $$V = \pm \frac{\varrho}{r}(a - Q),$$

und mit Hülfe der als Ausspruch des *gewöhnlichen* Energieprincips dienenden, schon Art. 1 angeführten, Gleichung

(3) $$dS = d(Q + V)$$

leicht bewiesen werden kann. Nämlich aus (1) und (2) ergeben sich die Gleichungen

$$s = (a - Q)\left(\frac{\varrho}{r} - 1\right),$$

$$-ds = \varrho(a - Q)\frac{dr}{r^2} + \left(\frac{\varrho}{r} - 1\right)dQ,$$

$$\pm dV = -\varrho(a - Q)\frac{dr}{r^2} - \frac{\varrho}{r}dQ,$$

woraus folgt

$$\pm dV - ds = -dQ.$$

Nun ist aber nach (3) auch $dV - dS = -dQ$,
folglich ist $\pm dV - ds = dV - dS$, was zu beweisen war.

5.

Das allgemeine Gesetz der elektrischen Kraft.

Das *Potential* zweier elektrischen Theilchen e und e' in der Entfernung r ist Art. 3 gefunden worden

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{Q}{a}\right),$$

worunter die *Arbeit* verstanden wird, welche durch *Wechselwirkung* der beiden, die relative lebendige Kraft Q besitzenden, Theilchen e und e' geleistet werden würde, wenn sie aus unendlicher Entfernung in die Entfernung r versetzt würden. Der Differentialquotient dV/dr bezeichnet alsdann die von den Theilchen in der Entfernung r durch Wechselwirkung auf einander ausgeübte *Kraft*, und zwar, je nachdem er positiv oder negativ ist, eine Anziehungskraft oder Abstossungskraft.

Die relative lebendige Kraft Q beider Theilchen, deren Massen mit ε und ε' bezeichnet werden, wird durch

$$Q = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$$

dargestellt, woraus erhellt, dass Q eine Funktion der Zeit t ist (ausgenommen wenn dr/dt ausdrücklich als konstant angenommen wird), ebenso wie r, und dass folglich auch jede von diesen beiden Variablen r und Q als Funktion der anderen betrachtet werden kann.

Es ergiebt sich hiernach die *Abstossungskraft*

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{Q}{a}\right) + \frac{ee'}{ar} \cdot \frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dr}{dt}},$$

oder, wenn man hierin die Werthe

$$Q = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} \quad \text{und} \quad a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot c^2$$

substituirt, woraus

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{2a}{c^2} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2}$$

folgt, ergiebt sich die *Abstossungskraft*

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} \cdot \frac{d^2r}{dt^2}\right).$$

Nun ist aber die relative Beschleunigung d^2r/dt^2 aus *zwei Theilen* zusammengesetzt, nämlich aus dem von der Wechselwirkung beider Theilchen *abhängigen*, und aus dem davon *unabhängigen* Theile. Der *letztere* werde mit f bezeichnet, der *erstere* giebt mit $\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')$ multiplicirt die Abstossungskraft $-dV/dr$, und kann also durch den Quotienten $-[(\varepsilon + \varepsilon')/\varepsilon\varepsilon'] . [dV/dr]$ dargestellt werden. Es ist also

$$\frac{d^2r}{dt^2} = f - \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{dV}{dr}.$$

Substituirt man diesen Werth für d^2r/dt^2 in obiger Gleichung, und setzt nach Art. 3 $\varrho = \pm 2[(\varepsilon + \varepsilon')/\varepsilon\varepsilon'] . [ee'/c^2]$, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Produkt ee' positiv oder negativ ist, so erhält man

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} f\right) \mp \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{dV}{dr},$$

und hieraus endlich folgenden Ausdruck der *Abstossungkraft:*

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r(r \mp \varrho)} \cdot \left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} f\right),$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Produkt ee' positiv oder negativ ist. Es kann dafür auch gesetzt werden

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r\left(r - \frac{ee'}{a}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} f\right).$$

Der Ausdruck der elektrischen Kraft in dieser entwickelten Form kann nun zur leichteren Uebersicht über die von beiden Theilchen unter den verschiedensten Verhältnissen aufeinander ausgeübten Kräfte dienen, jedoch ist dabei zu beachten, dass in dieser Form die Kräfte nicht nach dem Gesetze des Parallelogramms komponirt werden können.[1]) Man erkennt z. B. daraus unmittelbar, dass für positive Werthe des Produkts ee' diese Kraft unendlich gross sein würde nicht blos für $r = 0$, sondern auch für $r = \varrho$; erkennt aber zugleich auch, dass in Wirklichkeit der letztere Fall, nämlich wo $r = \varrho$ sei, niemals vorkomme, weil, so gross auch die relative Geschwindigkeit der Theilchen in irgend einer von ϱ um eine *endliche* Grösse verschiedenen Entfernung sein möge, doch niemals $r = \varrho$ werden könne.

Denn weil ee' positiv ist, ist die Kraft für $r > \varrho$ *abstossend* und wächst, während r abnimmt und dem Grenzwerthe ϱ sich nähert, *ins*

[1]) Da die Komponenten der Beschleunigung bei Kräften, deren Potential von den Geschwindigkeiten der bewegten Punkte abhängt, durch Ausdrücke gegeben sind, welche die Beschleunigungen selbst enthalten, dergestalt, dass die Werthe der letzteren nur durch Auflösung von Gleichungen erhalten werden können, so ist nach einer Bemerkung Carl Neumann's ins Auge zu fassen, dass während *vor* jener Auflösung die Ausdrücke der Beschleunigungen bei gleichzeitiger Wirkung mehrerer Kräfte nach den gewöhnlichen Regeln komponirt werden dürfen, diese letztere Eigenschaft nach Umformung der Ausdrücke durch Auflösung der Gleichungen verloren geht. Das Unendlichwerden der Beschleunigungen wird dabei durch das Verschwinden der Determinante aus den Koefficienten der Beschleunigungen in den einzelnen Gleichungen charakterisirt. Vergl. Mathematische Annalen, Bd. 11, S. 323 Anm.

Unendliche, woraus einleuchtet, dass die Annäherungsgeschwindigkeit, die, wenn auch sehr gross, doch nicht unendlich gewesen war, aufgehoben werden müsse von dieser ins Unendliche wachsenden *Abstossungskraft*, noch bevor $r = \varrho$ geworden ist, und dass sodann r wieder wachsen werde. Es folgt hieraus, dass in diesem Falle niemals $r = \varrho$ werde, sondern dass die beiden Theilchen nothwendiger Weise stets in grösserer Entfernung als ϱ von einander bleiben müssen.

Für $r < \varrho$ ist die Kraft *anziehend* und wächst, während r zunimmt und dem Grenzwerth ϱ sich nähert, *ins Unendliche*, woraus einleuchtet, dass die Entfernungsgeschwindigkeit, die, wenn auch sehr gross, doch nicht unendlich gewesen war, von der ins Unendliche wachsenden *Anziehungskraft* aufgehoben werden müsse, noch bevor $r = \varrho$ geworden sei, und dass sodann r wieder abnehmen werde. Die beiden Theilchen werden also in diesem Falle stets in geringerer Entfernung als r von einander bleiben.

Sollte eine ähnliche Beschränkung der Bewegung, wie für *zwei* Theilchen, welche darin bestand, dass sie in geringerer Entfernung als ϱ von einander immer bleiben mussten, wenn sie einmal darin waren, auch für eine grössere Zahl in einem eng begrenzten Raume eingeschlossener Theilchen sich ergeben, welche nämlich darin bestände, dass alle diese Theilchen immer in einem gleich begrenzten Raume zusammen bleiben müssten, so würde eine solche grössere Zahl von Theilchen, ebenso wie jene zwei, zusammen ein *Molekul* bilden, und es würden auf dieselbe Weise unter geeigneten Verhältnissen auch die ausserhalb des von diesem *Molekule* eingenommenen Raums befindlichen Theilchen zu *Molekulen* vereinigt sein können. Alle diese *Molekule*, leuchtet ein, müssten durch Zwischenräume mindestens von der Grösse ϱ von einander geschieden sein, und würden sich einander wechselseitig abstossen. Es würde aber weiterer Untersuchung bedürfen, um zu entscheiden, ob, und unter welchen Verhältnissen ein *System solcher Molekule* in stabilem Gleichgewicht verharren könnte, und, wenn dies der Fall sein sollte, nach welchen Gesetzen kleine Störungen des Gleichgewichts fortgepflanzt werden würden, um die Frage zu entscheiden, ob nicht dem *Lichtäther* und den *Lichtwellen* im Weltenraume ein stabiler Aggregatzustand solcher von elektrischen Theilchen gebildeten, im Weltenraume verbreiteten *Molekule* zu Grunde liegen und zur Erklärung dienen könne. —

Man pflegt diejenige Kraft, welche zwei elektrische Theilchen e und e' in der Entfernung r auf einander ausüben, wenn sie in *relativer Ruhe* sich befinden, als ihre *elektrostatische Kraft* zu bezeichnen und dieselbe nach *elektrostatischem Gesetze* zu bestimmen, nämlich $= ee'/r^2$. In *relativer Ruhe* befinden sich aber zwei Theilchen, wenn ihre relative Geschwindigkeit $dr/dt = 0$ ist. Alsdann ergiebt sich aber aus dem

gefundenen *allgemeinen Gesetze* der Abstossungskraft zweier elektrischen Theilchen die Grösse der Kraft nicht $= ee'/r^2$, sondern

$$= [ee'/r\,(r \mp \varrho)] \,.\, (1 + [2r/c^2]\,f),$$

wo f der von der *Wechselwirkung* der beiden Theilchen *unabhängige* Theil ihrer relativen Beschleunigung ist, d. i. die Summe derjenigen Beschleunigung $= \alpha^2/r$, welche von der relativen Geschwindigkeit α in einer gegen r senkrechten Richtung, welche die Theilchen besitzen, herrührt, und derjenigen Beschleunigung $= [(\varepsilon + \varepsilon')/\varepsilon\varepsilon']\,\Delta$, welche von der Differenz Δ der auf die Theilchen e und e' ausgeübten und nach r zerlegten *äusseren Kräfte* herrührt, wo ε und ε' die Massen der beiden Theilchen bezeichnen.

Aber auch dann, wenn die beiden Theilchen sich nicht blos in relativer Ruhe befinden, sondern auch der mit f bezeichnete, von ihrer Wechselwirkung *unabhängige* Theil ihrer Beschleunigung $= 0$ ist, ergiebt sich ihre Abstossungskraft noch immer verschieden von dem durch das *elektrostatische Gesetz* bestimmten Werthe ee'/r^2; sie ergiebt sich nämlich nach dem obigen *allgemeinen Gesetze* $= [ee'/r\,(r \mp \varrho)]$. —

Um nach diesem *allgemeinen Gesetze* den durch das *statische Gesetz* bestimmten Werth ee'/r^2 zu erhalten, darf der mit f bezeichnete Theil der Beschleunigung nicht $= 0$ sein, sondern muss dem anderen von der *Wechselwirkung* der beiden Theilchen abhängigen Theile, nämlich $[(\varepsilon + \varepsilon')/\varepsilon\varepsilon'] \,.\, [ee'/r^2]$ *entgegengesetzt gleich* sein, d. h.

$$f = -\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{r^2} = \mp \frac{\varrho c^2}{2r^2}.$$

Mit diesem Werthe von f findet man nach dem *allgemeinen Gesetze*, wenn $dr/dt = 0$ ist, die Grösse der Abstossungskraft:

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r\,(r \mp \varrho)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{c^2} f\right) = \frac{ee'}{r\,(r \mp \varrho)} \cdot \left(1 \mp \frac{\varrho}{r}\right) = \frac{ee'}{r^2},$$

d. i. gleich dem durch das *elektrostatische Gesetz* bestimmten Werthe. — Wirkliches statisches Gleichgewicht findet also zwischen zwei in *relativer Ruhe* befindlichen Theilchen nur dann Statt, wenn die aus ihrer Wechselwirkung resultirende Beschleunigung durch die von ihrer Wechselwirkung unabhängige Beschleunigung aufgehoben wird.

6.

Bewegungsgesetze zweier blos durch Wechselwirkung getriebenen elektrischen Theilchen.

Die Bewegungsgesetze zweier blos durch Wechselwirkung getriebenen elektrischen Theilchen, die schon in den Elektrodynamischen Maass-

bestimmungen, Bd. X dieser Abhandlungen[1]) entwickelt worden sind, sollen hier nur für den Fall, wo diese Theilchen keine relative Bewegung senkrecht gegen ihre Verbindungslinie besitzen, näher betrachtet und graphisch dargestellt werden, um zur Widerlegung irriger aus dem Grundgesetze gezogenen Folgerungen zu dienen.

Nach Art. 3 war das *allgemeine Potential* zweier elektrischen Theilchen e, e' in der Entfernung r von einander

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}\right),$$

wo die *Abstossungskraft* beider Theilchen, wie im vorigen Artikel bemerkt worden, durch $-dV/dr$ dargestellt wurde; soll aber diese Abstossungskraft durch $+dV/dr$ dargestellt werden, so ist das Potential

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{dr^2}{c^2 dt^2} - 1\right)$$

zu setzen.

Dieser letzteren Bestimmung gemäss ergiebt sich die Beschleunigung des Theilchens e in der Richtung r, $= [1/\varepsilon] \,.\, [dV/dr]$, und die Beschleunigung des Theilchens e' in der entgegengesetzten Richtung $= [1/\varepsilon'] \,.\, [dV/dr]$, wenn ε und ε' die Massen der Theilchen e und e' bezeichnen, woraus die *relative Beschleunigung* beider Theilchen resultirt,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{dV}{dr}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Multiplikation mit $2dr$ die Differentialgleichung

$$2\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2 r}{dt} = 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) \cdot \frac{dV}{dr} dr,$$

durch deren Integration zwischen den Grenzen $r = r_0$ und $r = r$, wo r_0 den Werth von r bezeichnet, für welchen die relative Geschwindigkeit $dr/dt = 0$ ist, erhalten wird:

$$\frac{dr^2}{dt^2} = 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) \cdot \left(\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr^2}{c^2 dt^2} - 1\right) + \frac{ee'}{r_0}\right),$$

oder, wenn $dr/cdt = u$ und $2([1/\varepsilon] + [1/\varepsilon']) = \pm \varrho c^2/ee'$ gesetzt wird,

$$u^2 = \pm \varrho\left(\frac{1}{r}(u^2 - 1) + \frac{1}{r_0}\right),$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Produkt ee' positiv oder negativ ist.

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. IV, p. 268.]

Wird zunächst nun der Fall betrachtet, wo ee' positiv ist, und drückt man die Entfernungen r und r_0 in Theilen der dem Theilchenpaare zukommenden Konstanten ϱ aus, so erhält man

$$u^2 = \frac{1}{r}(u^2 - 1) + \frac{1}{r_0}.$$

Sind nun für ein solches Theilchenpaar zu irgend einer Zeit die Entfernung r und die Geschwindigkeit u bestimmt, so ergiebt sich aus obiger Gleichung

$$r_0 = \frac{r}{1-(1-r)u^2}.$$

Ist aber auf diese Weise für das betrachtete Theilchenpaar, welches nur durch Wechselwirkung getrieben sich bewegt, die Entfernung r_0 bestimmt, für welche $u = 0$ ist, so können nun aus folgender Gleichung,

$$u^2 = \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\frac{1}{1-r},$$

alle zusammengehörigen Werthe von r und u für den nämlichen Werth von r_0 gefunden werden, wenn darin für r eine Reihe beliebiger von $r = 0$ bis $r = \infty$ wachsender Werthe gesetzt wird.

Eine solche Reihe zusammengehöriger Werthe von r und u wird graphisch durch eine Kurve dargestellt, deren Abscissen und Ordinaten die zusammengehörigen Werthe von r und u darstellen.

Der Werth von r_0 kann nun aber für dasselbe Theilchenpaar zu verschiedenen Zeiten sehr verschieden sein, wenn dazwischen ausser der Wechselwirkung äussere Einwirkungen Statt gefunden haben. Für jeden anderen Werth von r_0 ergiebt sich aber, nach Beseitigung der äusseren Einwirkung, eine andere Reihe zusammengehöriger Werthe von r und u, welche durch eine andere Kurve graphisch dargestellt werden.

Hiernach erhält man für ein ganzes System verschiedener Werthe von r_0 folgende nach diesen Werthen geordnete Zahlentafel von zusammengehörigen Werthen von r und u, und ein entsprechendes Kurvensystem, welches die Figur auf beigefügter Tafel [S. 412] darstellt, wobei zu bemerken ist, dass in dieser graphischen Darstellung die Werthe von r der folgenden Zahlentafel als Abscissen, die von $\pm u$ als Ordinaten aufgetragen sind, und zwar die von $+u$ als *positive* und die von $-u$ als *negative*, zur Unterscheidung der *Entfernung* der Theilchen von ihrer *Annäherung*. Das der *ersten* Abtheilung der Zahlentafel entsprechende Kurvensystem erfüllt den Raum $AA'B'B$, das der *zweiten* den Raum $A'A_0B_0B'$, der auf der Seite von A_0B_0 ins Unendliche zu erstrecken ist.

Werthe von $u = \sqrt{\frac{1}{1-r}\left(1-\frac{r}{r_0}\right)}$, für Werthe von r und r_0 zwischen 0 und 1.

$r_0 =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$r = 0,0$	0,00	± 1,00	± 1,00	± 1,00	± 1,00	± 1,00	± 1,00	± 1,00	± 1,00	± 1,00	± 1,00
$r = 0,1$		0,00	± 0,75	± 0,86	± 0,91	± 0,95	± 0,97	± 0,98	± 0,99	± 0,99	± 1,00
$r = 0,2$			0,00	± 0,65	± 0,79	± 0,86	± 0,91	± 0,94	± 0,97	± 0,98	± 1,00
$r = 0,3$				0,00	± 0,60	± 0,75	± 0,84	± 0,90	± 0,94	± 0,97	± 1,00
$r = 0,4$					0,00	± 0,57	± 0,75	± 0,84	± 0,91	± 0,96	± 1,00
$r = 0,5$						0,00	± 0,57	± 0,75	± 0,86	± 0,94	± 1,00
$r = 0,6$							0,00	± 0,60	± 0,79	± 0,91	± 1,00
$r = 0,7$								0,00	± 0,65	± 0,86	± 1,00
$r = 0,8$									0,00	± 0,75	± 1,00
$r = 0,9$										0,00	± 1,00
$r = 1,0$											± 0/0

Werthe von $u = \sqrt{\frac{1}{1-r}\left(1-\frac{r}{r_0}\right)}$, für Werthe von r und r_0 zwischen 1 und ∞.

$r_0 =$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	6,0	∞
$r = 1,0$	± 0/0												
$r = 1,2$	± 1,00	0,00											
$r = 1,4$	± 1,00	± 0,65	0,00										
$r = 1,6$	± 1,00	± 0,75	± 0,49	0,00									
$r = 1,8$	± 1,00	± 0,79	± 0,60	± 0,40	0,00								
$r = 2,0$	± 1,00	± 0,82	± 0,65	± 0,50	± 0,33	0,00							
$r = 2,5$	± 1,00	± 0,85	± 0,72	± 0,61	± 0,51	± 0,41	0,00						
$r = 3,0$	± 1,00	± 0,86	± 0,75	± 0,66	± 0,57	± 0,50	± 0,32	0,00					
$r = 3,5$	± 1,00	± 0,88	± 0,77	± 0,68	± 0,62	± 0,55	± 0,40	± 0,26	0,00				
$r = 4,0$	± 1,00	± 0,88	± 0,79	± 0,71	± 0,64	± 0,57	± 0,45	± 0,33	± 0,22	0,00			
$r = 5,0$	± 1,00	± 0,89	± 0,80	± 0,73	± 0,66	± 0,61	± 0,50	± 0,41	± 0,33	± 0,24	0,00		
$r = 6,0$	± 1,00	± 0,89	± 0,81	± 0,74	± 0,68	± 0,63	± 0,53	± 0,45	± 0,37	± 0,31	± 0,20	0,00	
∞	± 1,00	± 0,91	± 0,84	± 0,79	± 0,74	± 0,71	± 0,63	± 0,57	± 0,54	± 0,50	± 0,45	± 0,41	0,00

Die nach diesen Zahlenwerthen in der beigefügten Figur gegebene graphische Darstellung gewährt nun eine klare Einsicht davon, welche Bewandtniss es mit dem aus der Formel sich ergebenden Resultate habe, dass nämlich die wechselseitige Beschleunigung zweier Theilchen in der sogenannten *kritischen Entfernung* ϱ *unendlich gross* sei, was vielseitige Bedenken gegen das dieser Formel zu Grunde liegende allgemeine Gesetz der elektrischen Kraft hervorgerufen hat.

Man ersieht nämlich aus dieser graphischen Darstellung, dass in der Entfernung ϱ zugleich mit der unendlich grossen Beschleunigung ein Sprung in der relativen Geschwindigkeit beider Theilchen von $-c$

bis $+c$, oder umgekehrt, eintritt, und zwar so plötzlich, dass während desselben die Entfernung ϱ nicht die mindeste Aenderung erleidet.

Die Beschleunigung, indem sie *unendlich gross* wird, wechselt das Vorzeichen, und in Folge davon geht die Geschwindigkeit im selbigen Augenblicke, ohne allen Zeitverlust, von $-c$ zu $+c$ über, oder umgekehrt. Ehe die Entfernung ϱ die kleinste endliche Aenderung erleiden kann, hat der Uebergang der Geschwindigkeit c in die entgegengesetzte schon Statt gefunden.

Obige Formel giebt im Grunde nur die Beschreibung einer plötzlichen Zurückwerfung der Theilchen von einander, im Augenblicke, wo sie in die Entfernung ϱ gelangen, gerade so wie die Formel der Mechanik für zwei zusammenstossende *elastische* Kugeln, die ebenfalls von einander zurückgeworfen werden, und zwar desto plötzlicher, je kleiner die Kugeln und je grösser ihr Elasticitätskoefficient ist. *Momentane* Zurückwerfung bildet den *Grenzfall*, der wirklich zwar nicht vorkommt, doch nach den bisherigen Principien der Mechanik keineswegs für ungereimt oder absurd erklärt wird. Dass endlich nach der Formel, für $r=\varrho$, die Beschleunigung zwar unendlich gross sein würde, dass aber der Fall $r=\varrho$ ebenso wenig *wirklich vorkommt*, wie ein elastischer Körper mit unendlich grossem Elasticitätskoefficienten, verdient besondere Beachtung.

Ferner ersieht man, dass die Gesammtheit aller nach der angeführten Formel darstellbaren Kurven zwei von einander ganz getrennte Gruppen bildet, nämlich erstens eine Gruppe, in welcher alle Entfernungen der Theilchen kleiner als ϱ, und zweitens eine Gruppe, in der sie grösser als ϱ sind, welche beide von einander dadurch geschieden sind, dass, wie oben gezeigt worden, der Fall, wo die Entfernung $=\varrho$ wäre, gar nicht wirklich vorkommt, noch vorkommen kann.

Beide Gruppen zusammen füllen den ganzen Raum für alle Abscissenwerthe von $r=0$ bis $r=\infty$ und für alle Ordinatenwerthe von $u=-c$ bis $u=+c$ aus, und keine dieser Kurven gestattet eine Fortsetzung über die Grenzen dieses Raums hinaus. Es folgt hieraus, dass zwei durch blosse Wechselwirkung getriebene elektrische Theilchen, deren relative Geschwindigkeit in irgend einem Augenblicke nicht grösser als $+c$ und nicht kleiner als $-c$ ist, stets innerhalb der angegebenen Grenzen bleiben.[1])

[1]) Etwas Anderes wäre es, wenn der bei der Definition des Arbeitsvermögens ausgeschlossene Fall einträte, dass zwei elektrische Theilchen schon anfänglich eine Geschwindigkeit $>+c$ oder $<-c$ besässen, oder wenn die beiden Theilchen nicht blos durch Wechselwirkung, sondern ausserdem noch durch äussere Einwirkung getrieben sich bewegten und dadurch eine solche Geschwindigkeit, entweder $>+c$ oder $<-c$, erhalten hätten. Gesetzt ein solcher Fall käme wirklich vor, so würden

7.

Elektrische Strahlung, insbesondere Reflexion und Zerstreuung der Strahlen.

Die Bewegungen zweier blos durch Wechselwirkung getriebenen elektrischen Theilchen, die sich in Bewegung gegen einander sowohl in der sie verbindenden Geraden, als auch senkrecht darauf befinden, sind in den Elektrodynamischen Maassbestimmungen, Bd. X dieser Abhandlungen betrachtet und zu ihrer Bestimmung folgende Gleichungen gefunden worden:[1])

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{a_0^2}{c^2}\right), \tag{1}$$

$$r a = r_0 a_0, \tag{2}$$

wo r die Entfernung beider Theilchen von einander, und u und a ihre relativen Geschwindigkeiten in der Richtung von r und senkrecht darauf bezeichnen; ferner bezeichnet r_0 den Werth von r, für welchen $u = 0$ ist, a_0 den Werth von a, für welchen $r = r_0$ ist, endlich ϱ die von der Natur und den Massen ε und ε' der beiden Theilchen e und e' abhängende Konstante

$$\varrho = 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2},$$

wo ϱ positiv oder negativ ist wie das Produkt ee'. — Soll ϱ die Bedeutung einer Entfernung beider Theilchen von einander haben, die *nur positiv* sein kann, wie r und r_0, so ist

$$\varrho = \pm 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2}$$

die Bewegungen zweier solcher Theilchen, wenn sie von diesem Augenblicke an blos durch Wechselwirkung getrieben sich weiter bewegten, durch ganz andere Kurven dargestellt werden, welche vom Gebiete des oben betrachteten Kurvensystems ganz ausgeschlossen wären. Alle diese anderen Kurven würden ein in sich abgeschlossenes System bilden, welches den ganzen übrigen Raum erfüllte. Alle Kurven dieser zweiten Art sind in der beigefügten Figur durch *punktirte Linien* dargestellt worden. Auch diese Bewegungsarten, oder die sie darstellenden Kurven, zerfallen in zwei von einander an der durch die kritische Entfernung ϱ bestimmten Stelle ganz geschiedene Gruppen, nämlich eine Gruppe, in welcher alle Entfernungen der Theilchen stets kleiner als ϱ, und in eine Gruppe, in welcher sie stets grösser als ϱ sind. Ausserdem findet auch hier eine vollkommene *Symmetrie* zwischen den Kurvenarmen mit Ordinaten $> + c$ und $< - c$ Statt. Beide Kurvenarme sind ferner bei $r = \varrho$ mit einander *verbunden* in Folge des plötzlichen Wechsels der Geschwindigkeit von $\pm \infty$ zu $\mp \infty$.

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. IV, p. 273.]

zu setzen, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Produkt ee' positiv oder negativ ist. Für Gleichung (1) ist dann zu setzen

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r \mp \varrho}\left(\frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{a_0^2}{c^2} \pm \frac{\varrho}{r_0}\right),$$

mit derselben Bestimmung der Vorzeichen. — Da im Folgenden nur *gleichartige* elektrische Theilchen betrachtet werden sollen, so werden stets die oberen Vorzeichen gelten. — Die Gleichung $ra = r_0 a_0$ ergiebt $a = 0$ für $r = \infty$, bei gegebenen endlichen Werthen von r_0 und a_0, womit die Existenz einer geradlinigen Asymptote, mit welcher die Bahn im Unendlichen zusammenfällt, verbunden ist.

Es soll nun der Fall betrachtet werden, dass zwei *gleiche* elektrische Theilchen e und e' aus grosser Entfernung sich einander mit grosser, aber in Folge wechselseitiger Abstossung abnehmender, Geschwindigkeit u nähern, deren grösster Werth, nämlich für $r = \infty$, mit u_0 bezeichnet werden soll. Der Einfachheit halber soll bei dieser relativen Bewegung e als ruhend betrachtet werden. In derselben Bahn und relativ gegen e mit gleicher Geschwindigkeit soll dem Theilchen e' eine Reihe *gleicher* Theilchen e'', e'''.... folgen, in solchen Intervallen, dass die wechselseitigen Störungen derselben nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

Aus dem oben angeführten Gesetze Gleichung (1) ergiebt sich der für $r = \infty$ geltende Werth von u, nämlich

(3) $$u_0 = c\sqrt{\frac{a_0^2}{c^2} + \frac{\varrho}{r_0}}.$$

Da nun ϱ für gleiche Theilchen gleich ist, und auch u_0 als gleich angenommen worden ist, so kann eine Verschiedenheit nur noch in Beziehung auf den Werth von r_0 und den daraus nach Gleichung (3) sich ergebenden Werth von a_0 Statt finden.

Das System aller dieser Theilchen heisse ein *elektrischer Strahl*, und die Asymptote, in der sich die Theilchen befinden, wenn sie sehr weit von e entfernt sind, diene zur Bestimmung der *Richtung* des Strahls.

Wäre für alle Theilchen $r_0 = \varrho\ [c^2/u_0^2]$, woraus $a_0 = 0$ folgte, so würden sie alle sich in derselben Geraden fortbewegen bis zur Entfernung r_0, worauf sie alle wieder in derselben Geraden rückwärts gehen würden. Ist a_0 aber von Null verschieden, und zwar, zugleich mit r_0, verschieden für alle Theilchen e', e''.., für welche u_0 gleich ist, für alle aber sehr klein, so wird jedes Theilchen, wenn r sich dem Werthe r_0 nähert, von jener Asymptote abweichen. Der Winkel, welchen dann

die Gerade, z. B. $e'e$, in Folge dieser Abweichung, mit der Richtung des Strahls bildet, werde mit φ bezeichnet, und es sei $\varphi = \varphi_0$, wenn die abnehmende Entfernung $e'e = r_0$ geworden ist, wo nämlich die Geschwindigkeit in der Richtung $e'e$, $= 0$, in der Richtung senkrecht darauf, $= a_0$ ist.

Von dem Augenblicke an, wo $r = r_0$ geworden, entfernen sich die beiden Theilchen e und e' wieder von einander, und ihre Verbindungslinie nähert sich einer anderen Geraden, die mit der Richtung, welche ee' besass, als es $= r_0$ geworden, ebenfalls einen Winkel $= \varphi_0$ bildet und mit der Richtung des ursprünglichen Strahls den Winkel $= 2\varphi_0$, welcher der *Reflexionswinkel* heissen soll. Dieser Reflexionswinkel ist nun aber für die verschiedenen Theilchenpaare ee', $ee''\ldots$, welche zu demselben Strahl gehören, sehr verschieden, nach Verschiedenheit der Werthe von a_0 oder r_0/ϱ, woraus sich ergiebt, dass ein solcher reflektirter Strahl zugleich auch *zerstreut* werde. Diese *Zerstreuung* elektrischer Strahlen soll nun nach obigen Gesetzen näher bestimmt werden.

Zunächst ergiebt sich aus obigem Gesetze (2) das Wachsthum des mit φ bezeichneten Winkels, nämlich

$$d\varphi = \frac{a\,dt}{r} = \frac{a_0 r_0}{r^2}\,dt. \qquad (4)$$

Substituirt man ferner in Gleichung (1) den aus Gleichung (3) sich ergebenden Werth von $a_0^2 = u_0^2 - [\varrho/r_0]\,c^2$, so erhält man

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{dr^2}{c^2 dt^2} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{u_0^2}{c^2} - \frac{\varrho}{r}\right), \qquad (5)$$

folglich, wenn r bei wachsendem t abnimmt,

$$dt = -\,dr\sqrt{\frac{r(r-\varrho)}{(r-r_0)(u_0^2(r+r_0)-\varrho c^2)}}. \qquad (6)$$

Hieraus folgt

$$d\varphi = \frac{a_0 r_0}{r^2}\,dt = -\,\frac{a_0 r_0}{u_0} \cdot \frac{dr\sqrt{r^2 - r\varrho}}{r^2\sqrt{r^2 - \frac{c^2}{u_0^2}\varrho r - \left(r_0^2 - \frac{c^2}{u_0^2}\varrho r_0\right)}},$$

oder, wenn $1/r = s$ gesetzt wird,

$$d\varphi = +\,\frac{a_0 r_0}{u_0} \cdot ds\sqrt{\frac{1 - \varrho s}{1 - \frac{c^2}{u_0^2}\varrho s - \left(r_0^2 - \frac{c^2}{u_0^2}\varrho r_0\right)s^2}}, \qquad (7)$$

woraus man sieht, dass φ durch *elliptische Funktionen* dargestellt werden kann.

Beschränkt man sich nun aber auf diejenigen Fälle, wo der Werth von $a_0^2 = u_0^2 - [\varrho/r_0]\,c^2$, und demnach auch der Werth von $(r_0^2 - [c^2/u_0^2]\,\varrho r_0)\,s^2$, *entweder* ganz verschwindet *oder* doch sehr klein ist, so reducirt sich obige Gleichung im *ersteren* Falle auf

(8) $$d\varphi = +\frac{a_0 r_0}{u_0}\cdot ds\sqrt{\frac{1-\varrho s}{1-r_0 s}},$$

im *letzteren* Falle, wo a_0 sehr klein sein soll, jedoch ohne ganz zu verschwinden, werde $r_0\,[a_0^2/u_0^2] = r_0 - [c^2/u_0^2]\,\varrho = \beta$ gesetzt und β so klein angenommen, dass in Gleichung (7), welche durch Einführung von β in

$$d\varphi = \frac{a_0 r_0}{u_0}\cdot ds\sqrt{\frac{1-\varrho s}{(1-r_0 s)(1+\beta s)}}$$

übergeht, $(1-\frac{1}{2}\beta s)$ für den Faktor $\sqrt{1/(1+\beta s)}$ gesetzt werden kann, wodurch für (7) folgende Gleichung erhalten wird:

(9) $$d\varphi = \frac{a_0 r_0}{u_0}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\beta s\right)ds\sqrt{\frac{1-\varrho s}{1-r_0 s}},$$

woraus sich ergiebt, wenn $S = 1-(\varrho + r_0)\,s + \varrho r_0 s^2$ gesetzt wird,

$$\int d\varphi = \frac{a_0 r_0}{u_0}\left[\int\frac{ds}{\sqrt{S}} - \left(\frac{1}{2}\beta+\varrho\right)\int\frac{s\,ds}{\sqrt{S}} + \frac{1}{2}\beta\varrho\int\frac{s^2 ds}{\sqrt{S}}\right].$$

Setzt man $b = -(\varrho + r_0)$ und $c = \varrho r_0$, so erhält man durch Ausführung der Integration:[1])

$$\frac{u_0}{a_0 r_0}\int d\varphi = \left[1+\frac{b}{4c}(\beta+2\varrho)+\frac{\beta\varrho}{4c}\left(\frac{3b^2}{4c}-1\right)\right]\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\log\left(\sqrt{S}+s\sqrt{c}+\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)$$
$$-\frac{1}{c}\left(\varrho+\frac{\beta}{2}\left(1+\frac{3b}{4c}\varrho\right)-\frac{\beta\varrho}{4}\,s\right)\sqrt{S},$$

woraus, wenn man $m = \varrho/r_0$, $n = c/u_0$, folglich nach Gleichung (3) $a_0/u_0 = \sqrt{1-mn^2}$ setzt, erhalten wird:

[1]) Nämlich

$$\int\frac{ds}{\sqrt{S}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\log\left(\sqrt{S}+s\sqrt{c}+\frac{b}{2\sqrt{c}}\right),$$

$$\int\frac{s\,ds}{\sqrt{S}} = -\frac{b}{2c\sqrt{c}}\log\left(\sqrt{S}+s\sqrt{c}+\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)+\frac{\sqrt{S}}{c},$$

$$\int\frac{s^2 ds}{\sqrt{S}} = \frac{3b^2-4c}{8c^2\sqrt{c}}\log\left(\sqrt{S}+s\sqrt{c}+\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)+\frac{1}{2c}\left(s-\frac{3b}{2c}\right)\sqrt{S}.$$

$$\varphi_0 = \int\limits_{s=0}^{s=\frac{1}{r_0}} d\varphi = \sqrt{1-mn^2} \cdot \left[\frac{1-m}{2}\left(1 - \frac{1+3m}{8m}(1-mn^2)\right)\sqrt{\frac{1}{m}} \cdot \log\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} + 1 + \frac{1-3m}{8m}(1-mn^2)\right]. \quad (10)$$

Hiernach ist folgende Tafel der Werthe von φ_0, für verschiedene Werthe von m und n, berechnet worden:

	$n=1$	$n=2$
$m=1$	0	
$m=\frac{1}{2}$	0,9658	
$m=\frac{1}{3}$	1,1269	
$m=\frac{1}{4}$	1,1479	0
$m=\frac{1}{5}$	1,2272	0,7776
$m=\frac{1}{6}$	1,2486	0,9688
$m=\frac{1}{7}$	1,2629	1,0690
$m=\frac{1}{8}$	1,2732	1,1302
$m=0$	1,3750	1,3750 [1]

Es ergiebt sich hieraus für alle Theilchen e', e'' ... eines elektrischen Strahls, welche sich dem Theilchen e aus grosser Entfernung mit der Geschwindigkeit u_0 *nähern*, dass sie, wenn sie bis zur Entfernung r_0 gelangt sind, umkehren und sich von e wieder entfernen, mit einer Geschwindigkeit, die in grosser Entfernung bis u_0 wieder wächst, dass aber die beiden Richtungen, in welchen beide Theilchen mit der Geschwindigkeit u_0 sich erst näherten und dann entfernten, einen Winkel $2\varphi_0$ mit einander bilden, der für die verschiedenen Paare nach Verschiedenheit des Werths von r_0 sehr verschieden ist.

Die Verschiedenheit des Winkels $2\varphi_0$, welcher der *Reflexionswinkel* genannt worden ist, für die verschiedenen Theilchenpaare nach Verschiedenheit des Werths von r_0, bildet das mit dem Namen der *Zerstreuung* elektrischer Strahlen durch Reflexion bezeichnete Faktum, und das gefundene Gesetz der Abhängigkeit des Reflexionswinkels $2\varphi_0$ von m und n giebt von dieser Zerstreuung genaue Bestimmung, wenn man beachtet, dass n für alle Theilchen eines und desselben Strahls denselben von u_0, nach der Gleichung $n = c/u_0$, abhängigen Werth besitzt, ferner dass m für jedes Theilchenpaar durch die drei Gleichungen $m = \varrho/r_0$, $a_0^2 = u_0^2 - [\varrho/r_0]\, c^2$ und $a_0 r_0 = ar$, nach Elimination von r_0 und a_0, aus der relativen Geschwindigkeit a beider Theilchen in der

[1] [Die in der Originalabhandlung für $m=0$, $n=1$ und $n=2$ aufgeführten Werthe 1,2500 hat W. Weber später in die oben angegebenen umgeändert.]

Richtung senkrecht auf ihre Verbindungslinie, für jede beliebige Entfernung r bestimmt werden kann, nämlich durch die Gleichung:

$$m^2 + \frac{\varrho^2 c^2}{r^2 a^2} m = \frac{\varrho^2 u_0{}^2}{r^2 a^2}.$$

8.

Anwendung der Theorie der Zurückwerfung und Zerstreuung elektrischer Strahlen auf Lichtäther und Gase nach der Krönig-Clausius'*schen Theorie der molekularen Stösse.*

Die Zurückwerfung und Zerstreuung elektrischer Strahlen, welche aus elektrisch gleichartigen Theilchenpaaren bestehen, die im leeren Raume mit gleicher Wurfgeschwindigkeit sich nähern oder entfernen, führt zu einem ähnlichen Aggregatzustand des ganzen Systems solcher im leeren Raume befindlichen Theilchen, als in der Gastheorie nach Krönig und Clausius den Gasen zugeschrieben wird, blos mit dem Unterschiede, dass die in Wurfbewegung befindlichen Theilchen der Gase ponderable Theilchen sind, während jene elektrischen Theilchen als imponderabel bezeichnet zu werden pflegen, weil die Geltung des allgemeinen Gravitationsgesetzes von ihnen bisher wenigstens nicht bewiesen ist. Nur nach Mosotti's Gravitationstheorie (siehe Zöllner, Wissenschaftliche Abhandlungen, 1. Bd., No. 2, Leipzig 1878), wonach alle Gravitationskräfte aus elektrischen Abstossungs- und Anziehungskräften resultiren, würden alle Wechselwirkungen, ponderabler sowohl als elektrischer Theilchen, unter gemeinsame Bestimmungen gefasst werden, indem jedes ponderable Theilchen hiernach ein *elektrisches Doppeltheilchen* (gleich einem Doppelsterne) wäre, nämlich ein positiv und ein negativ elektrisches Theilchen, die sich um einander drehten.

Nach dieser Mosotti'schen Vorstellung ponderabler Theilchen ergiebt sich von selbst, dass, wenn diese Theilchen sich im leeren Raum in Wurfbewegung befinden, wie nach der Krönig-Clausius'schen Gastheorie bei den Gasen angenommen wird, so würden aus den Gesetzen der elektrischen Wechselwirkung für diese im leeren Raum in Wurfbewegung befindlichen ponderablen Theilchen ähnliche Zurückwerfungs- und Zerstreuungsgesetze sich ergeben, als im vorigen Artikel für gleichartige elektrische in Wurfbewegung befindliche Theilchen gefunden worden sind, wie leicht erkannt wird, wenn man beachtet, dass jene Gesetze vorzugsweise für Paare von gleichartigen Theilchen gelten, die sich bei ihrer relativen Wurfbewegung bis auf eine Entfernung r_0 nähern, die ϱ zur unteren Grenze hat. Denn zwei ponderable Molekule enthalten zwei Paare gleichartig elektrischer Theilchen, und für jedes dieser beiden Paare giebt es eine Entfernung ϱ, bis zu welcher die Theilchen des Paares nicht gelangen können, weil ihre Abstossungskraft unendlich

werden würde, was nur dadurch verhindert wird, dass die beiden Theilchen durch die immer schneller wachsende Abstossungskraft zum Stillstand gebracht werden, und zwar bevor sie zur Entfernung ϱ gelangen, worauf sie durch die in Folge ihrer Wechselwirkung fortdauernde Abstossungskraft sich wieder ebenso von einander entfernen, als sie sich vorher genähert hatten.

Es lassen sich hiernach die im vorigen Artikel gefundenen Gesetze der Zurückwerfung und Zerstreuung für Strahlen gleichartig elektrischer Theilchen auch auf Strahlen ponderabler, nach Mosotti's Vorstellung zusammengesetzter, Molekule übertragen. Und sind nun diese ponderablen Molekule Gasmolekule, so wird dadurch ein Aggregatzustand des Gases gebildet, welcher dem nach der Krönig-Clausius'schen Theorie den Gasen zugeschriebenen Aggregatzustande ganz entspricht, ohne dass es nöthig wäre, diesen ponderablen Gasmolekulen mit Krönig eine besondere Form und Elasticität, oder mit Clausius und Maxwell besondere, einer höheren Potenz der Entfernung umgekehrt proportionale Abstossungskräfte zuzuschreiben.

Giebt es aber einen Raum, z. B. den Weltraum, worin keine ponderablen Molekule sich befinden, so leuchtet doch die Möglichkeit ein, dass sich in diesem Raume die Theilchen eines der beiden Bestandtheile dieser ponderablen Molekule, d. h. entweder die positiv oder die negativ elektrischen Theilchen, befinden, die in Wurfbewegung ebenfalls einen Körper von besonderem Aggregatzustand bilden würden, der aber, weil er nur aus gleichartig elektrischen Theilchen bestände, nicht als ponderabler Körper bezeichnet werden dürfte, sondern als imponderabler *Aether*, für den aber ebenfalls die von Maxwell (Philos. Transact. 1867) für *dynamische Medien* entwickelten Bewegungsgesetze, namentlich die mit den Verbreitungsgesetzen der Lichtwellen übereinstimmenden Gesetze der *Wellenverbreitung* gelten würden. Eine solche Vorstellung von einem Raum erfüllenden Medium, bestehend aus wechselseitig sich abstossenden Theilchen, scheint ohne feste Raumbegrenzung nur unter Voraussetzung einer ganz unbegrenzten Erstreckung ins Unendliche möglich zu sein, jedoch scheint eine Beschränkung eines solchen Mediums auf einen endlichen Raum ohne feste Begrenzung nach Mosotti dadurch ermöglicht, dass dieses Medium einen Mosotti'schen ponderablen Körper umgäbe, welcher auf dasselbe anziehend wirken, und es dadurch zusammenhalten würde.

9.

Bewegungsgesetze zweier durch Wechselwirkung und äussere Einwirkung getriebenen elektrischen Theilchen.

Es soll nur der einfache Fall betrachtet werden, wo die *äussere* Einwirkung auf das Theilchen e in einer konstanten Kraft nach Rich-

tung der verlängerten Geraden $e'e$ besteht, welche, mit der Summe $\varepsilon + m$ der eigenen Masse des Theilchens e und der damit fest verbundenen ponderablen Masse dividirt, den Quotienten g giebt. — Die *äussere* Einwirkung auf das andere Theilchen e' bestehe in einer Kraft, welche der aus der *Wechselwirkung* von e und e' resultirenden auf e' wirkenden Kraft *entgegengesetzt gleich* ist.

Das *Potential* V der beiden Theilchen e und e' in der Entfernung r ist nach Art. 5, wenn man unter V diejenige Funktion versteht, deren Differentialquotient dV/dr die *Abstossungskraft* beider Theilchen darstellt,

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{dr^2}{c^2dt^2} - 1\right).$$

Hieraus folgt nun die *Beschleunigung durch Wechselwirkung* des Theilchens e nach r, $= [1/(\varepsilon + m)] \,.\, [dV/dr]$, und die des Theilchens e' in entgegengesetzter Richtung $= [1/\varepsilon'] \,.\, [dV/dr]$, woraus die relative Beschleunigung beider Theilchen *durch Wechselwirkung* resultirt:

$$= \left(\frac{1}{\varepsilon + m} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) \cdot \frac{dV}{dr}.$$

Hierzu kommt die Beschleunigung *durch äussere Einwirkung*, welche für e in der Richtung r, $= g$ ist, und für e', in derselben Richtung, $= [1/\varepsilon'] \,.\, [dV/dr]$, woraus die *relative* Beschleunigung beider Theilchen *durch äussere Einwirkung* resultirt:

$$= g - \frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{dV}{dr}.$$

Die ganze relative Beschleunigung ergiebt sich hieraus:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{\varepsilon + m} \cdot \frac{dV}{dr} + g.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2dr$, so erhält man

$$2\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt} = \frac{2}{\varepsilon + m} \cdot \frac{dV}{dr} dr + 2g\,dr,$$

und hieraus durch Integration zwischen den Grenzen $r = r_0$ und $r = r$, wo r_0 den Werth von r zur Zeit, wo $dr/dt = 0$ ist, bezeichnet:

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{2}{\varepsilon + m}\left[\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr^2}{c^2dt^2} - 1\right) + \frac{ee'}{r_0}\right] + 2g(r - r_0).$$

Bezeichnet man dr/cdt mit u, und beachtet, dass $\pm [ee'/\varrho] = a$ $= \frac{1}{2} [\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')]\, c^2$ ist, so erhält man

$$u^2 = \pm \frac{\varepsilon\varepsilon' \,.\, \varrho}{(\varepsilon + m)(\varepsilon + \varepsilon')}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} + \frac{1}{r}u^2\right) + \frac{2g}{c^2}(r - r_0),$$

und hieraus

$$u^2 = \frac{\pm \frac{\varepsilon\varepsilon' \cdot \varrho}{(\varepsilon+m)(\varepsilon+\varepsilon')} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) + \frac{2g}{c^2}(r - r_0)}{1 \mp \frac{\varepsilon\varepsilon' \cdot \varrho}{(\varepsilon+m)(\varepsilon+\varepsilon')} \cdot \frac{1}{r}}.$$

Setzt man nun $\varepsilon\varepsilon' \cdot [\varrho/(\varepsilon+m)(\varepsilon+\varepsilon')] = \varrho'$, so ergiebt sich:

für positive Werthe von ee', $u^2 = \frac{\varrho'}{\varrho' - r}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\left(1 + \frac{2g}{c^2} \cdot \frac{rr_0}{\varrho'}\right)$, (1)

für negative Werthe von ee', $u^2 = \frac{\varrho'}{\varrho' + r}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\left(1 - \frac{2g}{c^2} \cdot \frac{rr_0}{\varrho'}\right)$, (2)

oder, wenn r und r_0 in Theilen von ϱ' ausgedrückt werden:

für positive Werthe von ee', $u^2 = \frac{1}{1 - r}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{2g\varrho'}{c^2} \cdot rr_0\right)$, (3)

für negative Werthe von ee', $u^2 = \frac{1}{1 + r}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \cdot \left(1 - \frac{2g\varrho'}{c^2} \cdot rr_0\right)$. (4)

Es ergeben sich hieraus, wie man sieht, wenn $g = 0$ gesetzt wird, die Art. 6 gefundenen Gleichungen für zwei blos *durch Wechselwirkung* getriebene Theilchen, wenn dagegen ε oder $\varepsilon' = 0$ gesetzt wird, wo $\varrho' = 0$ wird, erhält man aus (1) und (2)

$$u^2 c^2 = \frac{dr^2}{dt^2} = 2g(r - r_0),$$

d. i. das *Fallgesetz,* worin $(r - r_0)$ den *Fallraum* bezeichnet.

Die *graphische* Darstellung dieser Bewegungsarten eines elektrischen Theilchenpaars durch *Wechselwirkung und äussere Einwirkung* ergiebt sich leicht für positive Werthe von ee' aus der in der Figur zu S. 669 gegebenen graphischen Darstellung der Bewegungsarten eines Theilchenpaars durch *Wechselwirkung allein*, ohne äussere Einwirkung; es brauchen in obiger Figur, bei unveränderten Abscissen r, alle Ordinaten $\pm u$ der durch einen bestimmten Werth der Konstante gegebenen Kurve, nur im Verhältniss von $1 : \sqrt{1 + [2g\varrho'/c^2]\, r_0 r}$ vergrössert zu werden, um diejenige Kurve zu erhalten, welche die Bewegungen des Theilchenpaars unter den gegebenen *äusseren* Einwirkungen darstellt, wobei nur zu beachten ist, dass r_0 und r in Theilen von ϱ', statt von ϱ, dargestellt sind, und dass $\varrho' : \varrho = [\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon+\varepsilon')] : \varepsilon + m$, d. i. nahezu $= \varepsilon : m$, für kleine Werthe von ε, sich verhält.

Man ersieht hieraus, dass auch bei *äusserer Einwirkung* wie die oben angegebene, für eine *bestimmte Entfernung* ϱ' gleichartiger Theilchen von einander, ihre relative Beschleunigung durch Wechselwirkung zwar nach der Formel unendlich gross sein würde, dass aber diese Ent-

fernung ϱ' niemals eintreten könne, aus dem im vorigen Artikel angeführten Grunde, der auch hier Statt findet. Denn sollte der Fall, wo die Entfernung der Theilchen $= \varrho'$ wäre, wirklich eintreten, so müsste er eintreten, entweder indem beide Theile sich einander *näherten* oder von einander *entfernten*. Findet nun während der Annäherung *Abstossung*, während der Entfernung *Anziehung* Statt, und wächst jene Abstossung und diese Anziehung nach dem angeführten Gesetz in der Art, dass sie für die Entfernung ϱ' *unendlich* werden würde, so werden die Theilchen in keinem von beiden Fällen bis zur Entfernung ϱ' gelangen, sondern zum Stillstand und zur Umkehr gebracht werden, ehe sie dahin gelangt sind. Dies findet nach unserem Gesetze Statt und es leuchtet daraus der Grund ein, warum der Fall unendlicher Beschleunigung nach diesem Gesetz wirklich niemals eintreten kann.

Es bietet also auch der in diesem Artikel erörterte Fall der Verbindung von *Wechselwirkung* mit *äusserer* Einwirkung keinen Grund dar zu Bedenken gegen das aufgestellte Gesetz, und es ist daher gar nicht nöthig, zur Vertheidigung dieses Gesetzes in der Annahme Zuflucht zu suchen, dass, weil ϱ und ϱ' Molekulardistanzen seien, *besondere Molekularkräfte* noch in Betracht kommen können, durch welche der Fall unendlicher Beschleunigung in den Molekularentfernungen ϱ oder ϱ' beseitigt würde.

Es bleiben übrigens die Entfernungen ϱ und ϱ' stets Molekularentfernungen, weil nämlich, wenn auch durch Vergrösserung der auf einander wirkenden elektrischen Massen ϱ vergrössert werden kann, doch wenigstens eine von den beiden auf einander wirkenden elektrischen Massen an eine *ponderable* Masse gebunden sein wird, welche mit ihr fortbewegt werden muss, wie in dem eben betrachteten Falle, wodurch eine *Verkleinerung* von ϱ eintritt, im Verhältniss der ganzen Masse $\varepsilon + m$ zur elektrischen ε, wo m eine ponderable Masse bezeichnet, gegen welche ε verschwindet.

Der in diesem Artikel betrachtete Fall zweier durch Wechselwirkung und *äussere* Einwirkung getriebenen elektrischen Theilchen ist der nämliche, auf welchen sich der von Helmholtz erhobene Einwand bezog, welchen Neumann in seiner Abhandlung, S. 91 ff. dieses Bandes, einer näheren Prüfung unterworfen hat.

Neumann erblickte S. 92 in dem von Helmholtz gerügten „absurden Resultate unendlicher Beschleunigung“[1]) in der sogenannten kritischen Entfernung, ein neues Argument dafür, dass mein elektrisches

[1]) Eine *unendliche Beschleunigung* kommt bei Betrachtung zusammenstossender Körper häufig vor und wird in der Mechanik nicht als *absurd* betrachtet, sondern als *Grenzfall* bei wachsender Elasticität. Kommt dieser *Grenzfall* niemals vor, so gilt das nämliche auch von obigem Falle, wie sogleich gezeigt werden wird.

Grundgesetz (ähnlich wie das NEWTON'sche) für ausserordentlich kleine Entfernungen einer gewissen Modifikation bedürfe, erhob indessen selbst den Einwand dagegen, dass jener Fall unendlicher Beschleunigung sich so einrichten lasse, dass nur *grosse* Entfernungen in Betracht kämen, welche eine Modifikation des Resultats durch Molekularkräfte ausschlössen.

Von diesen Fällen, wo nur grosse Werthe als kritische Entfernungen in Betracht kämen, sei nur, bemerkt NEUMANN, die *Wirklichkeit* oder *Realisirbarkeit* nicht nachgewiesen, ohne welche diese Fälle nicht als Kontrole eines physikalischen Gesetzes benutzt werden könnten, und der von HELMHOLTZ erhobene Einwand würde *ernstliche Bedeutung* nicht früher gewinnen, als bis dieser Nachweis geliefert worden sei.

Dagegen ist nun in diesem und im vorigen Artikel der Beweis geliefert worden, dass die *Möglichkeit des Falles*, in welchem nach HELMHOLTZ das „absurde Resultat unendlicher Beschleunigung" Statt finden würde, *dadurch ganz ausgeschlossen* werde, dass die beiden Theilchen, ehe sie zur kritischen Entfernung gelangen können, sich derselben vorher genähert haben müssen, entweder aus *kleinerer* oder aus *grösserer* Entfernung, dass sie aber wegen der, bei der Annäherung, ins Unendliche wachsenden Beschleunigung *rückwärts*, d. i. *Verlangsamung*, welche Statt findet, sowohl wenn die Theilchen aus *kleinerer* als auch wenn sie aus *grösserer* Entfernung der kritischen Entfernung nahen, zur kritischen Entfernung *niemals gelangen können*, woraus folgt, dass das von HELMHOLTZ gerügte „absurde Resultat unendlicher Beschleunigung" *gar nicht existirt*, und dass nur ein von HELMHOLTZ begangener und bisher nicht widerlegter Irrthum dazu geführt hat. — Auf die Grösse der kritischen Entfernung kommt übrigens hierbei gar nichts an. —

Doch sollen in den beiden nächsten Artikeln noch ein Paar Fälle näher erörtert werden, in denen man eine sehr bedeutende Vergrösserung der sogenannten kritischen Entfernung erreichen zu können geglaubt hat, und welche durch die daran geknüpften Folgerungen besonderes Interesse auf sich gezogen haben.

10.

Bewegungsgesetze eines in elektrischer Hohlkugel eingeschlossenen, durch elektrische Wechselwirkung und äussere Einwirkung getriebenen Elektricitätstheilchens.

In diesen Abhandlungen hat S. 103—106 dieses Bandes C. NEUMANN folgenden Fall besonders hervorgehoben und erörtert:

„Es sei gegeben eine gleichmässig mit Elektricität belegte und fest aufgestellte Kugelschaale (vom Radius a). Im Innern dieser Schaale

befinde sich ein mit Elektricität belegter, um seine fest aufgestellte horizontale Axe drehbarer Cylinder (dessen Radius $= a$ und dessen Trägheitsmoment $= \mathfrak{M}$ sei). Auf diesen Cylinder sei ein Faden aufgewickelt, und das freie Ende dieses Fadens mit einem Gewicht Mg beschwert. — Es soll die Bewegung, welche der Cylinder unter der Einwirkung der elektrischen Kugelschaale einerseits und unter der Einwirkung des Gewichts Mg andererseits annehmen wird, näher untersucht werden."

„Dabei soll vorausgesetzt sein, dass der Cylinder mit der in ihm vorhandenen elektrischen Materie *starr* und *unlöslich* verbunden sei, und dass Gleiches auch Statt finde bei der Kugelschaale."

Neumann ist für diesen Fall, wenn dabei die elektrischen Ladungen des Cylinders und der Kugelschaale *konstant* angenommen werden, schliesslich Seite 106 zu folgender Gleichung gelangt:

$$L\vartheta'^2 = Mga\vartheta + \text{Konst.},$$

oder, nach t differentiirt,

$$2L\vartheta'' = Mga,$$

wo ϑ den Drehungswinkel, ϑ' die Drehungsgeschwindigkeit und ϑ'' die Drehungsbeschleunigung des Cylinders bezeichnet, und, wenn H die Dichtigkeit der Elektricität auf der Kugelschaale und Σe die Ladung der Cylinderoberfläche bezeichnet,

$$L = \frac{Ma^2 + \mathfrak{M}}{2} - \frac{4\pi a H \,.\, a^2 \Sigma e}{3c^2}$$

gesetzt und *konstant* angenommen ist.

Neumann hat hieran nun folgenden Ausspruch geknüpft: „Ist die *Konstante* $L =$ pos., so wird das angehängte Gewicht Mg mit beschleunigter Geschwindigkeit *sinken*. Ist $L = 0$, so entsteht eine unendlich grosse Beschleunigung. Ist endlich $L =$ neg., so wird jenes Gewicht mit beschleunigter Geschwindigkeit *gehoben* werden. In diesem letzteren Falle könnte, falls man den Faden unendlich lang annimmt, das Gewicht unendlich hoch emporgehoben, also unendlich grosse Arbeit geleistet werden."

„Untersucht man aber, ob die Fälle $L = 0$ und $L =$ neg. wirklich eintreten können, so stösst man auf dieselben *Schwierigkeiten* wie früher." — —

Von diesen hier von Neumann angedeuteten *Schwierigkeiten* mögen folgende zwei besonders hervorgehoben werden, nämlich *erstens* diejenigen, welche von den durch die *Natur der Körper* den elektrischen Scheidungskräften gesetzten Schranken herrühren, *zweitens* die mit der Annahme

eines *konstanten Werths von L* verbundenen Schwierigkeiten, welche darin bestehen, dass mit dieser Annahme die Voraussetzung *bestimmter unveränderlicher Ladungen der Kugel und des Cylinders* verbunden ist.

1. *Schwierigkeiten, welche von den durch die Natur der Körper den elektrischen Scheidungskräften gesetzten Schranken herrühren.*

Bezeichnet man die Elektricität des Cylinders und der Kugelschaale kurz mit e und e' (statt mit Σe und $4\pi a^2 H$), und setzt das Trägheitsmoment des Cylinders $\mathfrak{M} = ma^2$, so ist

$$L = \left(\frac{M+m}{2} - \frac{ee'}{3ac^2}\right) a^2;$$

folglich ist für $L = 0$

$$ee' = \frac{3}{2} ac^2 (M+m).$$

Nun ist $2e'/a$ die zur Ladung e' einer Kugelschaale erforderliche *Scheidungskraft*;[1]) die Grösse dieser *Scheidungskraft* ist aber beschränkt

[1]) Die von einer mit der Elektricität e' gleichförmig belegten Kugelschaale vom Halbmesser a auf einen *ausserhalb* befindlichen linearen Leiter von unbegrenzter Länge l, welcher in der Verlängerung eines Radius liegt, ausgeübte Scheidungskraft ist die *Differenz* der auf die in jeder Längeneinheit des Leiters befindliche Einheit *positiver* Elektricität ausgeübten *Abstossungskraft* $= e' \int_0^l \frac{dx}{(a+x)^2}$, und der auf die in jeder Längeneinheit befindliche Einheit *negativer* Elektricität ausgeübten *Anziehungskraft* $= - e' \int_0^l \frac{dx}{(a+x)^2}$; folglich

$$= 2e' \int_0^l \frac{dx}{(a+x)^2} = 2e' \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right),$$

woraus sich bei unbegrenztem Werthe von l die *Scheidungskraft* $= 2e'/a$ ergiebt, wie oben angegeben worden ist.

Ist in diesem Leiter eine Säule eingeschaltet, durch welche die Kugelladung unverändert erhalten wird, so wird dadurch bewiesen, dass die von der Kugelladung und die von der Säule auf den Leiter ausgeübten Scheidungskräfte entgegengesetzt gleich sind, wodurch auch die Scheidungskraft der Säule bestimmt wird, nämlich $= - 2e'/a$.

Es leuchtet ferner aber ein, dass, wenn die Kugelschaale noch nicht geladen wäre, sie durch die Säule geladen werden würde, und dass diese Ladung wachsen würde, bis sie $= e'$ geworden wäre, bei einem Kugelhalbmesser $= a$, d. h. bis die *Scheidungskraft der Kugelladung* $= 2e'/a$ geworden wäre und die *Scheidungskraft der Säule* aufhöbe.

Ferner folgt hieraus, dass zwei Kugeln mit den Ladungen e' und ne', deren Halbmesser a und na sind, deren *Potentiale* folglich für alle Punkte im Innern, näm-

und hängt von den in der Natur vorhandenen *Scheidungsmitteln* ab, denn bei aller Mannigfaltigkeit dieser Mittel giebt es doch kein Mittel für *unendlich grosse Scheidungskräfte.*

Soll nun $L = 0$ sein, so muss nach obiger Gleichung

$$\frac{2e'}{a} = 3c^2 \cdot \frac{M+m}{e},$$

oder es muss, da $c = 439\,450 \,.\, 10^6$ ist,

$$\frac{2e'}{a} \cdot \frac{e}{2(M+m)} = 289\,670 \,.\, 10^{18}$$

sein. — Es wird schwer halten, einen mit fester Drehungsaxe versehenen geladenen Cylinder darzustellen, dessen Ladung e, *nach absolutem Maasse*, grösser wäre als die *in Milligrammen* ausgedrückte ponderable Masse $2m$; fügt man aber zu $2m$ noch die doppelte Masse des Gewichts $= 2M$ hinzu, so kann sicher $e/2(M+m)$ als *echter* Bruch angenommen werden, woraus folgt, dass zur Ladung der Kugelschaale, wenn $L = 0$ werden sollte, eine Scheidungskraft erforderlich wäre, die *nach mechanischem Maasse* $= 2e'/a > 289\,670 \,.\, 10^{18}$ sein müsste, d. i. eine Scheidungskraft, welche die grösste von den in den Elektrodynamischen Maassbestimmungen, Bd. V dieser Abhandlungen, S. 243—250 gemessenen,[1]) nämlich $= 2\,\frac{64105}{11.567} = 1108$, mindestens 261 *Trillionen* Mal überträfe. Dass es uns noch unbekannte Körper in der Natur gebe, welche die Möglichkeit so grosser Scheidungskräfte gewährten, darf mit Recht bezweifelt werden. Eine Vergrösserung der beiden Koefficienten $e/(M+m)$ und e'/a um das 10- oder 100fache würde gar nicht in Betracht kommen; ist in der *Natur der Körper* nicht die Möglichkeit gegeben, das Produkt dieser beiden Koefficienten viele *Trillionen* Mal zu vergrössern, so bleibt die Darstellung des Falls $L = 0$ immer *unmöglich.*

Wäre aber auch in der Natur der Körper die Möglichkeit so grosser Scheidungskräfte gegeben, so würden doch auch mit diesen Scheidungskräften die geforderten Ladungen nicht zu effektuiren sein, weil kein *Isolator* existirt, welcher fest genug wäre, um den Expansivkräften solcher Ladungen zu widerstehen, welche stärker wie Pulverladungen explodiren und Alles zerstören würden.

lich e'/a und ne'/na, einander gleich sind, leitend verbunden sein können, ohne dass irgend ein Theil der Ladung von der einen Kugel zur anderen überginge, in Uebereinstimmung mit dem Satze, dass bei Gleichheit der *Potentiale* im Innern zweier Leiter kein Uebergang der Elektricität bei leitender Verbindung der Leiter Statt finde. —

Noch ist zu bemerken, dass obige *Scheidungskräfte* in *mechanischem Maasse* ausgedrückt sind und mit $155\,370 \,.\, 10^6 = [c/(2\sqrt{2})]$ zu multipliciren sind, um sie in *magnetischem Maasse* ausgedrückt zu erhalten.

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 631—638.]

Gäbe es endlich aber auch so feste und vollkommene Isolatoren, welche selbst den ungeheuren Expansivkräften solcher Ladungen zu widerstehen vermöchten, und könnte auch demnach die Kugelladung bis zu der geforderten Grösse gebracht werden, so würde zwar alsdann $L = 0$ werden, aber die Beschleunigung ϑ'' würde auch dann *nicht unendlich* werden, auch nicht nach dem der obigen Rechnung zu Grunde liegenden Gesetze, wie im folgenden Artikel nachgewiesen werden soll.

11.

Fortsetzung.

2. Schwierigkeiten, welche mit der Annahme eines konstanten Werths von L verbunden sind.

Abgesehen von dem im vorigen Artikel erörterten Zweifel, ob, bei den durch die *Natur der Körper* den *elektrischen Scheidungskräften* gesetzten Schranken, $L = 0$ werden könne, bleibt noch die Frage zu erörtern übrig, ob das für $L = 0$ genau bestimmte Produkt der beiden Ladungen e und e' *konstant erhalten* werden könne, was angenommen werden muss, wenn L *konstant* und zwar $= 0$ sein soll. Es fragt sich ferner, welchen Einfluss es haben würde, wenn eine der beiden Ladungen *veränderlich* wäre.

Der Werth von L hängt von den Ladungen e und e' des Cylinders und der Kugelschaale ab, und zwar kommt es, wenn der Werth von $L = 0$ *konstant* sein soll, nicht blos auf die *Grösse* der Ladungen e und e' an, sondern auch auf die *Art der Herstellung* eines genau bestimmten Werthes.

Wäre auch die eine von beiden Ladungen, nämlich die Cylinderladung e, *konstant* gegeben, so müsste doch die Ladung der Kugelschaale e' *veränderlich* bleiben, um durch ihr allmähliges Wachsthum dahin zu gelangen, dass $L = 0$ würde. Die Ladung e' würde aber auch dann nicht plötzlich aufhören sich zu ändern, um von nun an *vollkommen konstant* zu bleiben, sondern sie würde ohne Zweifel innerhalb gewisser Grenzen immer schwanken, weil die Herstellung der geforderten Ladung *mit absoluter Genauigkeit* gar nicht möglich ist, sondern nur innerhalb gewisser weiterer oder engerer Grenzen. Die Ladung e' würde folglich stets als eine Funktion der Zeit zu betrachten sein, welche für irgend einen kürzeren Zeitraum durch $e' = p + qt$ dargestellt werden kann.

Für diesen Fall, wo e' *variabel* ist, gilt nun die von NEUMANN S. 105 dieses Bandes aufgestellte Gleichung,[1]) nämlich:

$$T = P - U + Mga\vartheta + \text{Konst.},$$

[1]) [Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse, Bd. 11.]

wo $T = [(M+m)/2] \,.\, a^2\vartheta'^2$, $P = [ee'/3ac^2] \,.\, a^2\vartheta'^2 +$ Konst. und $U = ee'/a$, was also mit e' zugleich sich ändert.

Setzt man nun $e' = p + qt$ und $L = ([(M+m)/2] - [ee'/3ac^2])\, a^2$, so erhält man

$$L\vartheta'^2 = Mga\vartheta - \frac{e}{a}(p+qt) + \text{Konst.},$$

oder, nach t differentiirt,

$$2L\vartheta'' = Mga - \frac{eq}{a\vartheta'},$$

woraus für $L = 0$ folgt *entweder* $\vartheta'' = \infty$ *oder* (wenn ϑ'' nicht unendlich ist), $\vartheta' = eq/Mgaa$.

Diese Alternative wird nun entschieden, wenn man beachtet, dass L mit der Zeit t variirt. Man rechne die Zeit t von dem Augenblicke an, wo nach der Gleichung $e' = p + qt$ $L = 0$ sein würde, woraus folgt

$$\frac{M+m}{2} = \frac{ep}{3ac^2}.$$

Es ist alsdann nach Verlauf des Zeitelements δ

$$L = -\frac{eq\delta}{3ac^2}a^2,$$

folglich, wenn dieser Werth für L in obiger Gleichung gesetzt wird,

$$2L\vartheta'' = -\frac{2eq\delta}{3ac^2}a^2 \,.\, \vartheta'' = Mga - \frac{eq}{a\vartheta'}.$$

Da nun für $L = 0$ und $t = 0$ bei endlichem Werthe von ϑ''

$$\vartheta' = \frac{eq}{Mgaa}$$

gefunden worden ist, und der Werth von ϑ' für $t = \delta$, wenn δ *verschwindend klein* ist, nicht merklich verschieden ist von dem Werthe von ϑ'' für $t = 0$, so ergiebt sich:

$$2L\vartheta'' = -\frac{2eq\delta}{3ac^2}a^2 \,.\, \vartheta'' = Mga - \frac{eq}{a} \cdot \frac{Mgaa}{eq} = 0,$$

wonach $\vartheta'' = 0$ ist.

Dieser Werth $\vartheta'' = 0$ gilt nun, so klein auch q sein möge, er gilt folglich auch noch, wenn $q = 0$ ist.

Man sieht hieraus, wenn der Fall, dass $L = 0$ sei, nur der Uebergang ist von kleineren Werthen zu grösseren oder umgekehrt, dass die Beschleunigung ϑ'' für $L = 0$ keineswegs unendlich, sondern $= 0$ ist, wodurch alle von der behaupteten *unendlichen Beschleunigung* hergenommenen Einwände beseitigt werden.

12.

Schluss.

Schon bevor NEUMANN den im vorigen Artikel betrachteten Fall bemerkt und untersucht hatte, war von HELMHOLTZ die Aufmerksamkeit auf einen ähnlichen Fall gerichtet worden, wo nämlich ein elektrischer Massenpunkt ε im *Innern* einer elektrischen Kugelfläche sich befindet, und es war von ihm das überraschend einfache Resultat gefunden worden, dass die *Komponenten der von der elektrischen Kugelfläche auf* ε *ausgeübten Kraft den Beschleunigungen* x'', y'', z'', *mit einem konstanten Faktor multiplicirt, gleich seien.*

Es war ferner von HELMHOLTZ (Borchardt's Journal, Bd. 75) aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung die Gleichung der lebendigen Kraft entwickelt worden, die sich für den Fall blos *eines* beweglichen Massenpunkts μ mit dem elektrischen Quantum ε in einem Raume ergiebt, welcher von einer gleichmässig mit Elektricität belegten Kugeloberfläche vom Halbmesser R begrenzt ist, nämlich die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\left(\mu - \frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\varepsilon'\right) q^2 - V + C = 0,$$ [1])

wo ε' das Quantum Elektricität auf der Flächeneinheit der Kugeloberfläche, q die Geschwindigkeit des Massenpunkts μ in seiner Bahn s, also $q = ds/dt$, und V das Potential der *nicht elektrischen* Kräfte bezeichnet. Es ergiebt sich aus dieser Gleichung durch Differentiation nach s:

$$\mu q \frac{dq}{ds} - \left(\frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\varepsilon' . q\frac{dq}{ds} + \frac{dV}{ds}\right) = 0,$$

wo $[8\pi/3c^2] . R\varepsilon\varepsilon' . q\,[dq/ds]$ die auf μ in Richtung der Bahn s wirkende *elektrische* Kraft, und dV/ds die auf μ in derselben Richtung wirkende *nicht elektrische* Kraft ist.

Da nun $q = ds/dt$ die Geschwindigkeit des Punkts μ in seiner Bahn s bezeichnet und $q\,[dq/ds] = dq/dt = d^2s/dt^2$ die Beschleunigung von μ in seiner Bahn ist, so ergiebt sich, dass die aus obiger Gleichung gefundene, auf μ wirkende *elektrische* Kraft $[8\pi/3c^2] . R\varepsilon\varepsilon' . q\,[dq/ds]$ das Produkt dieser Beschleunigung $q\,[dq/ds]$ multiplicirt mit dem konstanten Faktor $[8\pi/3c^2] . R\varepsilon\varepsilon'$ ist, ganz in Uebereinstimmung mit dem oben angeführten Resultate.

[1]) Der Faktor von $\frac{1}{2}q^2$ in obiger Gleichung ist nicht $(\mu - [4\pi/3c^2]\,R\varepsilon e)$, wie HELMHOLTZ angegeben, sondern $(\mu - [8\pi/3c^2]\,R\varepsilon\varepsilon')$. Vergl. NEUMANN, §§ 3 und 7 seiner Abhandlung in diesem Bande. [Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse, Bd. 11.]

Ist nun die auf μ wirkende *elektrische* Kraft der Beschleunigung $q\,[dq/ds]$ des Punkts μ proportional, auf welchen *zwei* Kräfte wirken, nämlich ausser der angegebenen *elektrischen* Kraft $[8\pi/3c^2]\,.\,R\varepsilon\varepsilon'\,.\,q\,[dq/ds]$, die *nicht elektrische* Kraft dV/ds, so leuchtet ein, dass $q\,[dq/ds]$ durch Division der Summe dieser *beiden* Kräfte mit μ erhalten wird, nämlich:

$$q\frac{dq}{ds}=\frac{\frac{8\pi}{3c^2}\cdot R\varepsilon\varepsilon'\,.\,q\frac{dq}{ds}+\frac{dV}{ds}}{\mu},$$

woraus gefunden wird

$$q\frac{dq}{ds}=\frac{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{dV}{ds}}{1-\frac{1}{\mu}\cdot\frac{8\pi}{3c^2}\cdot R\varepsilon\varepsilon'}.$$

Substituirt man diesen Werth für $q\,[dq/ds]$ im Ausdrucke der auf μ wirkenden *elektrischen* Kraft, so erhält man einen von der Beschleunigung unabhängigen Ausdruck dieser Kraft, nämlich

$$\frac{8\pi}{3c^2}\cdot R\varepsilon\varepsilon'\,.\,q\frac{dq}{ds}=\frac{\frac{8\pi}{3c^2}\cdot R\varepsilon\varepsilon'}{\mu-\frac{8\pi}{3c^2}\cdot R\varepsilon\varepsilon'}\cdot\frac{dV}{ds},$$

woraus man leicht erkennt, dass diese *elektrische* Kraft in der Bahn s nach derselben Seite gerichtet ist, wie die *nicht elektrische* Kraft dV/ds, so lange als $[8\pi/3c^2]\,.\,R\varepsilon\varepsilon' < \mu$ ist, dass sie aber die entgegengesetzte Richtung hat, sobald als $[8\pi/3c^2]\,.\,R\varepsilon\varepsilon' > \mu$ wird. Während aber $[8\pi/3c^2]\,R\varepsilon\varepsilon'$, *indem es wächst*, $=\mu$ wird, wächst gleichzeitig die *elektrische* Kraft stetig bis $+\infty$, springt alsdann plötzlich über von $+\infty$ zu $-\infty$, und wächst mit $[8\pi/3c^2]\,.\,R\varepsilon\varepsilon'$, was $>\mu$ geworden, wieder stetig von $-\infty$ bis zu 0. Wenn dagegen $[8\pi/3c^2]\,.\,R\varepsilon\varepsilon'$, *indem es abnimmt*, $=\mu$ wird, nimmt gleichzeitig die *elektrische* Kraft stetig bis $-\infty$ ab, springt alsdann plötzlich von $-\infty$ zu $+\infty$, und nimmt, nachdem $[8\pi/3c^2]\,.\,R\varepsilon\varepsilon' < \mu$ geworden, wieder stetig ab, von $+\infty$ bis zu 0.

Sowohl das Wachsthum einer solchen Kraft ins Unendliche, als auch der Wechsel ihrer Richtung, im Augenblicke, wo sie unendlich gross geworden ist, könnte nun wohl als eine Verletzung der in der Natur sonst herrschenden Stetigkeit erscheinen und zur Bestreitung allgemeiner Gültigkeit des Gesetzes, woraus solche Stetigkeitsverletzungen gefolgert werden, angeführt werden. Indessen lässt sich leicht beweisen dass aus jenem Gesetze diese Folgerungen mit Recht gar nicht gezogen werden können, weil nämlich diese Folgerungen noch an ganz unerfüll-

bare Bedingungen geknüpft sind, wie schon in POGGENDORFF's Annalen Bd. 156, Seite 29 bemerkt worden,[1]) was einer näheren Nachweisung zu bedürfen scheint, die hier schliesslich noch gegeben werden soll.

Die Beschleunigung von μ durch die oben angeführte *elektrische* und *nicht elektrische* Kraft hat sich aus der von HELMHOLTZ aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Gleichung ergeben, nämlich:

$$q\frac{dq}{ds} = \frac{\frac{dV}{ds}}{\mu - \frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\varepsilon'},$$

wo die Beschleunigung von μ, statt mit $q\,[dq/ds]$, auch mit dq/dt oder d^2s/dt^2 bezeichnet werden kann.

Diese Beschleunigung ist unendlich gross, wenn der Werth von $\varepsilon' = 3c^2\mu/8\pi R\varepsilon$ ist. Die Bestimmung dieses Werths von ε', welcher mit η bezeichnet werden soll, setzt hiernach voraus, dass der Werth von ε schon vorher bestimmt sei. Es könnte zwar scheinen, dass auch umgekehrt η vorher bestimmt werden könnte, indem die Bestimmung von ε abhängig von der Kenntniss von η gemacht würde, indess leuchtet ein, dass, nachdem die Kugelschaale geladen und η bestimmt worden wäre, keine Ladung im Innern der Kugel, also auch nicht die Ladung ε des Theilchens μ, mehr vorgenommen werden könnte.

Ist also die Ladung ε des Theilchens μ im Innern der Kugel gegeben, so kann die Ladung der Kugeloberfläche, bei welcher die Kraft unendlich wird, voraus berechnet werden, nämlich für jede Flächeneinheit, wie schon angegeben worden ist,

$$\eta = \frac{3c^2}{8\pi} \cdot \frac{\mu}{R\varepsilon};$$

es würde aber die wirkliche *Herstellung* dieser Ladung nothwendig mit einem *allmähligen* Wachsthum der Ladung von $\varepsilon' = 0$ bis $\varepsilon' = \eta$ verbunden sein.

Dies vorausgesetzt, bezeichne man die Zeit, wo $\varepsilon' = \eta$ geworden

[1]) Es heisst an der angeführten Stelle: Ein solcher Sprung in der *Grösse* und *Richtung* der elektrischen Kraft, nämlich von $+\infty$ zu $-\infty$, tritt wirklich nach dem Gesetze gar nicht ein, weil nämlich die Masse μ mit ihrer Ladung e, in Folge der immer wachsenden Beschleunigung, gar nicht im Innern des Kugelraums so lange verweilen kann, bis $[8\pi/3c^2] \,.\, R\varepsilon\varepsilon' = \mu$ geworden ist, sondern schon früher bis an die vom *festen Isolator* gebildete Kugeloberfläche getrieben worden sein müsste, durch deren Widerstand Ruhe wiederhergestellt worden wäre, und die in der Rechnung vorausgesetzten Verhältnisse gar nicht mehr Statt fänden. [WILHELM WEBER's Werke, Bd. IV, p. 333.]

ist, mit $t = 0$, und die Zeit, wo $\varepsilon' = 0$ war, mit $t = -\vartheta$. Setzt man nun ferner das Wachsthum der Ladung ε' der Zeit proportional, nämlich

$$\varepsilon' = \eta\left(1 + \frac{t}{\vartheta}\right),$$

und nimmt man, zur Vereinfachung der Betrachtung, den Mittelpunkt der Kugel zum Anfangspunkt der Bahn s, wo das Theilchen μ zur Zeit $t = -\vartheta$ (d. i. zur Zeit, wo $\varepsilon' = 0$ ist) sich in Ruhe befindet, also mit $\varepsilon' = 0$ zugleich auch $s = 0$ und $q = 0$ ist, und nimmt man endlich die auf μ wirkende *nicht elektrische* Kraft $dV/ds = a$ *konstant* an, so ergiebt sich aus der angeführten Gleichung, nämlich aus

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{dV}{ds}}{\mu - \frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\varepsilon'},$$

nach den Substitutionen $\varepsilon' = \eta\,(1 + [t/\vartheta])$, $\mu = [8\pi/3c^2]\,.\,R\varepsilon\eta$ und $dV/ds = a$,

$$dq = -\frac{a\vartheta}{\mu} \cdot \frac{dt}{t}.$$

Das Integral dieser Gleichung kann geschrieben werden:

$$q = -\frac{a\vartheta}{2\mu} \cdot \log c^2 t^2.$$

Hieraus folgt, da $q = 0$ für $t = -\vartheta$ ist, $c^2 = 1/\vartheta^2$.

Substituirt man diesen Werth für c^2 in der vorhergehenden Gleichung, und setzt ds/dt für q, so erhält man

$$ds = -\frac{a\vartheta}{2\mu} \cdot \log\frac{t^2}{\vartheta^2} \cdot dt.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$s = \frac{a\vartheta t}{\mu}\left(1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{t^2}{\vartheta^2}\right) + C.$$

Da nun $s = 0$ für $t = -\vartheta$ ist, so ergiebt sich $C = a\vartheta^2/\mu$; folglich

$$s = \frac{a\vartheta^2}{\mu}\left[1 + \frac{t}{\vartheta}\left(1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{t^2}{\vartheta^2}\right)\right].$$

Die beiden gefundenen Formeln, welche, wenn die auf μ wirkende *nicht elektrische* Kraft $a = g\mu$ gesetzt wird, geschrieben werden können:

$$q = -\frac{g\vartheta}{2} \cdot \log \frac{t^2}{\vartheta^2},$$

$$s = g\vartheta^2 \left[1 + \frac{t}{\vartheta}\left(1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{t^2}{\vartheta^2}\right)\right],$$

lassen sich nun leicht in tabellarischer Uebersicht auf folgende Weise darstellen, worin e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet:

$\frac{t}{\vartheta}$	$\frac{s}{g\vartheta^2}$	$\frac{q}{g\vartheta}$	$\frac{\varepsilon'}{\eta} = \left(1 + \frac{t}{\vartheta}\right)$
1	0	0	0
$-e^{-1}$	$1 - 2e^{-1}$	1	$1 - e^{-1}$
$-e^{-2}$	$1 - 3e^{-2}$	2	$1 - e^{-2}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
0	1	∞	1
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$+e^{-2}$	$1 + 3e^{-2}$	2	$1 + e^{-2}$
$+e^{-1}$	$1 + 2e^{-1}$	1	$1 + e^{-1}$
$+1$	2	0	2
$+e$	1	-1	$1 + e$
$+e^2$	$1 - e^2$	-2	$1 + e^2$

Man sieht aus dieser Uebersicht, dass das Theilchen μ, welches durch die von der *nicht elektrischen* Kraft herrührenden Beschleunigung g in der Zeit ϑ den Weg $\frac{1}{2}g\vartheta^2$ zurückgelegt haben würde, unter Mitwirkung der elektrischen Kraft den doppelten Weg macht, und, während es ohne elektrische Kraft die Geschwindigkeit $g\vartheta$ erreicht hätte, mit elektrischer Kraft zu unendlicher Geschwindigkeit gelangt.

Mit dieser erlangten unendlich grossen Geschwindigkeit legt es aber nicht das kleinste endliche Wegelement zurück, in Folge davon, dass die unendlich gross gewordene *positive* Beschleunigung plötzlich in unendlich grosse *negative* Beschleunigung umschlägt, und dass in Folge davon die Geschwindigkeiten gleich lange *vor* und *nach* diesem Augenblicke einander gleich sind, wonach also die Geschwindigkeit q zur Zeit $t = +\vartheta$ (d. i. nach Verlauf des Zeitraums 2ϑ vom Beginn der Bewegung an gerechnet) gleich der am Anfang zur Zeit $t = -\vartheta$, nämlich $q = 0$ ist, wobei der Weg s, wenn die Kugelschaale gross genug ist, dass s darin Platz findet, auch wieder um $g\vartheta^2$ zugenommen haben würde, also $s = 2g\vartheta^2$ geworden wäre. Die Ladung ε' würde dabei bis

2η gestiegen sein. Es würde aber von nun an, bei fortgesetztem Wachsthum der Zeit und der Ladung, die Entfernung s des Theilchens μ vom Kugelmittelpunkte schnell wieder abnehmen bis zu $s = 0$, und darauf negativ werden bis zu $s = -R$, wo das Theilchen μ gegen die Kugelschaale stossen würde, zur Zeit t, welche aus der Gleichung $-R = g\vartheta^2 [1 + [t/\vartheta](1 - \frac{1}{2}\log[t^2/\vartheta^2])]$ bestimmt werden kann, und mit der Geschwindigkeit q, die, nachdem t bestimmt worden, $= [g\vartheta/2]\log[t^2/\vartheta^2]$ gefunden wird.

Es ist bisher, wie schon bemerkt, angenommen worden, dass der Kugelhalbmesser R grösser sei als der Maximumwerth $2g\vartheta^2$, welchen s zur Zeit $t = +\vartheta$ erreicht. Wäre R kleiner, so leuchtet von selbst ein, dass das Theilchen μ früher gegen die Kugelschaale stossen würde, nämlich in dem Augenblicke, wo $s = R$ geworden wäre, zur Zeit t, welche aus der Gleichung $R = g\vartheta^2 [1 + [t/\vartheta](1 - \frac{1}{2}\log[t^2/\vartheta^2])]$ bestimmt werden könnte.

Es soll nun aber kein fortwährendes Wachsthum der elektrischen Ladung betrachtet werden, sondern der Fall, wo die Ladung, nachdem sie den Werth η etwas überstiegen hat, *konstant* bleibt. Es werde z. B. diese konstante Ladung $\varepsilon' = \eta(1 + [1/e^2])$ angenommen, wobei μ die Geschwindigkeit $q = 2g\vartheta$ besitzt und in der Entfernung $s = (1 + [3/e^2])g\vartheta^2$ vom Kugelmittelpunkte sich befindet.

Setzt man demnach in der Helmholtz'schen Gleichung

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{dV}{ds}}{\mu - \frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\varepsilon'}$$

den Werth $\eta(1 + [1/e^2])$ für ε', also

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{dV}{ds}}{\mu - \frac{8\pi}{3c^2} R\varepsilon\eta\left(1 + \frac{1}{e^2}\right)},$$

und setzt hierin wieder wie früher $dV/ds = a$ und $[8\pi/3c^2].R\varepsilon\eta = \mu$, so erhält man die Differentialgleichung

$$dq = -\frac{ae^2}{\mu} \cdot dt,$$

und durch Integration derselben

$$q = -\frac{ae^2}{\mu} t + C.$$

Wird nun die Zeit von dem Augenblicke an gerechnet, wo $\varepsilon' = \eta(1 + [1/e^2])$ geworden war, so ist für $t = 0$ der Werth von $q = 2g\vartheta$ schon oben gefunden worden, folglich, wie oben $a = g\mu$ gesetzt,

$$C = 2g\vartheta,$$

also

$$q = 2g\vartheta - e^2 gt,$$

oder

$$ds = (2g\vartheta - e^2 gt)\,dt,$$

woraus durch Integration

$$s = 2g\vartheta t - \frac{e^2}{2} gt^2 + C'.$$

Nun war, wenn die Zeit von dem Augenblicke an gerechnet wird, wo $\varepsilon' = \eta(1 + [1/e^2])$ geworden war, für $t = 0$ der Werth von $s = (1 + [3/e^2])g\vartheta^2$ gefunden worden, folglich

$$C' = \left(1 + \frac{3}{e^2}\right) g\vartheta^2,$$

also

$$s = \left(1 + \frac{3}{e^2}\right) g\vartheta^2 + 2g\vartheta t - \frac{e^2}{2} g \cdot t^2.$$

Diese Formel nebst der vorhergehenden

$$q = 2g\vartheta - e^2 gt$$

lassen sich nun ebenfalls leicht so übersichtlich, wie die früheren Formeln für s und q, tabellarisch darstellen, wie folgt:

$\frac{t}{\vartheta}$	$\frac{s}{g\vartheta^2}$	$\frac{q}{g\vartheta}$	$\frac{\varepsilon'}{\eta}$
0	$1 + \frac{3}{e^2}$	2	$1 + \frac{1}{e^2}$
1	$3 + \frac{3}{e^2} - \frac{e^2}{2}$	$2 - e^2$	$1 + \frac{1}{e^2}$
2	$5 + \frac{3}{e^2} - 2e^2$	$2 - 2e^2$	$1 + \frac{1}{e^2}$

Diese Tafel lässt sich leicht weiter fortsetzen; man ersieht aber schon hieraus, dass von $t = 2\vartheta/e^2$ an, nachdem die Ladung konstant geworden, die Entfernung s des Theilchens μ vom Kugelmittelpunkte abnimmt und sehr bald negativ wird, bis endlich das Theilchen μ, wenn $s = -R$ geworden, gegen die Kugelschaale stösst, zur Zeit t und mit der Geschwindigkeit q, welche aus den beiden Gleichungen

$$-R = \left(1 + \frac{3}{e^2}\right) g\vartheta^2 + 2g\vartheta t - \frac{e^2}{2} gt^2,$$

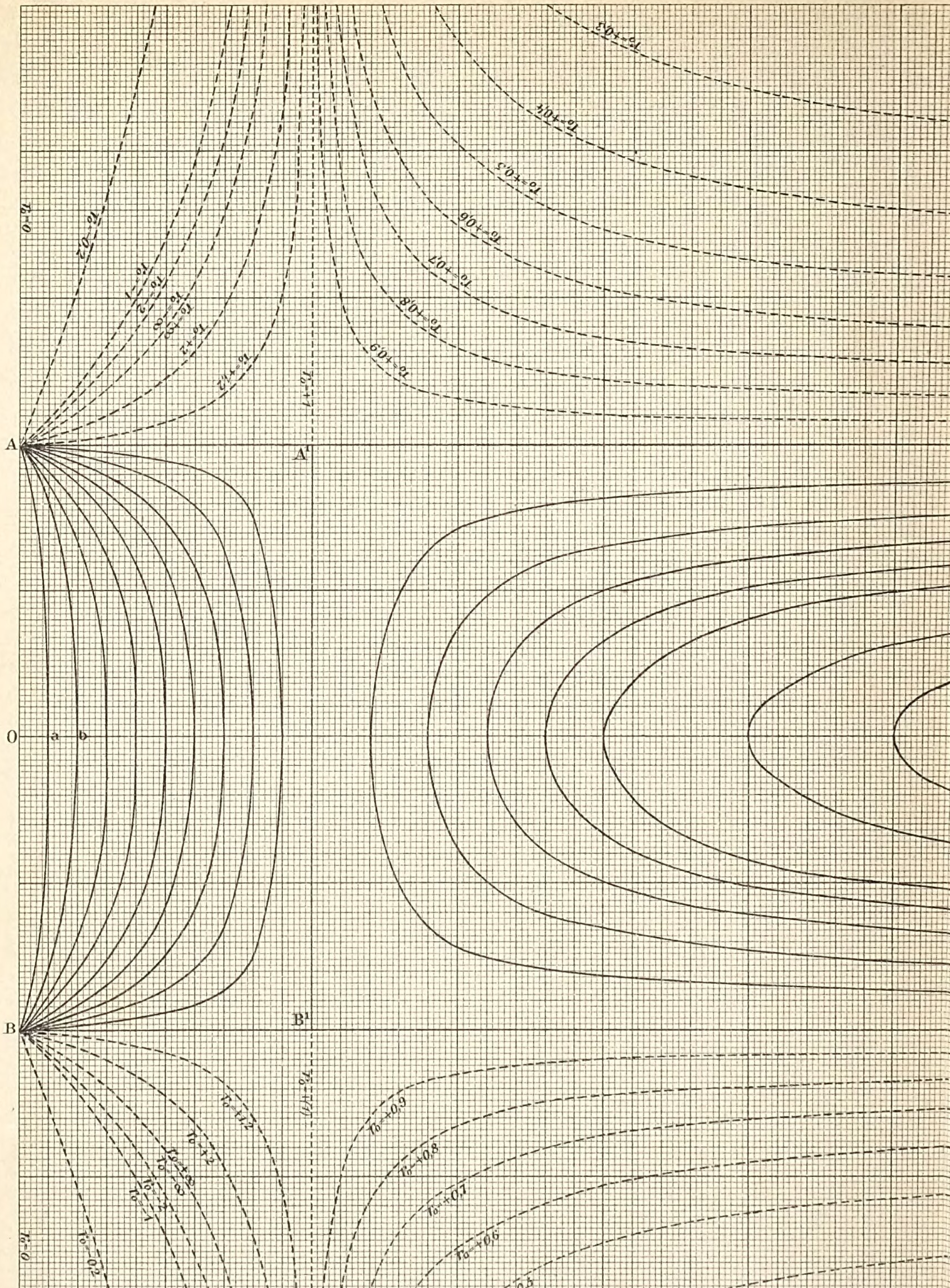
$$q = 2g\vartheta - e^2 gt$$

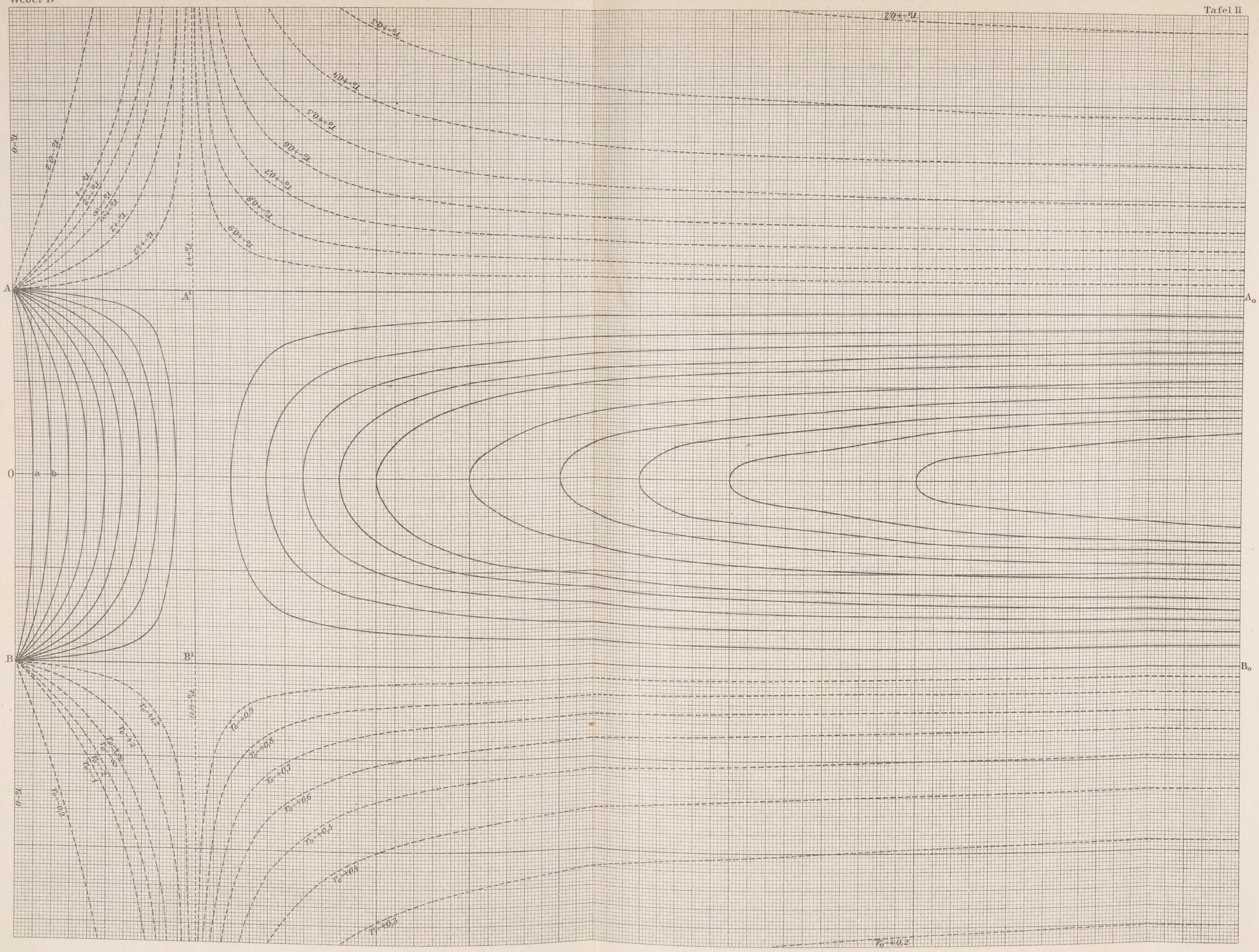
bestimmt werden können.

Man sieht aus dieser Darstellung des ganzen Processes in seinem *Zusammenhange*, dass keine von den „ungereimten oder absurden“ Konsequenzen, durch welche Helmholtz das aufgestellte Grundgesetz hat widerlegen wollen, wirklich eintritt.

Zwar ist hierbei noch nicht der Helmholtz'sche Einwand (A) in Borchardt's Journal, Bd. 72, S. 61 und Bd. 75, S. 38 erörtert worden, der in der Behauptung besteht, dass das aufgestellte Grundgesetz der elektrischen Wirkung, oder vielmehr die aus diesem Gesetz entspringenden Kirchhoff'schen Differentialgleichungen, zu einer labilen Gleichgewichtslage der elektrischen Materie, respektive zu einer Bewegung dieser Materie hinführe, deren Geschwindigkeit mit der Zeit ins Unendliche wachse. Aber es hat Neumann schon in den Berichten der Königl. Sächs. Gesellschaft, Oktober 1871, S. 477 nachgewiesen, dass die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen, ausser auf jenem Grundgesetze, noch auf mancherlei anderen accessorischen Voraussetzungen beruhen, und dass also jenes Gesetz durch ein gegen diese Differentialgleichungen im Allgemeinen erhobenes Bedenken nicht erschüttert werden könne.

Nach dieser schon von Neumann gegebenen Berichtigung, für welche besonders auf die von Neumann in seiner Abhandlung, S. 128—149 dieses Bandes, gegebenen näheren Erörterungen zu verweisen ist, bedarf es keiner weiteren Erörterung dieses Einwands, die, da sie hauptsächlich doch nur jene accessorischen Voraussetzungen betreffen würde, ganz ausserhalb der der vorliegenden Abhandlung gesetzten Schranken liegen würde.


A
A'
O
a
b
B
B'


A
A'
A₀
O
a
b
B
B'
B₀

XIII.

Ueber die Energie der Wechselwirkung.

Von

Wilhelm Weber.

(Auszug des Herrn Verfassers aus der Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen im XVIII. Bande der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften.)

[Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von G. Wiedemann, Bd. 4, Leipzig 1878, p. 343—373.]

[Da § 1—5 dieses Auszuges nach Inhalt und Wortlaut mit § 1—5 der vorhergehenden Abhandlung übereinstimmt, und zwar bis p. 382 Zeile 10 von oben, ist nur der letzte Paragraph des Auszugs, § 6, an dieser Stelle zum Abdruck gekommen.]

6.

Ein in elektrischer Hohlkugel eingeschlossenes, von einer elektrischen und nicht elektrischen Kraft getriebenes Theilchen.

Von den Anwendungen des elektrischen Grundgesetzes soll endlich hier nur die Anwendung auf die Bewegung eines in *elektrischer Hohlkugel* eingeschlossenen Massenpunktes μ (mit dem elektrischen Quantum ε) betrachtet werden, wenn auf denselben ausser der *elektrischen* Kraft noch eine *nicht elektrische* konstante Kraft a wirkt, um daran zu zeigen, dass keine von den „ungereimten und absurden“ Konsequenzen, durch welche Helmholtz jenes Grundgesetz hat widerlegen wollen, wirklich Statt finde.

Helmholtz hat in Borchardt's Journal LXXV aus jenem Grundgesetze die Gleichung der lebendigen Kraft für diesen Massenpunkt μ mit dem elektrischen Quantum ε, bei gleichmässig mit Elektricität belegter Kugeloberfläche vom Halbmesser R, abgeleitet, nämlich die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\left(\mu - \frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\varepsilon'\right)q^2 - V + C = 0,$$

wo ε' das Quantum Elektricität auf der Einheit der Kugeloberfläche, q die Geschwindigkeit des Massenpunktes μ und V das Potential der *nicht elektrischen* Kraft bezeichnet.

Aus dieser Gleichung ist nun geschlossen worden, dass wenn, bei einer vorhandenen *Differenz des Potentials der nicht elektrischen Kraft V von der Konstanten C,* ε' von 0 an wüchse bis $[8\pi/3c^2]\, R\varepsilon\, .\, \varepsilon' = \mu$ geworden wäre, die lebendige Kraft des Massenpunktes μ von $\frac{1}{2}\mu q^2 = V - C$ bis $\frac{1}{2}\mu q^2 = \infty$ zugenommen haben würde, was eine *unendlich grosse Arbeitsleistung* wäre. Die Beseitigung des hierauf gegründeten Einwandes ergiebt sich nun, wie schon früher in diesen Annalen, CLVI p. 29,[1]) angedeutet worden, aus der vollständigen Darstellung des ganzen Bewegungsprocesses in seinem Zusammenhange.

Man bezeichne diejenige Ladung der Kugeloberflächeneinheit ε', für welche die Geschwindigkeit q der Masse μ unendlich gross sein würde, mit η, setze also $\eta = [3c^2\mu/8\pi R\varepsilon]$, und nehme an, dass ε einen bestimmten konstanten Werth besitze, während ε' durch gleichförmiges Wachsthum von 0 zur Zeit $t = -\vartheta$ bis η zur Zeit $t = 0$ letzteren Werth allmählich erlangt habe. Ferner werde zur Vereinfachung der Betrachtung der Mittelpunkt der Kugel zum Anfangspunkt der Bahn s genommen, wo das Theilchen μ zur Zeit $t = -\vartheta$ (wo $\varepsilon' = 0$ ist) sich in Ruhe befinde, also mit $\varepsilon = 0$ zugleich auch $s = 0$ und $q = 0$ sind, so ergiebt sich mit Hülfe der Werthe:

$$\varepsilon' = \eta\left(1 + \frac{t}{\vartheta}\right), \quad \mu = \frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\eta \quad \text{und} \quad \frac{dV}{ds} = a,$$

(siehe Art. 12 der Abhandlung [Wilhelm Weber's Werke, Bd. IV, p. 408]) folgende Gleichung:

$$dq = -\frac{a\vartheta}{\mu} \cdot \frac{dt}{t}.$$

Nun kann das Integral dieser Gleichung geschrieben werden:

$$q = -\frac{a\vartheta}{2\mu} \cdot \log C^2 t^2,$$

wo sich $C^2 = 1/\vartheta^2$ ergiebt, weil $q = 0$ sein soll für $t = -\vartheta$, folglich, da $q = ds/dt$ ist,

$$ds = -\frac{a\vartheta}{2\mu} \cdot \log \frac{t^2}{\vartheta^2} \cdot dt.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$s = \frac{a\vartheta}{\mu}\left(1 - \frac{1}{2}\log\frac{t^2}{\vartheta^2}\right) \cdot t + C'.$$

Da nun $s = 0$ für $t = -\vartheta$ ist, so ergiebt sich $C' = a\vartheta^2/\mu$, folglich:

$$s = \frac{a\vartheta^2}{\mu}\left(1 + \frac{t}{\vartheta}\left(1 - \frac{1}{2}\log\frac{t^2}{\vartheta^2}\right)\right).$$

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. IV, p. 333.]

Diese Formeln, welche, wenn die auf μ wirkende *nicht elektrische* Kraft $a = g\mu$ gesetzt, und ferner die Geschwindigkeit q in Theilen von $g\vartheta$ ausgedrückt mit q' und s in Theilen von $g\vartheta^2$ ausgedrückt mit s' bezeichnet wird, geschrieben werden können:

$$\frac{dq'}{dt} = -\frac{1}{t},$$

$$q' = -\frac{1}{2}\log\frac{t^2}{\vartheta^2},$$

$$s' = 1 + \frac{t}{\vartheta}\left(1 - \frac{1}{2}\log\frac{t^2}{\vartheta^2}\right),$$

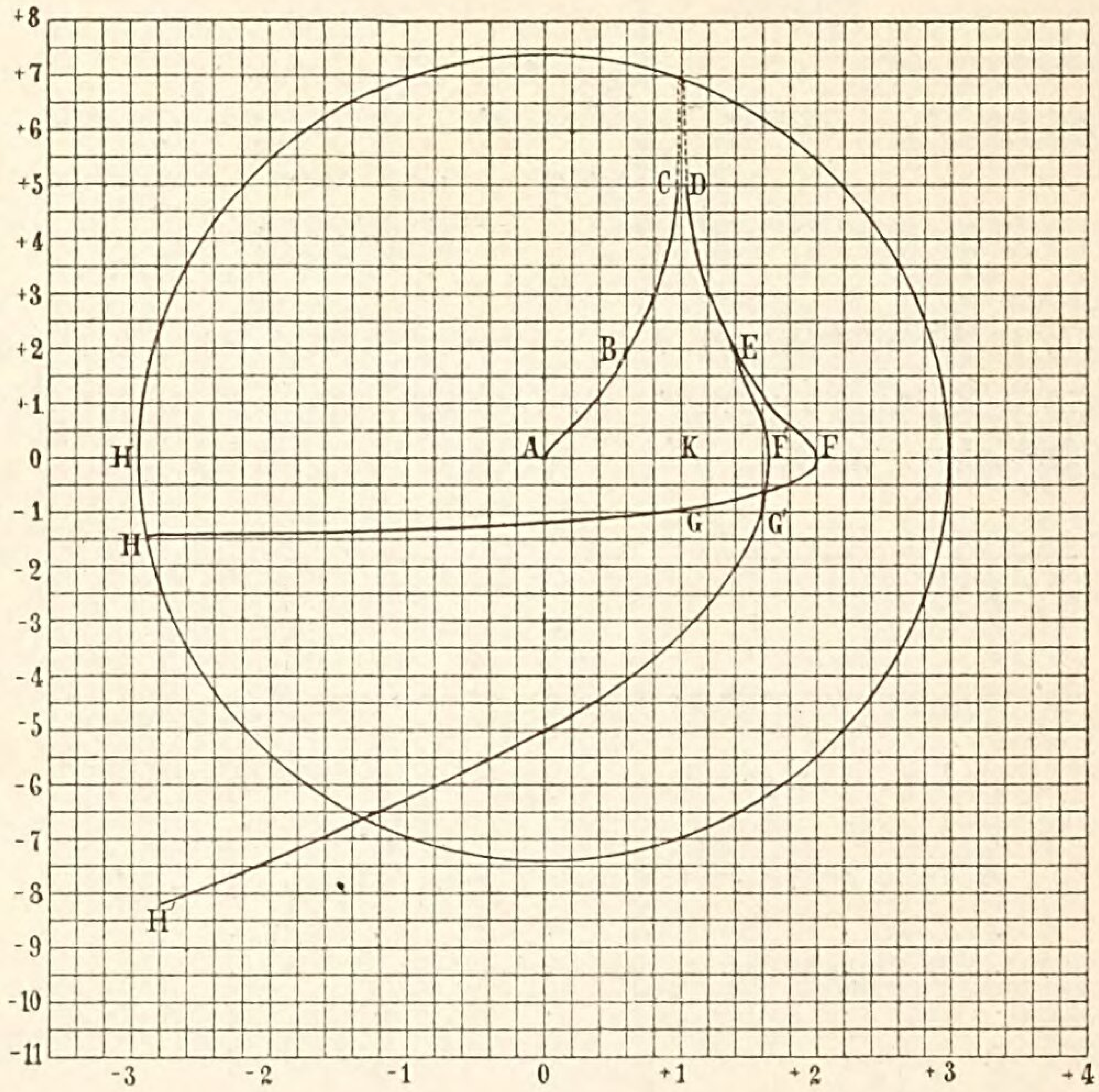
dienen nun zur Konstruktion aller Bewegungen des Theilchens μ bei gleichförmig wachsender Ladung ε' und lassen sich in folgende tabellarische Uebersicht bringen, worin e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

$\frac{t}{\vartheta}$	s'	q'	$\frac{dq'}{dt}$	$\frac{\varepsilon'}{\eta}$
-1	0	0	$+1$	0
$-e^{-1}$	$1-2e^{-1}$	1	$+e$	$1-e^{-1}$
$-e^{-2}$	$1-3e^{-2}$	2	$+e^2$	$1-e^{-2}$
$-e^{-3}$	$1-4e^{-3}$	3	$+e^3$	$1-e^{-3}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
0	1	∞	$\pm\infty$	1
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$+e^{-3}$	$1+4e^{-3}$	3	$-e^3$	$1+e^{-3}$
$+e^{-2}$	$1+3e^{-2}$	2	$-e^2$	$1+e^{-2}$
$+e^{-1}$	$1+2e^{-1}$	1	$-e$	$1+e^{-1}$
$+1$	2	0	-1	2
$+e$	1	-1	$-e^{-1}$	$1+e$
$+e^2$	$1-e^2$	-2	$-e^{-2}$	$1+e^2$

In der nachstehenden Figur stellt die Kurve *ABCDEFGH*, diesen Angaben gemäss, die Abhängigkeit der Geschwindigkeit q' von der Weglänge s' graphisch dar, nämlich s' als Abscisse und q' als Ordinate. Diese Kurve geht vom Kugelmittelpunkt A als Anfangspunkt der Koordinaten aus nach B, C und nähert sich asymptotisch der *Ordinate* für $s' = 1$, geht alsdann, von da zurückkehrend, nach D, E, F, wo sie die Abscissenaxe im Punkte $s' = 2$ schneidet, und dann weiter nach G und H, wo $s = -R$ wird und μ die Kugeloberfläche trifft.

Man sieht aus dieser Uebersicht, dass das Theilchen μ, welches vermöge der von der *nicht elektrischen* Kraft herrührenden Beschleu-

nigung g in der Zeit ϑ den Weg $\frac{1}{2}g\vartheta^2$ zurückgelegt haben würde, unter Mitwirkung der *elektrischen* Kraft den doppelten Weg macht, und dass es, während es ohne elektrische Kraft die Geschwindigkeit $g\vartheta$ erreicht hätte, mit elektrischer Kraft zu *unendlich grosser Geschwindigkeit* gelangt.



Mit dieser erlangten *unendlich grossen Geschwindigkeit* legt aber das Theilchen μ nicht das *kleinste endliche Wegelement* zurück, in Folge davon, dass die in demselben Augenblicke gleichfalls unendlich gross gewordene *Beschleunigung* dq/dt plötzlich von $+\infty$ zu $-\infty$, d. i. zu unendlich grosser *Verlangsamung* überspringt, wodurch bewirkt wird, dass die *Geschwindigkeiten* gleich lange *vor* und *nach* diesem Augenblicke einander gleich sind, z. B. die Geschwindigkeit q zur Zeit $t = +\vartheta$ (d. i. nach Verlauf des Zeitraums 2ϑ vom Beginn der Bewegung an gerechnet) gleich der am Anfang, zur Zeit $t = -\vartheta$, nämlich $q = 0$ ist, wobei der Weg s, wenn die Kugelschaale gross genug ist, dass s darin auch dann noch Platz findet, wieder um $g\vartheta^2$ gewachsen sein würde, also $s = 2g\vartheta^2$ geworden wäre. Die Ladung ε' würde dabei bis zu 2η gestiegen sein. Es würde aber von nun an bei fortgesetztem Wachsthum der Zeit und der Ladung die Entfernung des Theilchens μ vom Kugelmittelpunkt schnell wieder abnehmen bis zu $s = 0$, und darauf negativ werden bis zu $s = -R$, wo das Theilchen μ gegen die Kugelschaale stossen würde, zur Zeit t, welche aus der Gleichung

$-R = g\vartheta^2 (1 + [t/\vartheta] (1 - \frac{1}{2} \log [t^2/\vartheta^2]))$ bestimmt werden kann, und mit der Geschwindigkeit q, die, nachdem t bestimmt worden, aus der Gleichung $q = [g\vartheta/2] \log [t^2/\vartheta^2]$ gefunden wird.

Es ist bisher angenommen worden, dass der Kugelhalbmesser R grösser sei als der grösste Werth, den s zur Zeit $t = +\vartheta$ erreicht, nämlich $2g\vartheta^2$. Wäre R kleiner, so leuchtet von selbst ein, dass das Theilchen μ früher gegen die Kugelschaale stossen würde, nämlich in dem Augenblicke, wo $s = R$ geworden wäre, zur Zeit t, welche aus der Gleichung $R = g\vartheta^2 (1 + [t/\vartheta] (1 + \frac{1}{2} \log [t^2/\vartheta^2]))$ bestimmt werden könnte.

Soll nun endlich aber kein fortwährendes Wachsthum der elektrischen Ladung ε', wie bisher angenommen worden, Statt finden, sondern soll die Ladung ε', nachdem sie den Werth η erreicht und um irgend eine beliebig klein anzunehmende Grösse überschritten hat, *konstant* bleiben, so bezeichne man diese konstante Ladung mit $\eta\,(1 + e^{-n})$, folglich die Zeit, wo sie eingetreten, mit $t = + e^{-n}\vartheta$, die Geschwindigkeit des Theilchens μ in diesem Augenblicke mit $q = ng\vartheta$, und die Entfernung des Theilchens vom Kugelmittelpunkte mit $s = (1 + (1 + n) e^{-n}) g\vartheta^2$. Es ergiebt sich dann die Differentialgleichung:

$$dq = -\frac{a e^n}{\mu} \cdot dt,$$

und hieraus durch Integration:

$$q = -\frac{a e^n}{\mu} t + C.$$

Wird nun die Zeit von dem Augenblicke an gerechnet, wo die Ladung konstant geworden, wo die Geschwindigkeit $q = ng\vartheta$ war, so ergiebt sich $C = ng\vartheta$, folglich, da $a = g\mu$ gesetzt worden ist:

$$q = \frac{ds}{dt} = -g e^n . t + ng\vartheta.$$

Hieraus erhält man durch nochmalige Integration:

$$s = ng\vartheta t - \frac{1}{2} g e^n . t^2 + C',$$

und es ist darin, wie schon angeführt worden, für $t = 0$ der Werth von $s = (1 + (1 + n) e^{-n}) g\vartheta^2$, woraus:

$$C' = (1 + (1 + n) e^{-n}) g\vartheta^2$$

sich ergiebt, folglich:

$$s = ng\vartheta . t - \frac{1}{2} g e^n . t^2 + (1 + (1 + n) e^{-n}) g\vartheta^2.$$

Diese Formel für die Entfernung s und die für die Geschwindigkeit q gefundene, nämlich:

$$q = -g e^n . t + ng\vartheta$$

dienen nun, *bei konstant bleibender Ladung* ε', zur Bestimmung aller Bewegungen des Theilchens μ, und lassen sich in tabellarischer Uebersicht darstellen, z. B. in folgender für den Fall, wo $n = 2$ ist, wenn dabei wie oben $s/g\vartheta^2 = s'$, $q/g\vartheta = q'$ gesetzt wird:

$\frac{t}{\vartheta}$	s'	q'	$\frac{\varepsilon'}{\eta}$	$\frac{t}{\vartheta}$	s'	q'	$\frac{\varepsilon'}{\eta}$
0	$1 + \frac{6}{2e^2}$	2	$1 + \frac{1}{e^2}$	$\frac{4}{e^2}$	$1 + \frac{6}{2e^2}$	-2	—
$\frac{1}{e^2}$	$1 + \frac{9}{2e^2}$	1	—	$\frac{5}{e^2}$	$1 + \frac{1}{2e^2}$	-3	—
$\frac{2}{e^2}$	$1 + \frac{10}{2e^2}$	0	—	$\frac{6}{e^2}$	$1 - \frac{6}{2e^2}$	-4	—
$\frac{3}{e^2}$	$1 + \frac{9}{2e^2}$	-1	—				

Diese Tafel lässt sich leicht weiter fortsetzen; man ersieht aber schon hieraus, dass, nachdem die Ladung konstant geworden, von der Zeit $t = 2\vartheta/e^2$ an die Entfernung des Theilchens μ vom Kugelmittelpunkte abnimmt und sehr bald negativ wird, bis endlich das Theilchen μ, wenn $s = -R$ geworden, gegen die Kugelschaale stösst, zur Zeit t und mit der Geschwindigkeit q, welche aus den beiden Gleichungen:

$$-R = \left(1 + \frac{3}{e^2}\right) g\vartheta^2 + 2g\vartheta . t - \frac{e^2}{2} g . t^2,$$

$$q = 2g\vartheta - e^2 g . t$$

bestimmt werden können.

Man sieht aus dieser Darstellung des ganzen Processes in seinem *Zusammenhange*, dass keine von den „ungereimten oder absurden" Konsequenzen, durch welche Helmholtz das aufgestellte Grundgesetz hat widerlegen wollen, wirklich eintritt.

Die Kurve *ABCDE*, Seite 416, stellte die Abhängigkeit der Geschwindigkeit q von der Entfernung s des Theilchens μ vom Kugelmittelpunkte, *bei gleichförmig wachsender Ladung* ε', bis zu dem Augenblicke dar, wo diese Ladung grösser als η, nämlich $= \eta(1 + [1/e^2])$, geworden ist. Diese Kurve kann nun weiter fortgesetzt werden auf doppelte Weise, *entweder* für eine gleichförmig wie bisher *fortwachsende Ladung*, welche durch die Kurve *EFGH* dargestellt wird und schon betrachtet worden ist, oder für eine von nun an *konstant* bleibende Ladung $\varepsilon' = \eta(1 + [1/e^2])$, worauf sich die Bestimmungen der soeben angeführten Tafel beziehen, nach denen die Kurve *EF'G'H'* die Fortsetzung der Kurve *ABCDE* bildet.

In beiden Fällen bewegt sich das Theilchen μ in einer stetigen Bahn, nämlich im ersten Falle von A in gerader Linie bis F und von

da zurück nach A und weiter bis H^0, wo das Theilchen gegen die feste Kugeloberfläche stösst; im zweiten Falle von A in gerader Linie bis F' und von da ebenso zurück nach A und H^0.

Auch die Geschwindigkeit des Theilchens in seiner Bahn ändert sich in beiden Fällen immer stetig, ausgenommen in *einem* Punkte K, in der Mitte der Bahn AF, wo die Geschwindigkeit des Theilchens unendlich gross wird, und zugleich damit auch die von Anfang der Bewegung an geleistete Arbeit. Bezeichnet man aber diese Arbeitsleistung als *positiv*, so folgt unmittelbar darauf eine *negative* ebenfalls unendlich grosse Arbeitsleistung.

Jede von diesen beiden Arbeitsleistungen lässt sich in zwei Theile theilen, nämlich die *erstere* oder *positive* in die Arbeitsleistung auf dem Wege von A bis zu einem Punkte im Abstande $= [(n+1)/e^n] \,.\, g\vartheta^2$ vor K, und in die Arbeitsleistung auf dem Wege durch diesen letzteren Abstand *vor* $K = [(n+1)/n^n]\, g\vartheta^2$; die *letztere* oder *negative* in die Arbeitsleistung auf dem Wege durch den Abstand *hinter* $K = [(n+1)/e^n]\, g\vartheta^2$, und in die auf dem *übrigen Wege bis* F oder F'.

Von diesen vier Arbeitsleistungen sind die beiden auf dem Wege $= [(n+1)/e^n]\, g\vartheta^2$ *vor* und *hinter* K *unendlich gross*, aber *entgegengesetzt gleich*, während die beiden anderen ebenfalls entgegengesetzt gleich, aber *endliche Werthe* besitzen. Da nun n so gross genommen werden kann, dass die Zeit der beiden ersteren, unendlich grossen Arbeitsleistungen, nämlich $2\vartheta/e^n$, als verschwindend klein betrachtet werden darf, so hat man zwei unendlich grosse, aber entgegengesetzt gleiche Arbeitsleistungen in einem unendlich kleinen Zeitraume, die, wie von selbst einleuchtet, gar keine physische Wirkung und Bedeutung haben.

Statt des obigen Beispiels, wo $n = 2$ war, kann ein anderes Beispiel, wo n viel grösser ist, gewählt werden, so dass der Unterschied der konstant gewordenen Ladung ε' von η verschwindend klein wird; es wird dadurch keine wesentliche Aenderung hervorgebracht und man ersieht aus der ganzen Darstellung des Processes im Zusammenhange, dass keine von den „ungereimten und absurden“ Konsequenzen, durch welche Helmholtz das aufgestellte Grundgesetz hat widerlegen wollen, jemals wirklich Statt findet.

XIV.

Ueber Einrichtungen zum Gebrauch absoluter Maasse in der Elektrodynamik mit praktischer Anwendung.

Von

W. Weber und **F. Zöllner.**

[Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse, Bd. 32, Leipzig 1880, p. 77—143.]

1.

Ueber die Bedeutung und den praktischen Gebrauch absoluter Maasse in der Physik im Allgemeinen und der Elektrodynamik im Besonderen.

Alle mechanischen Vorgänge in der Natur, welche mit Hülfe physikalischer Instrumente der messenden Beobachtung unterworfen werden können, erfordern die Feststellung *dreier* Grundmaasse für drei unabhängige Grössen, nämlich für: die *Zeit*, den *Raum* und die *Masse*. Zur Vereinfachung physikalischer Forschungen ist es nun sehr wesentlich, für die verschiedenen, einer Messung zu Grunde liegenden, Grössenarten nicht *mehr* eigene, von einander unabhängige, Grundmaasse einzuführen als unumgänglich nöthig sind, so dass alle anderen Maasse aus diesen wenigen nothwendigen Grundmaassen abgeleitet werden. Aus diesem Grunde werden in der Mechanik blos für *Zeiträume*, *Linien* und *Massen* Grundmaasse aufgestellt; die Maasse aller anderen in der Mechanik betrachteten Grössenarten werden aus diesen drei Grundmaassen abgeleitet und heissen dann *absolute Maasse.* Zum Beispiel werden keine Grundmaasse für die Geschwindigkeit und Dichtigkeit aufgestellt, sondern es werden absolute Maasse dafür gebraucht, welche auf jene drei Grundmaasse zurückgeführt werden können. Ebenso werden die Maasse für die bewegenden und für die absoluten Kräfte, für die Drehungsmomente, Trägheitsmomente, Nutzeffekte u. s. w. nach bekannten Gesetzen auf jene Grundmaasse zurückgeführt. Aus demselben Grunde wird ferner auch für den Magnetismus kein eigenes unabhängiges Grundmaass eingeführt, sondern man hält sich an das absolute Maass, welches Gauss für den Magnetismus aus den drei Grundmaassen der Mechanik, nämlich

der *Sekunde* als Zeiteinheit, dem *Millimeter* als Längeneinheit und dem *Milligramm* als Masseneinheit, in seiner Abhandlung: *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* (Göttingen 1833) abgeleitet hat.[1]) Gauss setzt gleich in der Einleitung dieser Abhandlung die von ihm gewählten absoluten Maasseinheiten mit folgenden Worten fest:

„*Quo igitur hanc mensuram ad notiones distinctas revocare possimus, ante omnia circa tria quantitatum genera unitates stabilire opportet, puta unitatem distantiarum, unitatem massarum ponderabilium, unitatem virium accelatricium. Pro tertia accipi potest gravitas in loco observationis: quod si minus arridet, insuper accedere debet unitas temporis, eritque nobis vis acceleratrix ea* $= 1$, *quae in unitate temporis mutationem velocitatis corporis in ipsius directione moti unitati aequalem gignit. His ita intellectis, unitas quantitatis fluidi borealis ea erit, cujus vis repulsiva in aliam ipsi aequalem in distantia* $= 1$ *positam aequivalet vi motrici* $= 1$, *i. e. actioni vis acceleratricis* $= 1$ *in massam* $= 1$ *idemque de unitate quantitatis fluidi australis valebit: in hac determinatione manifesto tum fluidum agens, tum fluidum in quod agitur, in punctis physicis concentrata concipi debent.*"

Entsprechend dieser Definition ist z. B. das Maass für die Stärke des Erdmagnetismus oder der erdmagnetischen Kraft an irgend einem Orte das nach absolutem Maasse ausgedrückte Drehungsmoment, welches der Erdmagnetismus auf einen an diesem Orte befindlichen Magnetstab ausübt, wenn letzterer die absolute Einheit von Magnetismus enthält und seine magnetische Axe mit der Richtung des Erdmagnetismus an diesem Orte einen rechten Winkel macht.[2])

Nach dem von Gauss definirten Systeme der absoluten Maassbestimmung würde sich für die Grösse der absoluten Masseneinheit der ponderablen Materie die folgende Definition ergeben:

Die absolute Masseneinheit der ponderablen Materie ist diejenige Masse, welche, wenn sie auf eine ihr gleiche Masse eine Sekunde lang aus der Entfernung eines Millimeters einwirkt, eine relative Geschwindigkeit beider Massen von einem Millimeter erzeugt.

Berechnet man mit Benutzung der von Cavendish, Reich u. A. über die mittlere Dichtigkeit der Erde angestellten Messungen die der obigen

[1]) Gauss' Werke, Bd. V, S. 79.

[2]) „Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins von Gauss und Wilhelm Weber, 1840, und Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Widerstandsmessungen von Wilhelm Weber." Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. I, 1852, S. 219. [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, S. 321.]

Definition entsprechende Masse, so ergiebt sich der Werth von 15,1882 Kilogramm.[1]) Die Unsicherheit der zur Bestimmung der Dichtigkeit der Erde bis jetzt verfügbaren Maassmethoden macht jedoch die *praktische* Anwendung dieser absoluten Maasseinheit illusorisch und lässt bis jetzt die in einem gemessenen Volumen enthaltene Menge eines bekannten und allgemein verbreiteten Stoffes (Wasser) als die einzige brauchbare Methode zur Feststellung einer Masseneinheit erscheinen.

Für die *Elektrostatik* ergiebt sich als Einheit der Elektricitätsmenge nach absolutem Maasse, entsprechend den obigen Bestimmungen, die folgende Definition:

> *Die elektrostatische Einheit ist diejenige Elektricitätsmenge, welche, wenn sie auf eine ihr gleiche Elektricitätsmenge von derselben Art, die fest mit der Masse eines Milligramms verbunden ist, eine Sekunde lang aus der Entfernung eines Millimeters einwirkt, jener ponderablen Masse eines Milligramms eine Geschwindigkeit von einem Millimeter ertheilt.*

Für die in der *Elektrodynamik* vorkommenden Grössenarten ergeben sich nach den Principien der absoluten Maassbestimmung die folgenden[2]) Definitionen:

1. *Die Einheit für die Stromintensitäten.*

Die Einheit für die Stromintensitäten ist die Intensität desjenigen Stroms, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse der Flächeneinheit (Quadratmillimeter) umfliesst, nach den elektromagnetischen Gesetzen dieselben Wirkungen in die Ferne ausübt, wie ein Magnetstab, welcher die oben definirte Einheit des Magnetismus enthält.

2. *Die Einheit für die elektromotorischen Kräfte.*

Die Einheit für die elektromotorischen Kräfte ist diejenige elektromotorische Kraft, welche von der oben definirten Einheit des Erdmagnetismus auf eine geschlossene Kette ausgeübt wird, wenn letztere so gedreht wird, dass die von ihrer Projektion auf eine gegen die Richtung des Erdmagnetismus senkrechte Ebene begrenzte Fläche während der Zeiteinheit (Sekunde) um die Flächeneinheit (Quadratmillimeter) zu- oder abnimmt.

[1]) Vergl. Zöllner „Wissenschaftliche Abhandlungen", Bd. II, Theil 1, S. 761, und Astronomische Nachrichten, Bd. 87, No. 2082—2086, Januar 1876.

[2]) „Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840" von Gauss und W. Weber (S. 86), und Elektrodynamische Maassbestimmungen von W. Weber in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. I, S. 219. (1852.) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, S. 9 u. S. 321.]

3. *Die Einheit des Widerstandes.*

Die Einheit für den Widerstand ist der Widerstand einer solchen geschlossenen Kette, in welcher durch die oben definirte Einheit der elektromotorischen Kraft die vorher definirte Einheit der Stromintensität hervorgebracht wird.

Bezeichnet man die oben definirte Einheit für die Stromintensitäten mit I und irgend eine hiernach gemessene Stromintensität mit iI, worin i eine unbenannte Zahl bezeichnet, und bezeichnet man ferner die oben definirte Einheit der elektromotorischen Kräfte mit E und irgend eine nach derselben gemessene elektromotorische Kraft mit eE, worin e eine unbenannte Zahl bezeichnet, so wird wW der Widerstand einer Kette sein, auf welche die elektromotorische Kraft eE wirkt und darin einen Strom von der Intensität iI hervorbringt, wenn W die oben definirte Widerstandseinheit bezeichnet und $w = [e/i]$ eine reine Zahl ist. Der Widerstand dieser Kette ist also der Widerstandseinheit gleich, wenn $e = i$ gefunden wird. *Hieraus ergiebt sich, dass ein Leiter, welcher die vorher definirte Widerstandseinheit besitzt, wirklich dargestellt werden kann.*

Die praktische Herstellung eines solchen Leiters, dessen Widerstand als ein Vielfaches der definirten absoluten Einheit durch scharfe Messungen der dazu erforderlichen Grössen von *Zeit* und *Raum* bestimmt werden kann, ist der wesentliche Zweck der vorliegenden Arbeit. Das gemeinsame Interesse für die Elektrodynamik, welches uns zu dieser Arbeit verband, datirt aus dem Jahre 1871, in welchem die allgemeinere Bedeutung des elektrodynamischen Grundgesetzes auch für die Wechselwirkung anderer Körper eine grössere Aufmerksamkeit erweckte.[1]) Ebenso haben im Verlaufe des verflossenen Decenniums die vom sogenannten Principe der Erhaltung der Kraft aus gegen das elektrodynamische Grundgesetz erhobenen Einwände die Veranlassung zu einer eingehenden Prüfung des Gesetzes gegeben, bei welcher sich die Nothwendigkeit einer strengeren Definition des erwähnten Princips ergab. Aus dieser Definition konnte dann unter Voraussetzung des elektro-*statischen* Grundgesetzes das elektro-*dynamische* Grundgesetz der Wechselwirkung deducirt werden.[2]) Hierdurch musste die Bedeutung

[1]) Vergl. „Ueber die Natur der Kometen" (1872, Engelmann), S. 334. Anwendung des WEBER'schen Gesetzes auf die Bewegung der Himmelskörper. — TISSERAND, *Note sur le mouvement des planètes autour du Soleil d'après la loi électrodynamique de* WEBER. *Comptes rendus. Sept.* 30, 1872. — Ueber die universelle Bedeutung des WEBER'schen Gesetzes. Wissenschaftliche Abhandlungen von F. ZÖLLNER, Bd. II, Theil 1, S. 7. — *De motu perturbationibusque planetarum secundum legem elektrodynamicam Weberianam solem ambientium. Scripsit* C. SEEGERS. *Gottingae* 1864.

[2]) Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1878, und POGGENDORFF's Annalen 1878. Heft 7. „Ueber die Energie der Wechselwirkung" von W. WEBER. [WILHELM WEBER's Werke, Bd. IV, S. 361 u. S. 413.]

des ursprünglich im Gebiete der Elektrodynamik gefundenen und angewandten Gesetzes für das gesammte Gebiet der Physik eine umfassendere werden, und gerade diese Erwägung, sowie die mannigfachen, sich hieran anknüpfenden Fragen lieferten den Stoff zu einem mündlichen und schriftlichen Ideenaustausch, welcher uns die praktische Ausführung absoluter Widerstandsmessungen nach einer bereits vor 30 Jahren vorgeschlagenen,[1]) jedoch wegen Mangel an genügenden Hülfsmitteln und Räumlichkeiten bis jetzt nicht in *grösserem* Maassstabe zur Anwendung gekommenen Methode wünschenswerth erscheinen liess. In der unten citirten Abhandlung sind im Ganzen *vier* verschiedene Methoden vorgeschlagen worden, welche von F. Kohlrausch in seiner Abhandlung über die „*Zurückführung der* Siemens'*schen galvanischen Widerstandseinheit auf absolutes Maass*“ [2]) übersichtlich zusammengestellt und charakterisirt worden sind.

Die erste Methode benutzt die durch den Erdmagnetismus in einem bewegten Leiter von bekannten Dimensionen (Erd-Induktor) inducirte elektromotorische Kraft und findet die Stromstärke durch die Ausschläge einer kurzen Magnetnadel innerhalb eines Multiplikators von ebenfalls bekannten Dimensionen. Diese Methode erfordert nur die Kenntniss der Schwingungsdauer der Nadel, nicht der Intensität des Erdmagnetismus, da dieser die Stärke der Induktion und die Schwingungsdauer der Nadel in gleichem Maasse beeinflusst und hierdurch seine Aenderungen auf das Resultat der Messung selber aufhebt. Nothwendig ist jedoch eine hinreichende Kürze der Nadel im Verhältniss zu den Dimensionen des Multiplikators, um praktisch die von diesem Verhältniss abhängenden Glieder höherer Ordnung vernachlässigen zu können. Entweder müssen also die Beobachtungen an einer *kleinen* Nadel angestellt werden, oder der Multiplikator muss in sehr bedeutenden Dimensionen ausgeführt werden. Letzteres ist bei der von uns angewandten Methode der Fall, wie dies die spätere Beschreibung zeigen wird.

Die zweite Methode[3]) ist eine Modifikation der ersten, mit Rücksicht auf die Schwierigkeiten und bedeutenden Mittel, welche zur Realisirung der ersten Methode erforderlich sind. Als Galvanometer dient ein die Nadel eng umschliessender Multiplikator mit astatischer Nadel, deren Dimensionen den Anforderungen der grössten Empfindlichkeit und

[1]) Vergl. die oben citirte Arbeit W. Weber's aus dem Jahre 1852, S. 220. [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, S. 322.]

[2]) Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband VI, St. 1. — Der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen im Auszuge mitgetheilt am 5. November 1870.

[3]) Wilhelm Weber, Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1862, Bd. X, S. 20. Auch separat gedruckt unter dem Titel: *Zur Galvanometrie*, Göttingen 1862. [Wilhelm Weber's Werke, Bd. IV, S. 17.]

sonstigen Rücksichten beliebig angepasst sein können. Die Wirkung der Stromeinheit im Multiplikator auf die Nadel wird nämlich nicht, wie bei der ersten Methode, aus den Dimensionen berechnet, sondern findet sich empirisch nach den Gesetzen der Magneto-Induktion durch die sogenannte *Dämpfung*, welche die Schwingungen der Nadel durch den geschlossenen Drahtkreis des Multiplikators erleiden. Ferner muss ausser der Schwingungsdauer noch das *Trägheitsmoment der Nadel* und die *erdmagnetische Kraftkomponente*, welche auf den Induktor wirkt, nach *absolutem* Maasse bekannt sein. Diese Methode ist die von F. Kohlrausch in seiner oben erwähnten Abhandlung angewandte.

Die dritte Methode[1]) zeichnet sich durch eine grosse Einfachheit der zu ihrer Anwendung erforderlichen Instrumente aus. Es ist nämlich nur ein Multiplikator erforderlich, in dessen Mitte eine Magnetnadel schwingt. Ist die Schwingungsdauer dieser Nadel, sowie das Verhältniss des Nadelmagnetismus zum Erdmagnetismus und die *Vertheilung* des ersteren in der Nadel ermittelt (durch Ablenkungsbeobachtungen an einer Boussole), so lässt sich hieraus und aus den Dimensionen des Multiplikators die durch die bewegte Nadel in dem letzteren erzeugte elektromotorische Kraft berechnen. Die Stärke des hierdurch inducirten Stroms und somit der Widerstand des Multiplikatordrahts wird aus der beobachteten *Dämpfung* erhalten.

Die vierte Methode[2]) erfordert einen durch rhythmische Umwendungen bewegten oder *in rasche gleichförmige* Rotation versetzten Multiplikator von *bekannten* Dimensionen und die Beobachtung der Ablenkung einer kleinen, in der Mitte des bewegten Multiplikators aufgehängten Magnetnadel. Diese Methode kann in zwei verschiedenen Modifikationen zur Anwendung kommen, je nachdem der Multiplikator um eine *horizontale* oder *vertikale* Axe bewegt wird. Im ersteren Falle muss das *Verhältniss der beiden erdmagnetischen Komponenten* bekannt sein, da die horizontale Komponente auf die Nadel wirkt, während die vertikale inducirt.

Die Rücksicht auf die hohe praktische und wissenschaftliche Bedeutung der Herstellung einer in *absolutem* Maasse bestimmbaren Widerstandsgrösse hatte die *British Association* im Jahre 1862 veranlasst, ein Komité zu ernennen, um die zweckmässigsten Anordnungen zur Lösung der fraglichen Aufgabe zu berathen und der Association definitive Vorschläge zur praktischen Ausführung zu unterbreiten. Das Komité entschied sich unter Leitung von Sir William Thomson zur Anwendung der oben beschriebenen vierten Methode, und zwar in der-

[1]) Wilhelm Weber in der oben citirten Abhandlung, S. 232. [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, S. 333.]

[2]) Vergl. W. Weber „Zur Galvanometrie", S. 12. [Wilhelm Weber's Werke, Bd. IV, S. 26.]

jenigen Modifikation, bei welcher dem Multiplikator durch ein zweckmässig eingerichtetes Räderwerk eine möglichst gleichförmige, kontinuirliche Rotation ertheilt wird. Dieser Vorschlag des Komité's wurde acceptirt und mit bedeutendem Kostenaufwande zur Ausführung gebracht. Man findet die ausführliche Beschreibung der Instrumente in dem *Report of the Meetings of the British Association*, Vol. 33 vom Jahre 1863 (London 1874), S. 164—168.

Wenn bei dem beschriebenen Apparate die Rotationsaxe des Multiplikators *nicht senkrecht*, sondern *horizontal* in die Richtung der durch Induktion abgelenkten Nadel gefallen wäre, was sich ohne wesentliche Steigerung der technischen Schwierigkeiten leicht hätte bewerkstelligen lassen, so wäre die störende Induktion der Nadel auf den rotirenden Multiplikator fortgefallen und nur die Induktion der *horizontalen* Komponente des Erdmagnetismus auf die Drahtwindungen des rotirenden Multiplikators übrig geblieben. Die in diesem Falle erforderliche Kenntniss der magnetischen Inklination an dem betreffenden Orte würde sich mit Hülfe des vor 30 Jahren von W. Weber beschriebenen und praktisch angewandten „*Induktions-Inklinatorium*“ (vergl. Poggendorff's Annalen, Bd. 43, S. 493)[1]) mit einer Genauigkeit von derselben Ordnung wie derjenigen der absoluten Widerstandsmessung haben bestimmen lassen.

Bei der vom Komité[2]) gebilligten und angewandten *senkrechten* Stellung der Rotationsaxe findet nun aber *gleichzeitig* eine Induktion durch die Magnetnadel und die horizontale Komponente des Erdmagnetismus Statt, so dass der erstere Theil dieser Doppelinduktion eliminirt werden muss. Mit Rücksicht auf die hieraus sich ergebenden Schwierigkeiten und Fehlerquellen ist bereits die ganze von der *British Association* zur Anwendung gebrachte Methode von F. Kohlrausch a. a. O. einer Kritik[3]) unterworfen worden, welcher wir uns im Allgemeinen vollkommen anschliessen.

F. Kohlrausch bemerkt bezüglich der vorher erwähnten Elimination der Induktion durch den Nadelmagnetismus, S. 5, wörtlich Folgendes:

> „Wollte man in dem vom Komité angewandten Multiplikator von 300 Millimeter Durchmesser einen für galvanometrische Messungen gewöhnlich gebrauchten kleinen Magnet benutzen, so würde

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. II, S. 75.]

[2]) Ueber die Mitglieder des Komité's berichtet der *Report*, S. 111, wörtlich: „*The Committee consists of* — Professor Wheatstone, Professor Williamson, Mr. C. F. Varley, Professor Thomson, Mr. Balfour Stewart, Mr. C. W. Siemens, Dr. A. Matthiessen, Professor Maxwell, Professor Miller, Dr. Joule, Mr. Fleeming Jenkin, Dr. Esselbach, Sir C. Bright.“

[3]) Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband VI, St. 1. Auszugsweise in den Berichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vom 5. Nov. 1870.

seine eigene Induktion die des Erdmagnetismus weit übertreffen. Sollte die erstere als kleine Korrektion behandelt werden, so war deswegen eine ungewöhnlich schwache Magnetnadel vorgeschrieben. Darin ist in der That das Komité sehr weit gegangen; so weit, dass ohne Zweifel noch niemals eine so schwache Magnetnadel zu einer Messung verwendet worden ist. Der Magnet bestand nämlich aus einer Stahlkugel von 8 Millimeter Durchmesser, also aus einer für den Magnetismus möglichst ungünstig gestalteten Masse von etwa 2 Gramm. Diese kleine Kugel aber war nun noch absichtlich schwach magnetisirt und hatte einen Magnetismus nicht grösser als der, welchen man einer Nähnadel von der Masse $\frac{1}{40}$ Gramm mittheilen kann, wovon ich (Kohlrausch) mich durch den Versuch überzeugt habe. Die Stahlkugel lenkte nämlich (Report 1863, S. 172) aus 156,6 Millimeter Entfernung eine Boussolennadel um 27′ = Arc. tang. 0,0078 ab. Daraus folgt, die Horizontalintensität = 1,76 angenommen, das magnetische Moment:

$$M = \tfrac{1}{2} \,.\, 1{,}76 \,.\, 156{,}6^3 \,.\, 0{,}0078 = 26\,000.$$

Da nun 1 Milligramm Stahl im Maximum etwa 1000 Einheiten dauernden Magnetismus annimmt,[1]) so kann man den obigen Magnetismus einem dünnen Stäbchen von 26 Milligramm mittheilen.

Zur Illustration der Zahlen kann ferner dienen, dass ein gestrecktes Eisenstäbchen von 10 Gramm, in der Inklinationsrichtung gehalten, den obigen Nadelmagnetismus durch Induktion des Erdmagnetismus annehmen würde. Ein einfacher Kokonfaden von 2 Meter Länge war als Aufhängefaden der Stahlkugel nothwendig, um die Torsionskraft auf diejenige kleine Grösse zu reduciren, welche durch die Kleinheit der magnetischen Direktionskraft und die elastische Nachwirkung geboten war. Nun denke man sich mit der allerfeinsten Nähnadel, als Magnetnadel, an einem etwa $\frac{1}{4}$ Meter langen Verbindungsstück einen Spiegel von 30 Millimeter Durchmesser verbunden, der also für Luftströmungen, welche auch in einem gut geschlossenen Kasten nicht ganz ausbleiben, eine Fläche von etwa 14 Quadratcentimeter (der Zeichnung entsprechend) darbot, die ganze Masse von einem Trägheitsmoment, dass ihre Schwingungsdauer (Rep. 1863, S. 173) 10 Sekunden betrug, während diejenige der Nähnadel etwa $\frac{2}{3}$ Sekunde betragen würde, und man hat im Wesentlichen das Magnetometer, auf welches die schwachen Ströme im Multiplikator wirkten, und bei welchem ein Einstellungsfehler von 2 Bogenminuten einen Fehler von 1 Procent im Resultate bewirkte. Dazu kommt noch, dass

[1]) Vergl. auch Schneebeli, Programm des Züricher Polytechnikums 1871—72.

in unmittelbarer Umgebung dieses Magnetometers der grosse Multiplikator mit einer Geschwindigkeit bis zu vier Umdrehungen in der Sekunde rotirte.

Es erscheint als ein Mangel in den sonst so ausführlichen Berichten, dass, soweit mir bekannt, nirgends eine Beobachtungsreihe mit allen Einzelheiten wiedergegeben wird, damit man einen Anhaltspunkt für oder gegen das genannte Bedenken gewönne. Erwähnt wird (S. 174 a. a. O.), dass einzelne Theile der länger dauernden Versuchsreihen, wegen Nicht-Uebereinstimmung mit anderen, von der Rechnung ausgeschieden worden seien; also scheinen bedeutende unaufgeklärte Unregelmässigkeiten vorgekommen zu sein. *In der messenden Physik aber ist es immer bedenklich, anzunehmen, dass grössere Versuchsfehler nur zufälligen Ursprungs seien und durch eine hinreichende Anzahl von Beobachtungen eliminirt werden.*

In der That, wenn wir nun die Schlussresultate ansehen, welche zur Veröffentlichung gelangt sind,[1]) so scheinen diese ein leises Bedenken zu rechtfertigen. Diese *Mittelzahlen* weichen von einander noch bis zu 1,4 Procent ab. Man findet ferner, dass die langsamen Rotationen im Mittel ein um etwa 0,5 Procent anderes Resultat ergeben, als die raschen. In gleicher Weise erlaubt die Mittheilung einiger Beobachtungen von einem und demselben Tage (*Report* 1863, S. 175) ein Urtheil. Daselbst kommen vier Resultate vor, welche bis zu 2,3 Procent von einander abweichen. Und diese Zahlen beruhen jede auf etwa viertelstündigen Beobachtungsreihen mit je etwa 100 Skalenablesungen, aus denen eventuell die am wenigsten stimmenden Zahlen bereits ausgeschieden worden sind. An so grossen Differenzen wird ein unbefangener Leser immer Anstand nehmen.

Ganz unverständlich aber sind mir die Abweichungen bis zu 8,5 Prozent, welche unter Umständen eintraten, je nachdem der Induktor nach *links* oder *rechts* rotirte. Nach einer Andeutung des Herrn Jenkin[2]) soll dieser Umstand darin seine Erklärung finden, dass „der Faden, an dem der Magnet suspendirt war, in der einen Richtung einen geringen Einfluss ausübte“. Man ist versucht, auf eine einseitige, dauernde Torsion des Fadens zu schliessen, wodurch die beiderseitigen Ausschläge allerdings verschieden ausfallen. Aber um Differenzen zu erklären, wie sie

[1]) *Report of the British Association*, 1864, S. 350. — Poggendorff's Annalen, Bd. 126, S. 386.

[2]) Poggendorff's Annalen, Bd. 126, S. 387.

hier vorkommen, musste die Torsion so gross sein, dass die magnetische Axe der Stahlkugel eine um viele Grade vom magnetischen Meridian abweichende Stellung gehabt hätte. Ein solches Versehen bei der Aufhängung darf man wohl kaum annehmen. Sollte es aber vorgekommen sein, so scheinen mir die betreffenden Beobachtungsreihen verwerflich; denn wenn man schon in der gewöhnlichen Praxis eine so grosse Unsymmetrie ungern zulässt, so würde sie gefährlich erscheinen bei der Kugelgestalt und dem schwachen Magnetismus des kleinen Magnets. Dass nämlich dessen magnetische Axe, auf deren Konstanz schliesslich Alles ankommt, wirklich bis auf Bogenminuten konstant sei, wenn sie nicht in der Richtung der magnetischen Direktionskraft liegt, würde eine gewagte Behauptung sein.

Minder bedenklich wäre wohl die andere Interpretation des citirten Ausspruchs, dass eine Aenderung der Torsionsruhelage des Kokon durch elastische Nachwirkung im Spiel wäre, etwa, indem der Faden noch nicht lange aufgehangen war. Aber auch dieses möchte ich nicht gern annehmen, denn man hätte in diesem Falle die Beobachtungen aufschieben oder doch mindestens die Nachwirkung durch besondere Beobachtungen eliminiren sollen.

Kurz, man wird die Annahme kaum vermeiden können, dass der schwache Magnetismus der Nadel erhebliche Unzuträglichkeiten im Gefolge gehabt habe, und die Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf solche Beobachtungen anzuwenden halte ich, ohne den ausdrücklichen Nachweis von der Abwesenheit konstanter Fehlerquellen, nicht für gerechtfertigt. Immerhin aber könnte der wahrscheinliche Fehler von 0,1 Procent, der für das Endresultat berechnet wird, sich nur auf die Skalenablesungen beziehen; ihn auf die ganze Messung zu übertragen würde voraussetzen, dass andere Fehlerquellen nicht vorhanden gewesen sind. Auch die, wenn auch sehr beachtungswerthe Uebereinstimmung der beiden im Jahre 1863 und 1864 gefundenen Zahlen bis auf 0,16 Procent kann nicht als unbedingt maassgebend betrachtet werden.

Wenn wir nun nach den anderen Fehlerquellen fragen, so erhebt Herr W. Siemens zunächst einen Einwand gegen die Berechnung des mittleren Windungshalbmessers aus der Länge und der Windungszahl des Drahtes. Dass ein solches Verfahren bei *dickem* Draht unbedenklich ist, glaube ich aus eigenen sorgfältigen Versuchen schliessen zu dürfen. Der Querschnitt der hier vorliegenden Drahtsorte beträgt freilich, aus dem Gewicht und Gesammtwiderstand des Drahtes, sowie aus den Dimensionen des Multiplikators zu schliessen, nur etwa 1 Quadratmillimeter, wobei man

den obigen Einwand nicht ungerechtfertigt finden mag. Gross dürfte immerhin der daraus entspringende Fehler nicht sein."

Das Vorstehende enthält eine wörtliche Reproduktion der Kritik, welche F. KOHLRAUSCH vor zehn Jahren a. a. O. über die mit sehr bedeutendem Kostenaufwande von dem Komité der *British Association* ausgeführte Arbeit zur Herstellung einer galvanischen Widerstandseinheit veröffentlicht hat. Hierbei bemerkt KOHLRAUSCH mit Recht, dass „auch nach der Auffassung des Komité (*Report* 1864, S. 346) die *British Association*-Einheit faktisch *nicht* ein *absolutes*, sondern nur ein *Grundmaass* sei, wobei es für den Gebrauch ganz gleichgültig ist, ob die Annäherung an das *absolute* Maass bis auf 2 oder bis auf 3 Procent geht. Soll ferner nach den Angaben des *Report* von 1864, S. 348 auch die Reproducirbarkeit der *British Association*-Einheit nicht auf eine *Wiederholung* der absoluten Messung gegründet werden, sondern auf das Leitungsvermögen von Metallen, worunter das von W. SIEMENS zu diesem Zwecke angewandte Quecksilber selbstverständlich obenan steht, so liegt kein Grund vor, aus welchem nicht runde und bequeme Dimensionen der Quecksilbersäule gewählt werden sollten".

„Die Frage, welche Widerstandseinheit zur allgemeinen Einführung geeignet sei," sagt KOHLRAUSCH a. a. O., „gehört kaum in eine wissenschaftliche Untersuchung. Der Physik selbst kann ohne Zweifel die Konkurrenz zwischen der SIEMENS'schen und der *British Association*-Einheit nur erwünscht sein, denn durch sie ist das beste Mittel gegeben, die Unveränderlichkeit beider zu prüfen, welche für wissenschaftliche Anwendungen allein in Betracht kommt. In der Praxis dürfte einmal die Stellung des Herrn WERNER SIEMENS zur Telegraphie seiner Einheit einen beträchtlichen Vorsprung gegeben haben; nicht minder wichtig ist der Umstand, dass die mit Umsicht eingerichteten und, soviel mir bekannt, auch gut eingetheilten SIEMENS'schen Skalen in grossem Maassstabe verbreitet worden sind. Auch kann man kaum leugnen, dass für den Praktiker die Definition aus dem Quecksilber eine verständliche ist, während die andere (von der *British Association* definirte) für's Erste nur Wenigen klar werden wird."

Das Vorstehende wird hinreichend sein, um die Aufgabe, welche sich vor zwanzig Jahren das Komité der *British Association* bei seinen Arbeiten gestellt hatte, als ein weder im *Princip* noch seiner *praktischen Ausführung* nach mit der erreichbaren Genauigkeit und Schärfe gelöstes Problem erscheinen zu lassen.

Die von KOHLRAUSCH mit so grosser Umsicht a. a. O. angewandte *zweite* der oben (S. 424) erwähnten Methoden setzte, wie bemerkt, eine genaue Kenntniss der erdmagnetischen Konstante nach *absolutem* Maasse voraus und kann daher nur an solchen Orten ausgeführt werden, an

welchen die hierzu erforderlichen Instrumente und Beobachtungen in genügender Vollkommenheit vorhanden sind. Dass in dieser Beziehung das magnetische Observatorium zu Göttingen, in welchem Kohlrausch seine Beobachtungen anstellte, allen Anforderungen entsprach, bedarf nicht einer besonderen Erwähnung.

Als Resultate seiner verschiedenen Messungen theilt Kohlrausch am Schlusse seiner Arbeit Folgendes mit:

I. 4,1029 Siemens = 3,9812 Erdquadrant/Sekunde, also 1 Siem. = 0,9703,
II. 4,1049 „ = 3,9903 „ „ „ 1 „ = 0,9721,
III. 4,0965 „ = 3,9849 „ „ „ 1 „ = 0,9728.

Hieraus ergiebt sich im Mittel:

1 Siemens-Quecksilber-Einheit = 0,9717 Erdquadrant/Sekunde.

Zu diesen Resultaten bemerkt Kohlrausch wörtlich Folgendes:

„Was das Verhältniss der *British Association*-Einheit zur Siemens'schen betrifft, so darf als zuverlässigster bis jetzt veröffentlichter Werth wohl derjenige angesehen werden, welchen Herr Dehms aus einer von Herrn Jenkin angestellten Vergleichung ableitet:[1])

1 *British Association*-Einheit = 1,0493 Siemens-Einheit.

Herr Dehms und Herr Hermann Siemens hatten die Güte, auf meine Bitte eine neue Vergleichung anzustellen, wobei zunächst eine im Siemens'schen Laboratorium vorhandene *British Association*-Einheit (No. 61) sich = 1,0473 erwies. Da diese Vergleichung wegen Beschädigung der Einheit in der Luft vorgenommen werden musste, wird ihr keine entscheidende Bedeutung beigelegt. Ferner kamen die *British Association*-Einheiten der Herren Brix (No. 21) und Weber (No. 51) zur Vergleichung und ergaben vollständig übereinstimmend mit der obigen Zahl den Werth 1,0493. Vergleicht man diese Uebereinstimmung mit den früheren enormen Differenzen in den Angaben über Widerstandseinheiten, so liegt darin ein sehr erfreulicher Beweis von dem Fortschritt auf diesem Gebiete der Messung.[2])

Unter Benutzung der Zahl 1,0493 Erdquadrant/Sekunde findet sich schliesslich:

1 *British Association*-Einheit = 1,0196 Erdquadrant/Sekunde,

d. h. diese Einheit wäre danach um nahe 2 Procent grösser, als beabsichtigt wurde.“

[1]) *Report of the British Association*, 1864, S. 349, und Poggendorff's Annalen, Bd. 136, S. 404.

[2]) Vergl. Poggendorff's Annalen, 1873, Heft 1.

Bei der folgenden Arbeit kam es nun, wie bemerkt, zunächst darauf an, einen *Normalleitungsdraht* von solcher Beschaffenheit und Anordnung herzustellen, dass derselbe sowohl bezüglich seines Widerstandes als seiner räumlichen Verhältnisse *jederzeit* durch *direkte* Messungen nach *absolutem* Maasse kontrolirt werden kann. Die Lösung dieser Aufgabe ist der wesentliche Inhalt der vorliegenden Arbeit, wogegen die Vergleichung dieses Normalleiters mit anderen Widerstandseinheiten einer späteren Arbeit vorbehalten bleibt, indem die hierzu erforderlichen elektrodynamischen Komparatoren gegenwärtig noch in Arbeit befindlich, hoffentlich aber in kurzer Zeit vollendet sind.

In Betreff der Lokalität für die Aufstellung der Apparate waren im Wesentlichen *zwei* Gesichtspunkte maassgebend. *Erstens* musste hinreichender Raum für den genügenden Abstand des Induktors vom Multiplikator vorhanden sein und *zweitens* durften sich nicht Magnete in dem Raume befinden, welche ihren Einfluss auf die Induktion und die Einstellung der Magnetnadel im Multiplikator geltend machen konnten. Die Berücksichtigung des *ersten* Umstandes verhinderte die Benutzung des kleinen, im Garten der hiesigen Universitäts-Sternwarte für astrophysikalische Beobachtungen erbauten Observatoriums. Die Berücksichtigung des *zweiten* Gesichtspunktes liess auch die für erdmagnetische Beobachtungen im Garten des hiesigen physikalischen Instituts befindliche „magnetische Warte“ als ungeeignet erscheinen, wohingegen die Räumlichkeiten in der sogenannten „alten Sternwarte“ auf der Pleissenburg, welche unter Möbius bereits früher als magnetisches Observatorium gedient hatten, alle diejenigen Erfordernisse vereinigten, die uns zu einer definitiven Aufstellung der Apparate wünschenswerth erschienen. Da diese Räumlichkeiten bereits anderweitig für physikalische und astronomische Zwecke reservirt sind, so ist hierdurch den Instrumenten auch für die Zukunft eine hinreichend stabile, durch keine Dislokation gestörte, Aufstellung gesichert. Zugleich gestattet die Beschaffenheit dieser Räume die Ausführung von später projektirten Experimental-Untersuchungen über einige physikalische Konstanten, wie z. B. die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit nach Foucault und Fizeau und anderen physikalischen Methoden, sowie die Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde nach den Methoden von Cavendish und Reich. Da sich ausserdem in den erwähnten Lokalitäten auf der Pleissenburg ein Dreieckspunkt der europäischen Gradmessung befindet, so vereinigen sich alle Umstände, um die bezeichneten Räumlichkeiten zur praktischen Erforschung und Feststellung physikalischer Fundamentalbestimmungen nach absolutem Maasse als zweckmässig gewählte erscheinen zu lassen.

Bei der Konstruktion und Herstellung der Apparate waren besonders

zwei Gesichtspunkte zu berücksichtigen. *Erstens* mussten die Dimensionen des Multiplikators und Induktors von solcher Grösse gewählt werden, dass die technische Herstellung und Ausmessung der einzelnen Theile (Länge der Magnetnadeln, Durchmesser und Flächengrösse der von jeder Schicht der Drahtwindungen umschlossenen Kreisfläche) mit grosser Schärfe bewirkt werden konnten, so dass die unvermeidlichen Beobachtungsfehler das Gesammtresultat der Messung nur in Gliedern *höherer* Ordnung beeinflussen konnten. *Zweitens* mussten Einrichtungen getroffen werden, welche *jederzeit* eine Wiederholung und Kontrole der zur Bestimmung der Konstanten des Apparats erforderlichen Operationen gestatteten.

Zu diesem Zwecke wurden besondere Vorrichtungen zum Abwickeln und Wiederaufwinden der gesammten Drahtmasse hergestellt, welche in Folgendem ausführlich beschrieben werden sollen.

Wie bereits oben S. 424 bemerkt, ist das Princip und die Konstruktion der zu beschreibenden Instrumente bereits vor 30 Jahren in der mehrfach erwähnten Abhandlung W. Weber's: „Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Widerstandsmessungen“ (Abhandlung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. I, 1846) ausführlich begründet und auch versuchsweise in kleinem Maassstabe praktisch zur Ausführung gekommen. Dass diese Methode ihrer Wichtigkeit entsprechend nicht bereits damals in einer solchen Grösse und Vollendung wie gegenwärtig verwirklicht und angewandt worden ist, hatte im Wesentlichen in dem Mangel genügender materieller und technischer Hülfsmittel seinen Grund.

2.

Beschreibung und Aufstellung der angewandten Instrumente.

Die Anfertigung der Instrumente wurde der Werkstätte astronomischer und physikalischer Instrumente von A. Repsold & Söhne in Hamburg übertragen und nach eingehender mündlicher Rücksprache mit Herrn J. Repsold, dem gegenwärtigen Vertreter und Inhaber der Firma, im Herbste des Jahres 1876 nach sorgfältiger Prüfung der angefertigten Zeichnungen begonnen. Mit Rücksicht auf die Grösse der Dimensionen, in welchen Induktor und Multiplikator projektirt waren und in Anbetracht des bedeutenden Gewichts der Kupferdrahtmasse von ca. 200 Kilogramm, welche bei Erzeugung der Induktionsstösse in rhythmischen Intervallen bewegt werden musste, erschien es uns zweifelhaft, ob diese Umwendungen wie bei kleineren Induktoren bequem durch Menschenkraft bewirkt werden konnten. Herr Repsold theilte unsere Ansicht und entschloss sich zur Konstruktion einer durch Auslösung

von Gewichten beweglichen mechanischen Vorrichtung, durch welche mittelst eines Seils ohne Ende in zweckmässiger Weise die erwähnten Umwendungen bewerkstelligt werden sollten. Bei der praktischen Anwendung dieser von Herrn J. Repsold sinnreich konstruirten Vorrichtung erwiesen sich jedoch die Erschütterungen des Bodens bei jedem Induktionsstosse so bedeutend, dass bis auf Weiteres dieser Apparat ausser Thätigkeit gesetzt und die Umwendungen des Induktors durch Menschenkraft bewirkt wurden. Es konnte dies um so leichter geschehen, als sich die ursprünglich, wegen des grossen Trägheitsmoments der zu bewegenden Masse, gehegten Bedenken in der Praxis bei Weitem weniger erheblich herausstellten.

Die Vollendung sämmtlicher Instrumente fand Ende April des Jahres 1877 Statt und die Versendung von Hamburg nach Leipzig Anfang Mai desselben Jahres. Gleichzeitig war auf unsere Veranlassung nach vorangegangener Rücksprache mit Herrn Werner Siemens eine für den beabsichtigten Zweck mit besonderer Sorgfalt angefertigte, mit Baumwolle besponnene Kupferdrahtmasse von 414,95 Kilogramm Gewicht und 3,33 Millimeter Dicke in der Fabrik von Siemens & Halske angefertigt und bereits im Oktober 1876 nach Leipzig gesandt worden. Am 13. Mai 1877 war die Aufstellung der Instrumente nach unserer Angabe und unter persönlicher Leitung des Herrn J. Repsold, mit umsichtiger und thatkräftiger Unterstützung des Herrn Mechanikus Carl Krille hierselbst (Schulstrasse 4) so weit vollendet, dass einige vorläufige Beobachtungen angestellt werden konnten. Die definitiven Beobachtungen, welche im dritten Theile der vorliegenden Arbeit zur Berechnung benutzt worden sind, wurden durch freundliche Betheiligung der Herren Professoren Riecke aus Göttingen, Heinrich Weber aus Braunschweig, des Herrn Dr. Weinek, ersten Assistenten an hiesiger Sternwarte, und in einzelnen Fällen von uns selber ausgeführt. Herr Mechanikus Krille hatte die Güte, die Drehungen des Induktors auf Kommando eines der betheiligten Beobachter zu übernehmen.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen mag nun die Beschreibung der wesentlichen Instrumente und ihrer Theile folgen.

Das Material, aus welchem die zum Aufwinden des Drahts bestimmten Rollen hergestellt sind, ist gut getrocknetes und mit Oel getränktes Mahagoniholz. Dasselbe ist zur Vermeidung irgendwelcher Veränderungen durch das sogenannte Verziehen des Holzes aus einzelnen Stücken sorgfältig mit Leim und Messingschrauben zusammengefügt. Die Induktor- und Multiplikator-Rolle sind in allen Theilen in ganz gleicher Grösse ausgeführt, um eventuell, durch Vertauschung des Aufhängepunkts der Nadel, zu Repetitions- und Kontrol-Beobachtungen benutzt werden zu können.

Fig. 1, Taf. III stellt die eine dieser beiden Rollen auf der Axe der Winde dar, welche mit Hülfe einer Doppelkurbel von zwei Arbeitern gedreht wurde, um den Draht von der in einer über 20 Meter tieferen Etage des Pleissenburg-Thurmes befindlichen und durch eine kreisförmige Oeffnung mit dem Beobachtungsraum unseres Observatoriums kommunicirende Vorrichtung, Fig. 2, auf die Induktor- und Multiplikator-Rolle zu wickeln. Um dem Drahte die erforderliche Spannung zu ertheilen, war eine Bremsvorrichtung mit dem Gewichte p an einem Hebelarme h angebracht. Der auf dieser Vorrichtung befindliche hölzerne Cylinder war in der Werkstätte von Siemens & Halske benutzt worden, um den Draht aufzuwickeln und zu versenden. Es ist einleuchtend, dass bei einer Wiederholung der Messungen der Konstanten des Apparats der Draht mit Hülfe derselben Vorrichtungen wieder abgewickelt werden kann, wodurch im Wesentlichen derjenigen Forderung entsprochen wird, welche wir oben bezüglich der Kontrolirbarkeit der Konstanten eines Messapparats zu fundamentalen Maassbestimmungen ausgesprochen hatten.

Behufs der Aufwickelung des Drahts wurden die für den Induktor und den Multiplikator bestimmten Holzcylinder nacheinander auf der erwähnten, mit Zahnräder-Triebwerk und doppelter Kurbel versehenen, Axe befestigt und provisorisch mit ihrem Holzgestell verbunden, welches über der erwähnten Oeffnung des Fussbodens aufgestellt wurde. Die Zahl der Windungen wurde sowohl durch direkte Zählung als durch ein von Herrn Repsold mit der Axe in Verbindung gesetztes mechanisches Zählerwerk bestimmt. Wie später genauer mitgetheilt werden wird, befinden sich auf Induktor und Multiplikator je 12 Lagen von Draht, von denen eine jede aus 66 einzelnen Windungen besteht. Nach vollendeter Aufwickelung wurde jede der Rollen mit ihrer Axe in dem für dieselbe bestimmten Holzgestell fixirt, mit den für das obere und untere Axenlager bestimmten Theilen in Verbindung gesetzt und alsdann die beim Aufwickeln benutzte horizontale Axe durch Beseitigung der angeschraubten Holzbacken aus dem inneren Raum der beiden Rollen entfernt. Die eine dieser Rollen wurde als Multiplikator in der Ebene des magnetischen Meridians unverrückbar aufgestellt, während die andere senkrecht zum Meridian um ihre vertikale Axe um 180° gedreht werden konnte. (Vergl. Grundriss, Taf. IV, Fig. 1.)

Fig. 3, Taf. III zeigt den Durchschnitt des Multiplikators mit der darin aufgehängten Magnetnadel, während Fig. 4 die Seitenansicht des Induktors mit der provisorischen Aufwinde-Vorrichtung darstellt. Die in beiden Apparaten an dem unteren Theile der Axe befindlichen Holzscheiben mit der darin angedeuteten Rinne waren ursprünglich zur Aufnahme des Seils ohne Ende bestimmt, durch welches mit Hülfe des

oben erwähnten mechanischen Apparats die Umwendung des Induktors bewerkstelligt werden sollte. Die Art und Weise, wie die Magnetnadel nebst Spiegeln an dem mit Torsionskreis versehenen Kokonfaden befestigt worden ist, zeigt die schematische Zeichnung Fig. 5 in ein Viertel natürlicher Grösse. Der Verschluss des vom Multiplikator umschlossenen Raums, in dem die Nadel hing, wurde durch zwei Holzdeckel bewirkt, in deren Mitte sich zwei durch Plangläser verdeckte Oeffnungen für gleichzeitige Spiegelablesungen an *zwei*, zu beiden Seiten des Multiplikators aufgestellten, Ablesungsfernröhren befanden.[1]) Diese beiden Deckel sind abgenommen und in der perspektivischen Zeichnung auf Taf. IV, Fig. 2, an das Multiplikatorgestell gelehnt dargestellt. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass hierbei alle Erfahrungen, welche bereits vor 40 Jahren gelegentlich der Beobachtungen des „Magnetischen Vereins“ gesammelt und beschrieben worden sind, auch im vorliegenden Falle in eingehender Weise sowohl bei der Konstruktion der Instrumente als auch bei Anordnung der Beobachtungen berücksichtigt worden sind. Zur Temperaturbestimmung waren an der Basis des Multiplikators und Induktors zwei, in Fünftel-Grade Celsius getheilte, Thermometer in vertikaler Stellung angebracht, deren Längsrichtung in die Axe fiel und deren Kugeln möglichst tief in der Holzwandung eingelassen waren. Da im Beobachtungsraum durch passend angebrachte Fenstervorhänge dafür Sorge getragen war, dass kein Theil der Instrumente von direktem Sonnenlichte getroffen werden konnte, so wird man im Allgemeinen bei nicht allzu plötzlichen Temperaturschwankungen die Temperatur des Drahts übereinstimmend mit den Angaben der beiden Thermometer voraussetzen dürfen.

Das Gesammtgewicht der von Siemens & Halske bezogenen Drahtmasse beträgt laut Rechnung 414,95 Kilogramm im Preise von 1487,75 Mark, während sich die Kosten für die von A. Repsold & Söhne angefertigten Apparate laut Rechnung auf 5763 Mark belaufen, welche Summe sich jedenfalls bedeutend reducirt haben würde, wenn der ursprünglich aus den oben S. 433 angeführten Gründen projektirte mechanische Umwendungs-Apparat des Induktors nicht zur Ausführung gekommen wäre.

[1]) Vergl. die auf Taf. IV, Fig. 1 angedeutete Skizze des Grundrisses zur Erläuterung der Aufstellung der Apparate. Die auf Taf. III befindlichen Figuren 1—5 sind verjüngte Kopien der uns von Herrn Repsold eingesandten Originalzeichnungen, welche zur Anfertigung der Apparate von ihm hergestellt und benutzt worden sind. Die in Fig. 1 und 4 Taf. III punktirten Linien bezeichnen die *provisorisch* zur Aufwickelung des Drahts mit dem Gestell verbundenen Theile.

3.

Ein Normalleiter zu elektrodynamischen Messungen nebst Beobachtungen zur Bestimmung seines Widerstands nach absolutem Maasse.

Der Zweck der Einrichtungen, welche hier beschrieben werden sollen, und der damit ausgeführten Beobachtungen betrifft das ganze Gebiet der *elektrodynamischen Messungen*, welches lange Zeit fast nur auf *Strommessungen* beschränkt gewesen, allmählig aber mehr und mehr auch auf *Widerstandsmessungen* und *elektromotorische Kraftmessungen* ausgedehnt worden ist. — Die Entdeckung der Wasserzersetzung durch den elektrischen Strom hatte zur Konstruktion von *Voltametern*, die Entdeckung des Elektromagnetismus zur Konstruktion *elektromagnetischer Galvanometer* (Tangenten- und Sinusboussolen) geführt; die Ohm'schen Gesetze endlich, insbesondere das Gesetz, wonach der Widerstand homogener Leiter dem Verhältniss ihrer Länge zu ihrem Querschnitt proportional ist, bahnten auch den Weg zu *Widerstandsmessungen*, indem darnach z. B. jeder gleichförmige Kupferdraht seiner Länge nach als *Widerstandsskale* dienen konnte.

Auch für die Zurückführung aller dieser Skalen auf dieselbe Einheit oder gleiches Maass, welche Jacobi in Petersburg zuerst angeregt hat, bot sich das einfache Mittel dar, aus einem längeren gleichförmigem Kupferdrahte viele Stücke von gleicher Länge abzuschneiden und damit als Widerstandsmaasseinheiten alle Experimentatoren zu versehen.

Sodann ist die *willkürliche* Wahl dieser Widerstandsmaasseinheit zu beseitigen gesucht worden, und zwar auf verschiedene Weise, nämlich *erstens*, im Auftrag der British Association, von dem dazu berufenen Standard Kommitee, welches aus den ersten wissenschaftlichen Autoritäten dieses Faches zusammengesetzt war, durch Einführung eines Widerstandsmaasses $= 10^{10}$ Einheiten nach dem Systeme der von Gauss eingeführten absoluten Maasse, wobei *Sekunde* und *Millimeter* als Maasseinheiten für Zeit und Länge zu Grunde gelegt werden.

Trotz aller Mühe und Sorgfalt und aller zur Verfügung des von der British Association mit Herstellung dieses unter dem Namen British Association-Einheit bekannten Widerstandsmaasses beauftragten Standard Kommitee gestellten Mittel, hat sich doch aus späteren von Kohlrausch im 6. Ergänzungsbande von Poggendorff's Annalen mitgetheilten genauen und nach besserer Methode ausgeführten Messungen ergeben, dass diese British Association-Einheit nicht 10^{10} Einheiten, sondern $1{,}0196 . 10^{10}$ Einheiten nach dem System der von Gauss eingeführten absoluten Maasse enthält.

Unabhängig davon war *zweitens* auch von Dr. Werner Siemens

in Berlin, um die früher ganz der Willkür überlassene Wahl der Widerstandsmaasseinheit zu beseitigen, die Annahme und Einführung des Widerstands eines Quecksilbercylinders von 1000 Millimeter Länge und einem Quadratmillimeter Querschnitt als Widerstandsmaass befürwortet worden, und es war von ihm dieses Widerstandsmaass mit grosser Genauigkeit und Uebereinstimmung in mehreren Exemplaren wirklich dargestellt worden, sowie auch ganze darnach regulirte *Widerstandsskalen,* welche seitdem für den praktischen Gebrauch höchst wichtig und unentbehrlich geworden sind.

Das Gebiet der *elektrodynamischen Messungen* ist nun aber nicht auf *Strommessungen* und *Widerstandsmessungen* zu beschränken, sondern ist auch auf *elektromotorische Kraftmessungen* zu erstrecken, welche besondere Aufmerksamkeit darum in Anspruch nehmen, weil sie bei grösster Wichtigkeit und Bedeutung der wirklichen genauen Ausführung die grössten Schwierigkeiten entgegensetzen.

Stehen aber auch in den meisten Fällen der direkten Ausführung elektromotorischer Kraftmessungen unüberwindliche Schwierigkeiten entgegen, so giebt es doch einige wenige Fälle, wo diese Kräfte nach *absolutem Maasse* bekannt sind, wenn auch nicht durch *Messung ihrer Wirkungen*, doch aus der *Kenntniss ihrer Ursachen*, z. B. die elektromotorischen Kräfte, welche der *Erdmagnetismus auf ein geschlossenes Solenoid* von bekannten Dimensionen ausübt, welches um eine bestimmte Axe mit bestimmter Geschwindigkeit gedreht wird.

In diesen besonderen Fällen wirklich darstellbarer *elektromotorischer Kräfte von bekannter Grösse* können nun ferner auf galvanometrischem Wege auch die von diesen Kräften im Solenoide *inducirten Ströme* gemessen werden, und die in diesem Falle erworbene Kenntniss, sowohl der *elektromotorischen Kraft* als auch des dadurch im Solenoide inducirten *Stroms*, führt nach dem bekannten Ohm'schen Gesetze zur Kenntniss des *Solenoid-Widerstands*, welcher nach diesen Gesetzen durch das *Verhältniss jener Kraft zu diesem Strome* bestimmt, nach absolutem Maasssystem diesem Verhältnisse gleich ist, worauf eben die *Widerstandsmessung nach absolutem Maasse* beruht.

Ist nun aber auf diese Weise in diesem besonderen Falle der *Solenoidwiderstand* nach absolutem Maasse bekannt und bleibt derselbe auch (bei unveränderter Temperatur des Solenoids) konstant der nämliche, so leuchtet ein, dass nun, auf dem Wege *galvanometrischer Messung, alle* (von den verschiedensten, auch ganz unbekannten elektromotorischen Kräften) *in diesem Solenoide erregten Ströme* gemessen werden können, und dass aus der Kenntniss dieser *Ströme,* in Verbindung mit der früher erworbenen Kenntniss des *Solenoidwiderstands,* nach dem nämlichen Ohm'schen Gesetze, die Kenntniss aller *unbekannten*

auf das Solenoid wirkenden elektromotorischen Kräfte gewonnen werden kann, von welchen jene Ströme erregt worden sind.

Diese *Methode, zur Kenntniss elektromotorischer Kräfte zu gelangen,* ist von grösster Wichtigkeit und Bedeutung, weil sie die einzige ist für *alle elektromotorischen Molekularkräfte,* die nämlich, wie alle Molekularkräfte, nur aus ihren Wirkungen bestimmt werden können.

Da aber *nur nach absoluten Maassen* das Verhältniss der elektromotorischen Kraft zur Stromstärke mit dem Leitungswiderstande als *identisch* gegeben ist, so müssen für diese Bestimmungsweise elektromotorischer Kräfte die Ströme sowohl als auch die Leitungswiderstände *nach absolutem Maass* gegeben sein. Alle Widerstandsbestimmungen nach anderen Maassen, z. B. nach Jacobi's Kupferdraht oder nach Siemens' Quecksilbereinheit oder selbst auch nach der British Association-Einheit, bedürfen daher zu diesem Zwecke der Reduktion auf *absolutes Maass.* Und diese Reduktionen müssen (wie es beim Gebrauch der Uhren zum Zweck der Zeitmessung geschieht) immer wieder von Neuem geprüft und berichtigt werden, wenigstens so lange man keine *vollkommen unveränderlichen Leiter* besitzt.

Wollte man dagegen einwenden, dass ganz das Nämliche, was hiernach von Widerstandsbestimmungen gefordert werde, mit gleichem Rechte auch von anderen Grössenbestimmungen nach absoluten Maassen zu fordern sein würde, z. B. von *Längenmessungen nach dem Meter, als 10 000 000. Theil des Erdquadranten,* so würde zu erwidern sein, dass in der That bei wichtigen und genauen Längenbestimmungen nach diesem Maasse, in Fällen, wo dessen Verhältniss zum Umfang der Erde wesentlich in Betracht kommt, nicht schlechtweg auf seine Bestimmung aus früheren Beobachtungen, die gegenwärtig blos auf Treu und Glauben angenommen werden können, gebaut werde, sondern dass diese früheren Beobachtungen durch neuere Beobachtungen geprüft und nur dann ungeändert zugelassen werden, wenn sie dadurch bestätigt gefunden worden sind. Nur ist die Ausführung solcher Prüfungen, wenn keine besonderen Einrichtungen dafür getroffen sind, so schwierig, dass sie nur selten mit Erfolg bewerkstelligt werden kann.

Es ergiebt sich daraus, dass es von grösster Wichtigkeit ist, Einrichtungen zu treffen, welche es möglich machen und möglichst erleichtern, frühere Beobachtungen, auf denen die Feststellung und Darstellung der Maasse beruhte, durch spätere Beobachtungen *jederzeit prüfen und bestätigen oder berichtigen* zu können.

Solche Prüfungen und Bestätigungen oder Berichtigungen werden nun bei Zeitmessungen, wenn sie höheren wissenschaftlichen Zwecken dienen, wirklich immer angewandt, weil man sich nicht auf das auch durch die vollkommensten Uhren gegebene Zeitmaass und auf die zu

seiner Bestimmung früher gemachten Beobachtungen verlässt, sondern zum Zwecke der neu auszuführenden Messungen immer neue Beobachtungen zur Prüfung des Ganges der Uhren macht.

Solche Prüfungen und Bestätigungen oder Berichtigungen lassen sich nun mit Widerstands-Etalons, wie sie auf Veranstaltung der British Association dargestellt worden sind, unmittelbar gar nicht ausführen, und auf mittelbaren Wegen würde, abgesehen von grösserer Arbeit, die Prüfung leicht an Genauigkeit so viel verlieren, dass sie zum Zweck der neu auszuführenden Messungen gar keinen oder nur geringen Vortheil darböte. Es würde sich mit dieser Prüfung ähnlich verhalten, wie wenn der ursprüngliche, im französischen Staatsarchive niedergelegte *Meter-Etalon* oder eine Kopie desselben, einer Prüfung durch neue Beobachtungen unterworfen werden sollte, ob derselbe wirklich dem 10 000 000. Theile des Erdquadranten gleich sei — eine Prüfung, die schwer auszuführen sein würde.

Sollte nun nicht auf Treu und Glauben und auf Unveränderlichkeit des *Meter-Etalons* gebaut werden, sondern sollte die Prüfung und Bestätigung für diese Längenmaassbestimmung durch neue Beobachtungen jederzeit offen erhalten werden, so leuchtet ein, dass zur Erreichung dieses Zwecks doch jedenfalls freistehen würde, statt der festgesetzten Maasseinheit des *Meters* selbst, irgend eine andere aber genau nach dieser Maasseinheit bestimmte Grösse als *Normallänge* aufzustellen, wenn dadurch eine Vereinfachung und Erleichterung der immer wiederholt auszuführenden Prüfungen gewonnen werden könnte, was z. B. der Fall sein würde, wenn von allen zu den geodätischen Vermessungen gebrauchten *Dreieckseiten* eine solche gefunden und mit solchen Einrichtungen versehen werden könnte, dass sie *erstens* mit jeder beliebigen Längenskala jederzeit genau gemessen und diese Messung jederzeit mit gleicher Genauigkeit wiederholt werden könnte, und dass *zweitens* beliebige neue zur Grössen- und Gestaltbestimmung der Erde dienende *Triangulationen* mit ihr verbunden werden könnten. Durch solche neue Triangulationen würde nämlich die ursprüngliche Bestimmung der Dreieckseite in Meterzahl wiederholt und dadurch jederzeit von Neuem geprüft werden können, während durch die Messung der Dreieckseite mit beliebigen Skalen es möglich werden würde, jede mit diesen Skalen messbare Länge in Theilen der Dreieckseite und folglich auch in Metern zu bestimmen.

Auf gleiche Weise braucht nun zur Begründung genauer *Widerstandsmessungen nach absolutem Maasse* das festgesetzte Maass keineswegs selbst dargestellt zu werden, sondern es genügt jede beliebig getheilte Widerstandsskala, mit welcher der Widerstand eines *Normalleiters* genau verglichen und gemessen werden kann.

Unter einem Normalleiter verstehen wir aber einen Leiter, dessen Widerstand nach absolutem Maasse genau bestimmt worden ist und jederzeit mit gleicher Genauigkeit wieder bestimmt werden kann.

Die an einen solchen *Normalleiter* gestellte Forderung aber, dass nämlich sein Widerstand nach absolutem Maasse genau bestimmt worden sei und jederzeit mit gleicher Genauigkeit wieder bestimmt werden könne, setzt nun voraus, dass dieser *Normalleiter mit Einrichtungen zu genauen absoluten Widerstandsmessungen versehen sei.* Zugleich leuchtet vom praktischen Gesichtspunkte ein, dass nicht blos die *Genauigkeit*, mit welcher diese Widerstandsmessung des *Normalleiters* ausgeführt werden könne, sondern auch die Einfachheit der Beobachtungen und die zu ihrer Ausführung erforderliche Zeit wesentlich in Betracht komme.

Für die Wahl und Einrichtung eines solchen *Normalleiters* kommt daher zunächst die Wahl der zu Messung seines Widerstands anzuwendenden *Methode* in Betracht. F. Kohlrausch hat nun in einer im Jahre 1874 im 6. Ergänzungsbande von Poggendorff's Annalen erschienenen klassischen Arbeit („Zurückführung der Siemens'schen galvanischen Widerstandseinheit auf absolutes Maass"), welche die genauesten bisher ausgeführten absoluten Widerstandsbestimmungen enthält, vier verschiedene Methoden der absoluten Widerstandsmessung angeführt. Alle diese vier Methoden haben mit einander gemein, dass ein *Leiter* verlangt wird, der als Induktor und auch als Multiplikator dient, entweder indem ein Theil desselben den Induktor bildet, ein anderer Theil den Multiplikator, oder indem der ganze Leiter beiden Zwecken zugleich dient.

Von diesen vier Methoden möge hier blos erwähnt werden, dass nach Verschiedenheit der Verhältnisse bald die eine, bald die andere den Vorzug verdienen kann, dass aber unter Verhältnissen, die keine Beschränkung in den zu wählenden Mitteln auferlegen, die *erste* Methode ihrer Einfachheit und der grösseren, durch sie erreichbaren Genauigkeit wegen vor allen anderen den Vorzug verdiene, bisher aber aus Mangel an Mitteln noch niemals in Anwendung gekommen ist. Da nun vorausgesetzt werden darf, dass, wo sichere Begründung absoluter Widerstandsmessungen ernstlich ins Auge gefasst wird, die Beschaffung der Mittel zu genauester Ausführung kein Hinderniss oder Bedenken finden werde, so dürfen wir zu unserem Zwecke uns hier auf die Betrachtung dieser *ersten* Methode beschränken, von welcher Kohlrausch sagt:

„Die erste [Methode] benutzt die durch den Erdmagnetismus in einem bewegten Leiter von bekannten Dimensionen (Erdinduktor) inducirte elektromotorische Kraft und findet die Stromstärke durch die Ausschläge einer kurzen Magnetnadel innerhalb eines Multiplikators von ebenfalls bekannten Dimensionen. Verlangt ist ausserdem nur die

Schwingungsdauer der Nadel, nicht etwa die erdmagnetische Intensität, da diese sich heraushebt. Erforderlich ist aber, dass die Nadel kurz sei gegen den Durchmesser des Multiplikators. Entweder also müssen die *Beobachtungen an einer kleinen Nadel angestellt* werden, oder *der Multiplikator ist in sehr bedeutenden Dimensionen auszuführen.*“[1])

Für den oben verlangten *Normalleiter* geht hieraus hervor, dass er in Form eines *Induktors* und *Multiplikators* von sehr grossen Dimen-

[1]) Zur näheren Erläuterung dieser Methode diene folgende Ableitung derselben aus der bekannten Theorie der *Tangentenboussole.*

Ein in der Richtung des magnetischen Meridians fest aufgestellter kreisförmiger Leiter von grossem Durchmesser (der mehrere Umwindungen haben kann) mit kurzer Nadel in seinem Mittelpunkte bildet ein *Galvanometer*, welches mit dem Namen der *Tangentenboussole* bezeichnet worden ist.

Der durch den kreisförmigen Leiter der Tangentenboussole gehende Strom i übt auf den Nadelmagnetismus m ein Drehungsmoment $= 2ami$ aus, wo a den Quotienten der umströmten Fläche $n\pi r^2$ dividirt durch den Kubus der für alle Stromelemente gleichen Entfernung r vom Nadelmittelpunkte bezeichnet, also $a = n\pi/r$ ist, wo n die Zahl der Umwindungen bezeichnet, und ertheilt der das Trägheitsmoment k besitzenden Nadel in der Zeit dt die Drehungsgeschwindigkeit dC:

$$dC = 2\frac{am}{k} \cdot idt = 2\frac{n\pi}{r} \cdot \frac{m}{k} \cdot idt.$$

Ist nun i der von einer elektromotorischen Kraft e in dem geschlossenen Leiter (zu welchem der Kreis der Tangentenboussole gehört) erzeugte Strom und w der Widerstand des Leiters, und sind i, e, w nach absoluten Maassen bestimmt, so ist $i = e/w$ und folglich

$$dC = 2\frac{n\pi}{r} \cdot \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{w} edt,$$

folglich

$$C = 2\frac{n\pi}{r} \cdot \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{w}\int edt.$$

Kann nun ein Induktionsstoss mit einem Erdinduktor in sehr *kurzer* Zeit, die nur einen kleinen Theil der Schwingungsdauer bildet, ausgeführt werden, und bezeichnet $\frac{1}{2}p$ die Grösse der vom Induktor umwundenen Fläche, so ist bekanntlich für einen solchen Induktionsstoss, wenn T den inducirenden (z. B. horizontalen) Erdmagnetismus bezeichnet,

$$\int edt = pT,$$

folglich

$$C = 2\frac{n\pi}{r} \cdot \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{w} \cdot pT,$$

worin $mT/k = \pi^2/\tau^2$ nach bekanntem Schwingungsgesetze ist, wenn τ die auf unendlich kleine *Bögen, Dämpfung* und *Torsion* reducirte Schwingungsdauer bezeichnet, also $w = 2\,[n\pi p/r]\,.\,[\pi^2/C\tau^2]$, oder, wenn $2\,[n\pi/r] = q$ gesetzt wird:

$$w = \pi^2 \cdot \frac{pq}{C\tau^2}.$$

sionen dargestellt werden müsste, wenn die Messung seines Widerstands nach der ersten, dem Zwecke am besten entsprechenden, Methode ausgeführt werden soll.

Ohne auf eine nähere *Motivirung* der zweckmässigsten Konstruktion eines solchen *Normalleiters* im Allgemeinen einzugehen, beschränken wir uns hier auf eine *Beschreibung* desselben, wie er zum Zweck der näher zu beschreibenden Beobachtungen wirklich ausgeführt und im Jahre 1878 in Leipzig, im Lokal der alten Sternwarte auf der Pleissenburg aufgestellt worden ist.

Der *Normalleiter* ist so konstruirt worden, dass man eine *genau messbare elektromotorische Kraft* auf ihn wirken lassen kann, und dass durch diese Kraft ein *genau messbarer elektrischer Strom* darin inducirt werde, um aus dem Verhältniss jener Kraft zu diesem Strome die Kenntniss seines *Widerstands* zu gewinnen.

Es würde nun freistehen, *entweder* den *Normalleiter* in zwei Theile zu scheiden, nämlich den *ersten*, auf welchen die *elektromotorische Kraft* wirkt, und den *zweiten*, von wo aus der hindurchgehende inducirte Strom die zu messende Wirkung ausübt, *oder* es würde auch freistehen, den *ganzen* Leiter zu benutzen, sowohl um darauf die *elektromotorische Kraft* wirken zu lassen, als auch um von da aus durch den Strom die messbare Wirkung zu erregen.

Die *erste* dieser beiden Alternativen führt zu den von Kohlrausch angeführten Methoden No. 1 und No. 2, von denen Kohlrausch die letztere zu seinen Messungen und wir die erstere gewählt haben. Die *zweite* Alternative führt zu den von Kohlrausch angeführten Methoden No. 3 und No. 4, von denen die letztere von der British Association angewandt worden ist.

Wir scheiden also den *Normalleiter* in zwei Theile, von denen wir den einen, auf welchen die *elektromotorische Kraft* wirkt, den *Induktor*, den anderen, welcher zur Messung des inducirten durch den ganzen Leiter gehenden Stroms dient, den *Multiplikator* nennen.

Ferner übersieht man leicht, dass sowohl zum *Induktor* als *Multiplikator* aus einem Drahte gewundene *Solenoide* zu nehmen sind, deren elektrische Ströme als Systeme paralleler Kreisströme bei Berechnung ihrer Wirkung betrachtet werden dürfen. Solche Solenoide sind, wie bekannt, für einen *Erdinduktor* sowohl als auch für den *Multiplikator einer Tangentenboussole* die angemessenste Form.

Ferner ist bekannt, dass, wenn der *Induktor* und der mit dem Leiter zu füllende *Raum des Multiplikators* gegeben wäre, für die Strommessung es am vortheilhaftesten sein würde, den *Widerstand des Multiplikators dem des Induktors gleich* zu machen.

Was endlich die *Grösse des Induktors betrifft*, so würde zwar mit

derselben, auch bei einem gegebenen Widerstande des Multiplikators, die *elektromotorische Kraft* immer wachsen, doch muss der Grösse des Induktors eine Grenze gesetzt werden, damit die Induktionsstösse schnell genug und ohne Erschütterung ausgeführt werden können, was der Präcision und guten Uebereinstimmung der Beobachtungen wegen nothwendig ist.

Aus der Erfahrung hat sich ergeben, dass zum Zweck präciser Ausführung der Induktionsstösse das Gewicht eines Solenoids bei etwa 1000 Millimeter mittlerem Durchmesser seiner Umwindungen nicht über 200 Kilogramm betragen darf. Die *Stärke* des zum Normalleiter zu wählenden Kupferdrahts ist verschieden nach Grösse des *Widerstands*, für welchen die genauesten Maassbestimmungen verlangt werden. Wird dieser Widerstand auf ungefähr 10 Siemens'sche Quecksilbereinheiten, oder 10 British Association-Einheiten oder 10^{10} absolute Maasseinheiten angenommen, wovon die Hälfte auf den Induktor käme, so würde zum Induktor Kupferdraht von etwa $3\frac{1}{3}$ Millimeter Dicke zu wählen sein.

Ebenso ist der Grösse des Multiplikators eine Grenze gesetzt, welche bei gegebenem Widerstande nicht überschritten werden darf, um eine für genaue Messungen hinreichend grosse Galvanometer-Empfindlichkeit zu erlangen.

Die beiden als Induktor und Multiplikator dienenden Solenoide sollen also *gleichen Widerstand* besitzen und dürfen beide an Grösse gewisse Grenzen nicht überschreiten; bei gleicher Drahtstärke ergiebt sich daraus leicht als das zweckmässigste, beide *ganz gleich* zu machen, so dass also der ganze *Normalleiter* in zwei vom *Induktor* und *Multiplikator* gebildete ganz gleiche und symmetrische Hälften zerfällt.

Es wird später näher betrachtet werden, welche Vortheile diese Symmetrie der beiden Solenoide, nämlich des Induktors und Multiplikators, gewährt.

Die *Walzen,* auf welche diese beiden Solenoide aufgewunden sind, dürfen keine Spur von Eisen oder anderen magnetischen Stoffen enthalten und müssen so beschaffen sein, dass sie leicht gedreht und dadurch in jede beliebige Lage gebracht werden können. Es gilt dies besonders von dem zum Induktor bestimmten Solenoide, zum Zwecke der schnell damit auszuführenden *Induktionsstösse.* Bei der Grösse dieser Walzen ist *Holz* wegen seines geringen specifischen Gewichts und wegen seiner bei guter Auswahl und Behandlung grossen Festigkeit und Unveränderlichkeit als das dazu geeignetste Material gewählt worden, und zwar altes Mahagoniholz, in kleinen Stücken und verschiedenen Lagen sorgfältig zusammengeleimt.

Auf diese Weise sind für den *Induktor* und *Multiplikator* zwei ganz gleiche hohle Holzcylinder von 1100 Millimeter Durchmesser und

350 Millimeter Höhe gebildet worden. Die Höhlung zerfällt in eine innere von 638 Millimeter Durchmesser, welche durch den ganzen Holzcylinder durchgeht, also 350 Millimeter tief ist, und in eine ringförmige, welche von der äusseren Cylinderfläche aus 70 Millimeter tief eingedreht ist, 254 Millimeter Breite hat und bis zu 40 Millimeter Höhe von den Drahtwindungen eingenommen und ausgefüllt ist.

An zwei diametral gegenüberliegenden Stellen sind nach Aufwindung des Drahtes zwei hölzerne Bügel mit der Holzwalze fest verbunden worden, von denen der *eine* einen hohlen Zapfen trägt, durch welchen die beiden Enden des aufgewundenen Drahtes von der Walze nach aussen geführt werden, der *andere* einen massiven, am Ende mit einer Messingspitze versehenen Zapfen trägt, und mit dieser Spitze bei Aufstellung des Solenoids auf einem massiven Holzgestelle in eine daran angebrachte Pfanne zu stehen kommt, so dass das ganze Solenoid um eine durch diesen festen Stützpunkt gehende Vertikalaxe gedreht werden kann. (Vergl. Taf. III, Fig. 3 und Taf. IV, Fig. 2.)

Das feste Gestell umgiebt rahmenförmig das ganze Solenoid. Am Boden dieses festen Gestells befindet sich die schon erwähnte Pfanne, worin das Solenoid mit der Messingspitze seines nach unten gekehrten festen Zapfens aufsteht, während das Holzgestell oben über dem Solenoide mit einer runden Oeffnung versehen ist, durch welche der hohle am Solenoid angebrachte Holzzapfen (durch welchen die beiden Enden des aufgewundenen Drahtes vom Solenoid nach aussen geführt werden) frei drehbar hindurchgeht. Von diesen beiden mit dem Solenoid fest verbundenen Zapfen wird eine vertikale Drehungsaxe des Solenoids gebildet und das feste Holzgestell ist ausserdem mit Einrichtungen versehen, um diese Drehungsaxe, wenn sie aus der vertikalen Richtung gewichen wäre, genau wieder einzustellen.

Alle diese Einrichtungen sind für *beide Solenoide* ganz gleich; eine Verschiedenheit findet zwischen ihnen nur darin Statt, dass *erstens* am Holzgestelle des *Induktors* noch besondere Hemmungen angebracht sind, um die Drehung desselben bei einem Induktionsstosse genau auf einen Halbkreis zu beschränken, und zwar in solcher Weise, dass bei jeder Hemmung die Induktoraxe mit dem magnetischen Meridiane genau zusammenfällt. Die Art, wie diese Hemmung bewerkstelligt wird, ist von keiner wesentlichen Bedeutung und bedarf daher keiner näheren Beschreibung.

Zweitens aber findet ein anderer viel wesentlicherer Unterschied zwischen beiden Solenoiden darin Statt, dass das Multiplikator-Solenoid, zum Zweck der Ergänzung zum Galvanometer, ein Magnetometer umschliesst, welches zu dem hier vorliegenden Zwecke eine besondere Ein-

richtung erhalten musste, die einer genaueren Beschreibung bedarf. (Vergl. Taf. III, Fig. 5.)

Zu *absoluten Messungen der Stromintensität*, wie sie zu absoluten Widerstandsmessungen erfordert werden, darf nämlich, wie aus der Konstruktion der Tangentenboussole schon bekannt ist, die Länge der Magnetometernadel nur einen kleinen Bruchtheil vom Durchmesser der Multiplikatorwindungen betragen, z. B. bei einem mittleren Durchmesser der letzteren von 1000 Millimeter nur etwa 100 Millimeter. Eine solche Nadel, stark magnetisirt und an einem Kokonfaden aufgehangen, würde nun aber eine sehr kurze Schwingungsdauer haben, etwa von 4 Sekunden, und da die zu den beabsichtigten Versuchen erforderlichen Induktionsstösse in einem nur kleinen Bruchtheile dieser Schwingungsdauer ausgeführt werden sollen, z. B. nur im 10. Theile derselben, so würde die bei der Schwere des Induktors ungefähr 2 Sekunden erfordernde Ausführung nicht möglich sein.

Es ist daher die Einrichtung getroffen worden, dass die 100 Millimeter lange Nadel (ein gehärteter Stahlcylinder von 10 Millimeter Durchmesser und 100 Millimeter Länge) nicht unmittelbar am Faden hängt, sondern dass der Faden ein Schiffchen trägt, worauf die Nadel gelegt werden kann, und an diesem Schiffchen ist horizontal und rechtwinkelig gegen die Nadel eine dünne Messingröhre befestigt, welche an ihren Enden zwei parallele und vertikale Planspiegel, in einem Abstande von 272 Millimeter von einander, trägt. Die Schwingungsdauer der Nadel wurde dadurch etwa bis auf 30 Sekunden verlängert und dadurch hinreichende Zeit zu präcisester Ausführung der Induktionsstösse und aller damit zu verbindenden Beobachtungen gewonnen.

Statt der 100 Millimeter langen Nadel konnte aber in das Schiffchen auch eine 200 Millimeter lange Nadel eingelegt werden, deren Schwingungsdauer nur etwa 17 Sekunden betrug, und auch damit liessen sich bei einiger Uebung die Induktionsstösse und alle Beobachtungen mit aller erforderlichen Genauigkeit ausführen. Der zwar geringe, aber messbare Einfluss, den die grössere Nadellänge bei gegebenem Multiplikatordurchmesser nach diesen Beobachtungen auf die *Widerstandsbestimmung* hatte, liess sich dann, wie man leicht sieht, zu einer Korrektion wegen Nadellänge auch für den mit 100 Millimeter langer Nadel erhaltenen Widerstand benutzen, um den Einfluss der Nadellänge auf das Resultat der Messung möglichst ganz auszuschliessen.

Die Beobachtungen der durch Induktionsstösse hervorgebrachten Nadelelongationen wurden sodann gleichzeitig mit *zwei mit Skalen versehenen Ablesungsfernröhren* gemacht, die in den entgegengesetzten Richtungen der beiden Spiegelnormalen, jedes in etwa 4000 Millimeter

Abstand vom zugehörigen Spiegel, aufgestellt waren. (Vergl. Taf. IV, Fig. 1.)

Abgesehen davon, dass die mit beiden Fernröhren zugleich gemachten Beobachtungen einander wechselseitig kontrolirten, wodurch jedem Irrthume vorgebeugt wurde, bot diese Einrichtung noch den grossen Vortheil dar, dass die Bestimmung des Winkelwerths der Skalentheile unabhängig gemacht wurde von der Messung des *Horizontalabstands des Spiegels von der Skale*, welche bei der grossen Beweglichkeit des mit der immer in Schwingung befindlichen Nadel verbundenen Spiegels sehr grosse Schwierigkeiten findet. Bei dieser neuen Einrichtung bedurfte es nur der Messung des Horizontalabstands der beiden festen und einander parallelen Skalen und des Abstands der beiden ebenfalls mit einander fest verbundenen parallelen Spiegel, die beide mit grösster Genauigkeit leicht ausgeführt werden konnten.

Die Aufhängung des *Nadelschiffchens* an einem Kokonfaden mittelst *Torsionskreises*, und die Einrichtung zum Heben und Senken der Nadel, um ihren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des Multiplikators genau zusammenfallen zu lassen, wie sie auch bei anderen Magnetometern gebräuchlich sind, bedürfen keiner näheren Beschreibung. Es bleibt nur noch hinzuzufügen übrig, dass der vom Multiplikator umschlossene Raum, in dessen Mitte die Nadel hing, von Osten und Westen mit zwei Holzdeckeln verschlossen werden konnte, in deren Mitte zwei grosse kreisrunde Plangläser eingesetzt waren, durch welche hindurch die Spiegelbilder der beiden Skalen mit den beiden Ablesungsfernröhren sich beobachten liessen. (Vergl. Taf. IV, Fig. 1.)

Was nun die Ausführung dieses eben beschriebenen *Normalleiters* und des damit verbundenen *Magnetometers* betrifft, so verdanken wir dieselbe theils der besonderen Güte und Freundlichkeit, womit Herr Dr. Werner Siemens in Berlin die Auswahl und die Lieferung des übersponnenen Kupferdrahtes übernommen und für vollkommene Ausführung ganz in der gewünschten Weise gesorgt hatte, theils den Herren Gebrüder Repsold in Hamburg, welche nicht blos die beiden *Walzen*, auf welchen der Draht aufgewickelt werden sollte, nebst dem *Magnetometer* und allen Einrichtungen zum Zwecke der Aufwickelung des Drahtes und der Zählung der Umwindungen ausgeführt hatten, sondern auch die in Leipzig zu bewerkstelligende Aufwickelung des Drahtes und Aufstellung des ganzen Apparats im Lokal der alten Sternwarte auf der Pleissenburg übernommen hatten.

Abgesehen von den dabei getroffenen besonderen Vorkehrungen, um den Draht beim Aufwickeln immer gleichgespannt zu erhalten, und die Möglichkeit eines Irrthums bei Zählung der Umwindungen, durch die Kontrole eines mit der Walze verbundenen zuverlässigen Zählers, ganz

auszuschliessen, bleiben noch die besonderen Einrichtungen hervorzuheben, welche getroffen worden waren, um den aufgewundenen Draht auch wieder von der Walze *abwinden* und mit gleicher Sorgfalt und Genauigkeit neu aufwinden zu können.

Zu den *Elementen*, welche nämlich zur Widerstandsbestimmung des *Normalleiters* nach absolutem Maasse gebraucht werden, gehören auch *zwei Elemente*, deren Bestimmung nothwendig theils vor, theils während der Aufwickelung des Normalleiters auf die Induktor- und Multiplikatorwalze gemacht werden muss, weil sie am fertigen Induktor und Multiplikator nicht mehr gemacht werden kann. Diese Elemente sind *erstens* die Peripherie jeder Walze *ohne Draht*, vorausgesetzt, was sich leicht prüfen lässt, dass die Walze wirklich genaue Cylinderform habe; *zweitens* die Zahl der übereinander gewickelten Windungsschichten und die Zahl der Umwindungen jeder Schicht.

Die Cylinderform der Walze, ehe der Draht darauf gewunden wurde, liess sich durch Messung des Umfangs an verschiedenen Stellen sehr leicht prüfen, wonach die Drahtlänge aller Umwindungen der ersten oder untersten Schicht sich gleich ergab. Aber auch nach Aufwindung des ganzen Drahts ergab sich der vergrösserte Umfang ebenfalls überall so gleich, dass die Drahtlänge auch aller Umwindungen der letzten Schicht und jeder zwischenliegenden als gleich angenommen werden durfte. Hiernach genügen zum Zwecke der absoluten Widerstandsmessung von solchen Bestimmungen, deren Kenntniss nur vor oder während der Aufwickelung des Drahtes genommen werden kann, folgende zwei: nämlich *erstens* die Kenntniss des Umfangs der Walze *ohne Draht*, und *zweitens* die Kenntniss der Zahl der Schichten übereinander nebst der Zahl der Umwindungen jeder Schicht.

Aber diese beiden Bestimmungen müssten nun bei allen künftigen Messungen immer auf Treu und Glauben angenommen werden, wenn das Solenoid niemals wieder von der Walze abgewickelt und von neuem aufgewickelt werden könnte, was so viel heisst, als dass *keine künftige* Widerstandsmessung des *Normalleiters* ganz vollständig und unabhängig von der *ersten* Messung würde ausgeführt werden können.

Um nun die völlige Unabhängigkeit künftiger Messungen von der ersten Messung, welche mit Aufwindung des *Normalleiters* auf beide Walzen verbunden war, zu ermöglichen, was wünschenswerth erschien, auch wenn noch so wenig Grund vorlag, an der Richtigkeit jener beiden bei Aufwindung des Normalleiters auf die beiden Walzen gewonnenen Bestimmungen zu zweifeln, mussten Einrichtungen getroffen werden, den *Normalleiter* von den beiden Walzen nach Belieben auch wieder abwickeln und von neuem aufwickeln zu können. Auch hierzu sind von den Herren Repsold die S. 435 beschriebenen, Taf. III, Fig. 1 und 2 dar-

gestellten Einrichtungen getroffen worden, deren Anwendung zur Abwickelung wie zur Aufwickelung keiner weiteren Erläuterung bedarf.

Ausser dem hier beschriebenen *Normalleiter* und seinen beiden Theilen, nämlich dem *Induktor* und *Multiplikator*, nebst dem dazu gehörigen *Magnetometer* und mit Skalen versehenen Ablesungsfernröhren kommen endlich nun noch die zu absoluten Widerstandsbestimmungen nothwendigen *Maasse und Messinstrumente* im engeren Sinne in Betracht, welche der Natur des zu messenden Gegenstands nach, der bekanntlich mit einer *Geschwindigkeit* homogen ist, sich müssen auf blosse *Zeit- und Längen-Messinstrumente* zurückführen lassen.

Diese Beschränkung auf *Zeit-* und *Längenmaass* nicht blos beim Ausspruch des *Resultats* der Widerstandsmessung, sondern auch bei allen dazu führenden *Messungsoperationen*, zeichnet nun die *erste* von den vier von KOHLRAUSCH angeführten, schon oben erwähnten Methoden absoluter Widerstandsmessung besonders aus, die aus diesem Grunde und wegen der darauf beruhenden grösseren Einfachheit und erreichbaren Genauigkeit den Vorzug vor den anderen Methoden verdient und daher von uns zur Widerstandsmessung des *Normalleiters* gewählt worden ist.

Was nun das *Zeitmaass* und die *Zeitmessungen* betrifft, so braucht blos bemerkt zu werden, dass dafür bei allen hier zu beschreibenden Beobachtungen durch die Mitwirkung des Herrn Dr. WEINEK, erstem Assistenten der neuen Sternwarte in Leipzig, in vollkommenster Weise gesorgt war, da ihm dazu alle Hülfsmittel dieses reich ausgestatteten Instituts zu Gebote standen. Alle Zeitbestimmungen bei unseren Messungen sind von Herrn Dr. WEINEK mit einem vorzüglichen der Sternwarte gehörigen Chronometer gemacht worden, dessen Gang von ihm genau bestimmt und regulirt war.

Es ist durch diese von Seiten der neuen Sternwarte geleistete Mitwirkung die Ausführung aller bisherigen absoluten Widerstandsmessungen des auf der alten Sternwarte aufgestellten *Normalleiters* ausserordentlich erleichtert und befördert worden.

Anders verhält es sich mit den *Längenmessungen*, für welche die feinsten und genauesten Instrumente, wie sie der definitiven Ausrüstung eines solchen Messungen gewidmeten Instituts entsprechen würden, zu beschaffen bisher noch nicht möglich gewesen ist. Für die ersten Probeversuche genügten aber auch schon die gebräuchlichsten theils vorhandenen, theils leicht zu beschaffenden Mittel, womit hier das Wesentlichste und Nothwendigste ebenso erreicht werden konnte, wie es früher auch bei den absoluten Messungen des *Erdmagnetismus* geschehen ist. Es kam hinzu, dass die ersten Versuche mit dem hergestellten *Normal-*

leiter nebst Magnetometer nicht so lange verzögert werden sollten, bis alle wünschenswerthen Einrichtungen für die Längenmessungen ganz vollendet wären; schon darum nicht, weil man die daran zu stellenden Forderungen erst aus den zu machenden Erfahrungen genau und vollständig kennen lernen wollte.

Es wurde demnach für genügend erachtet, allen zu den hier folgenden Widerstandsmessungen erforderlichen Längenbestimmungen zwei genau übereinstimmende, bei Triangulationen gebrauchte, der Leipziger Sternwarte gehörige, hölzerne Doppelmeter, welche mit einer sorgfältig ausgeführten Theilung in Millimeter versehen waren, zu Grunde zu legen.

Ausserdem wurden von Mahagoniholz zwei Messstangen, jede von 4 Meter Länge, hergestellt, welche in einer 4 Meter langen hölzernen Rinne neben einander lagen, während ein gleicher dritter Stab als Decke darüber gelegt wurde. Die beiden ersten Stäbe liessen sich dann nach entgegengesetzten Seiten aus der Rinne halb herausschieben, so dass sie in der Mitte der Rinne sich eben noch berührten, ihre Endflächen also 8 Meter von einander entfernt waren; der dritte Stab diente dazu, sie in einer geraden Linie in der Rinne zu erhalten. An den beiden 8 Meter von einander entfernten Enden beider Stäbe waren endlich zwei kleine in Millimeter getheilte Elfenbeinstäbchen eingelassen, die sich sehr leicht in der Richtung der Messstangen verschieben liessen und eine genau messbare Verlängerung des 8 Meter grossen Abstands bildeten.

Man sieht leicht ein, dass, wenn die 4 Meter lange Rinne mit diesen Maassstäben, nach Abhebung der beiden Deckel vom Multiplikator, so aufgestellt wurde, dass sie durch den Multiplikator hindurch mit den herausgeschobenen Elfenbeinschiebern bis nahe an die beiden parallelen Skalen der Ablesungsfernröhre reichte, eine wirkliche gleichzeitige Berührung beider Skalen mit den leicht beweglichen Elfenbeinschiebern sehr leicht herzustellen war, wodurch der Abstand der Skalen mit einer für den vorliegenden Zweck vollkommen genügenden Genauigkeit gemessen wurde.

Die Messung des Abstands der beiden zum Magnetometer gehörigen parallelen, durch eine Messingröhre fest verbundenen Planspiegel von einander war noch leichter auszuführen und bedarf keiner besonderen Erläuterung.

Die Zweckmässigkeit der Scheidung des *Normalleiters in zwei gleiche Theile,* nämlich in den *Induktor* und *Multiplikator*, leuchtet bei Ausführung der Widerstandsmessung besonders daraus ein, dass die Bestimmung des Widerstands dadurch abhängig gemacht wird von 4 *Elementen,* von denen das *erste p blos vom Induktor*, das *zweite q blos vom Multiplikator* abhängt, die beide konstant sind und unabhängig von einander aus den bei Konstruktion des Induktors und Multiplikators aus-

zuführenden Messungen bestimmt werden, während das *dritte* und *vierte* Element, nämlich die Schwingungsdauer T der Magnetometernadel und die durch *einen Induktionsstoss* der Magnetometernadel vom Induktor ertheilte Drehungsgeschwindigkeit C, wegen ihrer Abhängigkeit vom *Magnetismus* der Nadel und der Erde, sowie von der *Temperatur des Normalleiters* variable Grössen sind, welche *bei jeder Widerstandsmessung besonders und ganz von neuem* bestimmt werden müssen. — Der Widerstand w des *Normalleiters* wird hieraus gefunden:

$$w = \pi^2 \cdot \frac{pq}{CT^2}.$$

Es leuchtet hieraus die Wichtigkeit der Messungen ein, durch welche die beiden *konstanten Elemente* p und q bestimmt werden, die schon bei *Konstruktion des Induktors und Multiplikators* ausgeführt werden müssen und in keiner Weise durch spätere Beobachtungen oder Messungen ersetzt werden können.

$\frac{1}{2}p$ bezeichnet die *Induktorfläche*, worunter zu verstehen ist die Summe der Projektionsflächen aller Umwindungen des Induktors auf eine gegen die Induktoraxe *normale Ebene.*

Wir lassen sogleich hier alle Messungen folgen, welche bei Aufwickelung des *Induktors* auf der alten Sternwarte zu Leipzig am 14. Mai 1877 zu genauester Bestimmung des konstanten Elements p gemacht worden sind, mit Zugrundelegung der beiden schon erwähnten, der Leipziger Sternwarte gehörigen *Doppelmeter.*

Es wurde nämlich *erstens* der Umfang der Walze, ehe der Draht aufgewunden wurde, mit Hülfe von sechs Papierstreifen bestimmt, welche in gleichen Entfernungen von einander straff um die Walze gelegt wurden, so dass Anfang und Ende jedes Streifens sich deckten. Durch einen Anfang und Ende an dieser Stelle zugleich durchbohrenden Nadelstich wurde Anfangspunkt und Endpunkt der Umwindung zugleich bezeichnet. Jeder von diesen Streifen wurde später auf einer ebenen Tafel glatt ausgebreitet und die beiden *Doppelmeter* darauf gelegt, so dass sie mit ihrer bis zur Kante reichenden Millimetertheilung den Papierstreifen berührten. Der Abstand der beiden Nadelstiche konnte damit bis auf $\frac{1}{10}$ Millimeter genau bestimmt werden.

Es ergab sich der Umfang der Walze im Mittel aus den Angaben zweier Beobachter:

an der Stelle des 1. Streifens	= 3018,55	Millimeter
„ „ „ „ 2. „	= 3018,55	„
„ „ „ „ 3. „	= 3018,50	„
„ „ „ „ 4. „	= 3018,45	„
„ „ „ „ 5. „	= 3018,70	„
„ „ „ „ 6. „	= 3018,50	„

Es ergab sich hieraus die Walze, so weit diese Prüfung reicht, als fast vollkommen *cylindrisch* und ihr *Umfang und Halbmesser*:

$$2\pi c = 3018{,}54$$
$$c = 480{,}414.$$

Zweitens wurden während der Aufwindung des Drahtes sowohl die *Schichten* gezählt, welche die Windungen über einander bildeten, als auch die in jeder *Schicht* neben einander befindlichen *Umwindungen*. Ausserdem wurde an der bei Aufwindung des Drahtes gedrehten Walze ein *Zähler* befestigt und dessen Stand, welcher zu Anfang 800 war, bei Beendigung jeder Schicht von Umwindungen abgelesen, wie folgende Tabelle angiebt:

Schicht.	Zahl ihrer Umwindungen.	Zählerstand.
0.	0	800
1.	66	866
2.	66	932
3.	66	998
4.	66	1064
5.	66	1130
6.	66	1196
7.	66	1262
8.	66	1328
9.	66	1394
10.	66	1460
11.	66	1526
12.	66	1592
Summa 12 Schichten	792 Umwindungen.	

Hierauf wurde *drittens* der Umfang der *Walze mit dem aufgewundenen Drahte* auf gleiche Weise gemessen, wie vorher ohne Draht, wieder nämlich mit Hülfe von sechs Papierstreifen, woraus sich der Umfang der *Walze mit Draht* im Mittel aus Angaben zweier Beobachter ergab:

an der Stelle des 1. Streifens = 3263,75 Millimeter
" " " " 2. " = 3263,85 "
" " " " 3. " = 3264,10 "
" " " " 4. " = 3263,75 "
" " " " 5. " = 3263,80 "
" " " " 6. " = 3263,95 "

Der Umfang der Walze mit Draht ergab sich hieraus im Mittel:

$$2\pi(1 + a)c = 3263{,}87$$
$$(1 + a)c = 519{,}461$$
$$ac = 39{,}047.$$

Endlich wurde *viertens* noch die *Länge* der Walze $= 2bc$, auf welcher 66 Drahtwindungen neben einander Platz fanden, gemessen und gefunden:

$$2bc = 254{,}20,$$

woraus für *dicht* neben einander liegende Umwindungen die Drahtdicke inkl. Umspinnung sich ergeben würde:

$$\frac{254{,}20}{66} = 3{,}8515.$$

Dieselbe Drahtdicke inkl. Umspinnung ergiebt sich aber aus der Dicke der zwölf Schichten übereinander, welche = 39,047 gefunden worden ist,

$$= \frac{39{,}047}{12} = 3{,}254.$$

Der Grund dieser Differenz liegt hauptsächlich in der baumwollenen Umspinnung, welche zwischen neben einander liegenden Umwindungen weniger zusammengedrückt wird, als zwischen über einander liegenden.

Hiernach ergeben sich nun leicht die Halbmesser r der verschiedenen Schichten und die entsprechenden Flächen πr^2, deren Summe mit 66 multiplicirt die *Induktorfläche* $\frac{1}{2}p$ giebt, nämlich in Quadratmillimetern:

$$\tfrac{1}{2}p = 6222 \,.\, 10^5.$$

Wir lassen ferner alle Messungen folgen, welche bei Aufwickelung des *Multiplikators* gemacht worden sind und zur Bestimmung des zweiten konstanten Elements q geführt haben.

Der Umfang der zum Multiplikator bestimmten Walze, ehe der Draht aufgewunden wurde, ergab sich auf gleiche Weise wie beim Induktor im Mittel aus Bestimmungen zweier Beobachter an zwei weit von einander entfernten Stellen der Walze:

an 1. Stelle = 3017,65 Millimeter
„ 2. „ = 3018,25 „

im Mittel also war dieser Umfang und der entsprechende Halbmesser:

$$2\pi c = 3017{,}95$$
$$c = 480{,}32.$$

Während der Aufwindung des Drahtes wurden die Schichten und Umwindungen gezählt, wie folgende Tafel zeigt:

Schicht.	Zahl ihrer Umwindungen.	Zählerstand.
0.	0	0
1.	66	66
2.	67	133
3.	67	200
4.	$66\frac{3}{4}$	266,75
5.	$65\frac{1}{4}$	332
6.	66	398
7.	66	464
8.	$65\frac{1}{6}$	529,17
9.	$65\frac{5}{6}$	595
10.	66	661
11.	65	726
12.	66	792

Summa 12 Schichten 792 Umwindungen.

Nach Aufwindung des Drahtes wurde der Umfang der Walze wieder gemessen und gefunden:

$$2\pi(1+a)\,c = 3272{,}17,$$
$$(1+a)\,c = 520{,}797,$$
$$ac = 40{,}477.$$ [1]

Endlich wurde auch noch die Länge der Multiplikatorwalze gemessen, nämlich:

$$2bc = 254{,}20.$$

Nach diesen Messungen kann nun auch das *zweite* konstante Element q, dessen Kenntniss zur Bestimmung des *Normalwiderstands* nöthig ist, gefunden werden.

q bezeichnet nämlich das von der Einheit des Stroms im *Multiplikator* auf die *Einheit* des Magnetismus in der Centralnadel ausgeübte *Drehungsmoment*, welches aus den bei der Konstruktion des Multiplikators gemessenen Grössen a, b, c und aus der Zahl der Umwindungen n berechnet werden kann, wie in den Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 10 (1862), „Zur Galvanometrie", S. 39, gezeigt worden ist.[2] Es ist nämlich daselbst bewiesen worden, dass das *mittlere* auf den Nadelmagnetismus m ausgeübte Drehungsmoment *einer* Windung

$$= \frac{2\pi m}{ac} \log \frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}}$$

ist, woraus das Drehungsmoment aller n Windungen, für die *Einheit* des Nadelmagnetismus, d. i. für $m=1$, sich ergiebt, nämlich:

$$q = \frac{2\pi n}{ac} \log \frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}}.$$

Hierin ist nun nach den oben angeführten Bestimmungen:

$$n = 792$$
$$c = 480{,}32$$
$$a = \frac{40{,}477}{480{,}32}$$
$$b = \frac{127{,}10}{480{,}32}$$

woraus q gefunden wird:

$$q = 9{,}64015.$$

[1] Der für den Multiplikator etwas grössere Werth von ac als für den Induktor hat seinen Grund in etwas geringerer Spannung des Multiplikatordrahtes bei Aufwindung desselben.

[2] [Wilhelm Weber's Werke, Bd. IV, p. 48.]

Nach dieser Bestimmung der beiden Konstanten p und q aus den bei Konstruktion des Induktors und Multiplikators gemachten Beobachtungen und Messungen reduciren sich alle Widerstandsmessungen des *Normalleiters* im Wesentlichen *erstens* auf Beobachtungen der *Schwingungsdauer* T der im Multiplikator aufgehangenen Nadel, und *zweitens* auf Beobachtungen der durch einen mit dem Induktor ausgeführten Induktionsstoss der im Multiplikator aufgehangenen Nadel ertheilten *Geschwindigkeit* C. Es kommen dazu *drittens* nur noch Hülfsbeobachtungen, die, weil die Nadel an einem *elastischen* Faden aufgehangen wird, zur *Reduktion* der Schwingungsdauer *auf verschwindende Elasticität* dienen.[1]

Aus den beiden *konstanten* Elementen p und q und den beiden *variablen* Elementen T und C wird der *absolute Widerstand des Normalleiters* berechnet und gefunden:

$$w = \pi^2 \frac{pq}{CT^2}.$$

Zur Ausführung von Beobachtungen zur Bestimmung von T und C, welche bei jeder Messung des *Normalleiterwiderstands* wiederholt werden müssen, wegen Veränderlichkeit des Erdmagnetismus und Nadelmagnetismus, von denen beide abhängig sind, findet man die nöthige Anweisung in der von Gauss gegebenen „Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel“ in den Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837, S. 58—80, oder auch Gauss' Werke, Bd. V, S. 374—394; und in der Abhandlung über Widerstandsmessungen in den Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. I (1852), S. 341—360,[2] wo eine Uebersicht der Beobachtungsmethoden zu galvanischen Messungen mit Rücksicht auf Dämpfung, insbesondere der *Multiplikations-* und *Zurückwerfungsmethode*, gegeben ist, wovon die *erstere* Methode besonders bei schwachen, die *letztere* bei starken Induktionsstössen in Anwendung kommt; für dazwischen liegende Fälle kann noch eine *dritte Methode* dienen, wo die Nadelschwingung durch die Induktionsstösse abwechselnd vergrössert und verkleinert wird.

[1]) Eine andere Art von Hülfsbeobachtungen könnte noch für die Geschwindigkeit C nöthig erscheinen, wenn gegen die durch den Multiplikator *vermittelte* Wirkung des Induktionsstosses auf die Nadel die *unmittelbare* vom Induktor selbst ausgeübte Wirkung nicht verschwände. Unter den Verhältnissen der nachher anzuführenden Versuche betrug die unmittelbare Wirkung nur $\frac{1}{1680}$ der mittelbaren, und hätte durch eine mässige Vergrösserung des Abstands des Induktors vom Multiplikator leicht noch sehr verkleinert werden können; abgesehen hiervon würde es aber auch stets freistehen, ihren Einfluss ganz zu eliminiren, nämlich durch einen leicht zu bewerkstelligenden Wechsel der Verbindung der Drahtenden des Induktors mit denen des Multiplikators, wodurch eine verstärkende Wirkung in eine schwächende oder umgekehrt verwandelt wird.

[2]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 433—450.]

Als *erstes* Beispiel einer solchen Bestimmung der Grössen T und C und einer dadurch gegebenen Bestimmung des *Normalleiterwiderstands* sollen die ersten Probeversuche dienen, welche nach Aufwindung des Induktors und Multiplikators am 13. Juni 1878 gemacht worden sind.

Die Beobachtungen zur Bestimmung von T sollen kurz *Schwingungsbeobachtungen*, die zur Bestimmung von C *Induktionsbeobachtungen* genannt werden. Letztere Beobachtungen wurden nach der oben erwähnten *dritten Methode* ausgeführt; es wurde nämlich die vorhandene grössere Nadelschwingung durch den ersten Induktionsstoss verkleinert, diese verkleinerte Schwingung wurde durch den zweiten Induktionsstoss wieder vergrössert u. s. f.

Erste Widerstandsmessung des Normalleiters.

Uebersicht der Beobachtungen.

Leipzig, alte Sternwarte 1878. Juni 13.

200 Millimeter lange Nadel.

4025,77 Millimeter oder Skalentheile Abstand des östlichen Spiegels von der Skale;

3917,77 Millimeter oder Skalentheile Abstand des westlichen Spiegels von der Skale.

20,8° cent. Temperatur des Induktors.

20,9° cent. Temperatur des Multiplikators.

Schwingungsbeobachtungen
(bei offener Kette).

	1131,8		944,8
5h 37m 38,75s		6h 24m 0,95s	
	435,0		620,0
55,70s		18,15s	
	1128,1		943,9
38m 12,60s		34,90s	
	439,2		622,0
29,70s		52,10s	
	1125,9		942,6
46,65s		25m 9,00s	
	441,1		623,2
39m 3,70s		26,15s	
	1122,5		940,9

Induktionsbeobachtungen.

Induktionsstoss No.	Elongationsbeobachtungen an der östlichen Skale	Elongationsbeobachtungen an der westlichen Skale	Induktionsstoss No.	Elongationsbeobachtungen an der östlichen Skale	Elongationsbeobachtungen an der westlichen Skale
	675,0	645,6		851,9	828,0
	941,2	919,2	6.		
1.				596,3	563,7
	849,3	824,6		1018,0	998,2
2.			7.		
	601,8	570,1		759,8	732,6
	1014,0	994,0	8.		
3.				687,5	658,0
	769,0	741,9		930,0	907,5
4.			9.		
	680,0	650,4		855,7	831,0
	934,8	912,1	10.		
5.					

Induktionsstoss No.	Elongationsbeobachtungen an der östlichen	westlichen Skale	Induktionsstoss No.	Elongationsbeobachtungen an der östlichen	westlichen Skale
10.			38.		
	594,3	562,4		594,9	562,9
	1022,0	1002,0		1020,0	1000,3
11.			39.		
	764,8	737,2		759,1	731,7
12.			40.		
	684,5	655,1		690,8	661,4
	931,3	908,9		925,8	903,0
13.			41.		
	856,1	831,7		862,3	837,9
14.			42.		
	593,0	560,8		589,0	556,8
	1022,0	1002,3		1025,9	1006,2
15.			43.		
	761,3	734,0		762,2	734,8
16.			44.		
	688,0	658,6		688,5	659,2
	927,1	904,3		928,0	905,3
17.			45.		
	857,4	833,0		861,3	836,9
18.			46.		
	592,3	560,7		590,2	558,4
	1021,1	1001,1		1024,3	1004,7
19.			47.		
	761,8	734,3		759,7	732,1
20.			48.		
	687,3	658,0		691,1	661,8
	928,9	906,3		924,8	902,1
21.			49.		
	857,9	833,1		861,9	837,3
22.			50.		
	593,1	561,2		589,0	557,1
	1020,9	1001,0		1028,5	1008,9
23.			51.		
	764,6	737,2		757,0	729,3
24.			52.		
	685,9	656,4		693,2	664,0
	930,9	908,4		923,0	900,2
25.			53.		
	856,8	832,1		864,9	840,4
26.			54.		
	595,9	564,0		585,8	553,8
	1020,1	1000,3		1028,5	1008,7
27.			55.		
	763,4	736,2		755,3	727,9
28.			56.		
	687,0	657,5		695,2	666,2
	929,0	906,8		921,8	898,8
29.			57.		
	858,9	834,1		865,3	841,0
30.			58.		
	592,0	560,0		587,0	554,9
	1022,5	1002,9		1027,9	1008,1
31.			59.		
	762,9	735,6		759,5	731,9
32.			60.		
	687,0	657,7		692,1	663,0
	928,5	906,0		924,1	901,6
33.			61.		
	859,1	834,7		863,1	838,7
34.			62.		
	593,1	561,1		588,1	556,3
	1022,2	1002,4		1026,7	1006,9
35.			63.		
	765,0	737,8		760,2	732,8
36.			64.		
	686,2	656,9		690,5	661,1
	931,1	908,8		925,8	903,0
37.			65.		
	856,0	851,3		861,7	837,0
38.			66.		

Induktionsstoss No.	Elongationsbeobachtungen an der östlichen	westlichen Skale	Induktionsstoss No.	Elongationsbeobachtungen an der östlichen	westlichen Skale
66.			78.		
	589,8	557,9		588,8	556,9
	1027,2	1007,6		1027,9	1008,0
67.			79.		
	760,3	733,0		759,3	732,0
68.			80.		
	691,2	662,0		691,1	662,4
	925,9	903,1		923,9	961,2
69.			81.		
	862,5	838,0		862,4	838,0
70.			82.		
	589,0	557,2		589,7	557,8
	1027,0	1007,3		1025,8	1005,8
71.			83.		
	758,0	730,3		760,2	732,9
72.			84.		
	692,7	663,3		691,1	661,7
	923,8	900,9		925,9	903,2
73.			85.		
	864,8	840,1		860,8	836,0
74.			86.		
	586,6	554,5		591,8	559,7
	1028,5	1008,8		1024,3	1004,6
75.			87.		
	758,9	751,3		760,2	733,0
76.			88.		
	693,0	663,8		690,2	660,9
	924,6	901,8		927,9	905,1
77.					
	863,0	838,6			
78.					

Diese ganze Reihe von Induktionsbeobachtungen, woraus für *einen* Induktionsstoss 88 Bestimmungen an jeder von den beiden Skalen gewonnen werden, ist von *zwei* Beobachtern und *einem* Gehülfen, welcher den Induktor drehte, in Zeit von 40 Minuten gemacht worden.

Obiger Uebersicht der Beobachtungen sind endlich noch folgende *Hülfsbeobachtungen* beizufügen:

1. Schwingungsbeobachtungen (bei *geschlossener* Kette) am 1. Juni 1878.

	1048,4		813,0
$11^h\ 44^m\ 12{,}70^s$	417,2	$12^h\ 21^m\ 28{,}30^s$	745,3
$29{,}55^s$	1042,0	$44{,}70^s$	811,9
$46{,}70^s$	423,7	$22^m\ \ 2{,}35^s$	647,1
$45^m\ \ 3{,}25^s$	1035,8	$18{,}80^s$	809,9
$20{,}65^s$	429,5	$36{,}20^s$	648,1
$37{,}10^s$	1030,0	$52{,}70^s$	810,0

2. Torsionsbeobachtungen am 9. Juni 1878.

Abstand des Spiegels von der Skale = 4025,77 Skalentheile.

Torsionskreis.	Nadelstand.
280°	786,60
370°	798,36
190°	772,10
280°	786,38

Beobachtungsresultate.

Erstens ergiebt sich aus den oben angeführten Schwingungsbeobachtungen (bei *offener* Kette) nach der Gauss'schen Anleitung die Schwingungsdauer T' für unendlich kleine Bögen, und das logarithmische Dekrement λ' (für den Modulus $m = 0{,}43\,429$):

$$T' = 16{,}9647'',$$
$$\lambda' = 0{,}002\,017.$$

Hierbei hing die Nadel an einem Faden, dessen *Torsionskraft* Θ im Verhältniss zur *magnetischen Direktionskraft* mT durch die unter (2) angeführten *Hülfsbeobachtungen* bestimmt wird, nämlich:

$$\frac{\Theta}{mT} = \frac{1}{965},$$

woraus sich die Schwingungsdauer der Nadel *ohne Fadenelasticität* ergiebt:

$$T = 16{,}9735''.$$

Zweitens aus den angeführten *Induktionsbeobachtungen* ergiebt sich die gesuchte, der Nadel vom Induktor durch einen *Induktionsstoss* ertheilte, Geschwindigkeit C nicht unmittelbar, sondern es muss zur Bestimmung von C zunächst die Gleichgewichtslage der Nadel zur Zeit aller einzelnen Elongationen gefunden werden.

Für die Zeit mitten zwischen *zwei Elongationsbeobachtungen*, zwischen denen *kein Induktionsstoss* Statt gefunden hat, z. B. zwischen den Elongationen 601,8 und 1014,0 nach dem zweiten Induktionsstosse, ergiebt sich diese Gleichgewichtslage (für Zeiten langsamer Deklinationsänderungen, wie sie für solche Messungen stets zu wählen sind) sehr leicht. Sie würde durch den Mittelwerth 807,9 bestimmt sein, wenn keine Abnahme der Schwingungsbögen Statt fände; bei der aus den *Hülfsbeobachtungen* (für die Schwingungsdauer bei *geschlossener* Kette) sich ergebenden Abnahme im Verhältniss von nahe 101 : 100 muss dieser Mittelwerth um $\frac{1}{400}$ der Differenz beider Beobachtungen 1014,0 — 601,8 der letzteren genähert werden. Der Ruhestand für diese Zeit ist also $807{,}9 + [(1014{,}0 - 601{,}8)/400] = 808{,}93$.

Ist nun die Gleichgewichtslage für alle diese Zeiten vor dem ersten, ferner zwischen dem zweiten und dritten, vierten und fünften etc. Induktionsstoss bestimmt, so leuchtet ein, dass bei langsamen Deklinationsänderungen, wie sie bei diesen Messungen stets vorausgesetzt werden dürfen, auch für alle anderen Beobachtungszeiten die Gleichgewichts-

lagen der Nadel mit grosser Sicherheit interpolirt werden können, wie folgende Tafel für den Zeitraum der ersten acht Induktionsstösse zeigt.

Induktionsstoss	An der östlichen Skale			An der westlichen Skale		
No.	Beobachtung	Ruhelage	Elongation	Beobachtung	Ruhelage	Elongation
	675,0	808,8	— 133,8	645,6	783,1	— 137,5
	941,2	808,8	+ 132,4	919,2	783,1	+ 136,1
1.						
	849,3	808,8	+ 40,5	824,6	783,1	+ 41,5
2.						
	601,8	808,9	— 207,1	570,1	783,1	— 213,0
	1014,0	808,9	+ 205,1	994,0	783,1	+ 210,9
3.						
	769,0	808,5	— 39,5	741,9	782,5	— 40,6
4.						
	680,0	808,0	— 128,0	650,4	781,9	— 131,5
	934,8	808,0	+ 126,8	912,1	781,9	+ 130,2
5.						
	851,9	807,9	+ 44,0	828,0	781,9	+ 46,1
6.						
	595,5	807,8	— 212,3	563,7	782,0	— 218,3
	1018,0	807,8	+ 210,2	998,2	782,0	+ 216,2
7.						
	759,8	808,6	— 48,8	732,6	782,7	— 50,1
8.						
	687,5	809,4	— 121,9	658,0	783,4	— 125,4
	930,0	809,4	+ 120,6	907,5	783,4	+ 124,1

Aus der Elongation der Nadel vor jedem Induktionsstosse lässt sich nun aber die nächstfolgende Elongation berechnen, welche *ohne Induktionsstoss* Statt gefunden haben würde; sie würde nämlich, wenn keine Abnahme der Schwingungsbögen Statt fände, der vor dem Induktionsstosse *entgegengesetzt gleich* sein; mit Rücksicht auf die wirklich vorhandene Abnahme ergiebt sich dieselbe durch Multiplikation der vorhergehenden Elongation mit — 100/101.

Die Differenz der *wirklichen* Elongation, welche aus der Beobachtung nach dem Induktionsstosse sich ergeben hat, von jener *berechneten* ist die *Wirkung des Induktionsstosses*, nämlich die Elongationsweite der durch einen Induktionsstoss in Schwingung gesetzten *ruhenden Nadel*, welche mit a bezeichnet werden soll.

Für diese Wirkung erhält man hiernach aus den oben angeführten Beobachtungen Bestimmungen nach Skalentheilen, wie folgende Tafel zeigt, denen sowohl für die östliche als auch für die westliche Skale noch Kolumnen beigefügt sind, welche zu besserer Uebersicht die stets positiven Differenzen zweier auf einander folgenden Induktionsstösse, nämlich eines positiven und darauf folgenden negativen Stosses, geben.

Oestliche Skale

Induktionsstoss No.	Wirkung desselben	Differenzen auf einander folgender Stösse
1.	+ 40,5 + 131,1 = + 171,6	338,6
2.	— 207,1 + 40,1 = — 167,0	
3.	— 39,5 + 203,0 = + 163,5	330,6
4.	— 128,0 — 39,1 = — 167,1	
5.	+ 44,0 + 125,5 = + 169,5	338,2
6.	— 212,3 + 43,6 = — 168,7	
7.	— 48,8 + 208,0 = + 159,2	329,4
8.	— 121,9 — 48,3 = — 170,2	
etc.		

Westliche Skale

Induktionsstoss No.	Wirkung desselben	Differenzen auf einander folgender Stösse
1.	+ 41,5 + 134,7 = + 176,2	348,1
2.	— 213,0 + 41,1 = — 171,9	
3.	— 40,6 + 208,9 = + 168,3	340,0
4.	— 131,5 — 40,2 = — 171,7	
5.	+ 46,1 + 128,9 = + 175,0	347,7
6.	— 218,3 + 45,6 = — 172,7	
7.	— 50,1 + 214,0 = + 163,9	338,9
8.	— 125,4 — 49,6 = — 175,0	
etc.		

Die Wirkung der ersten acht Induktionsstösse ist hiernach an der östlichen Skale = 1336,8, an der westlichen = 1374,7 Skalentheile; für einen Induktionsstoss im Mittel an der östlichen 167,10, an der westlichen 171,84. Folgende Tafel giebt die Wirkungen sämmtlicher 88 Induktionsstösse, wie sie sich aus den oben angeführten Induktionsbeobachtungen ergeben.

Induktionsstösse	Oestliche Skale		Westliche Skale	
	Wirkung	Mittlere Differenz zweier Stösse	Wirkung	Mittlere Differenz zweier Stösse
1— 8.	1336,8	334,20	1374,7	343,68
9—16.	1337,5	334,38	1375,6	343,90
17—24.	1333,5	333,38	1370,4	342,60
25—32.	1334,9	333,72	1371,6	342,90
33—40.	1329,1	332,28	1368,6	342,15
41—48.	1338,0	334,50	1376,1	344,02
49—56.	1335,6	333,90	1372,3	343,08
57—64.	1335,8	333,95	1372,9	343,22
65—72.	1336,5	334,12	1373,3	343,32
73—80.	1338,0	334,50	1374,8	343,70
81—88.	1331,9	332,98	1369,1	342,28
	14687,6		15099,4	

wonach die Wirkung eines Induktionsstosses im Mittel aus allen

an der östlichen Skale = 166,9045 Skalentheile,
an der westlichen Skale = 171,584 „

Nun ist aber nach der angegebenen Entfernung des Spiegels von der Skale der Bogenwerth eines Theils

$$\text{der östlichen Skale} = \frac{1}{2 \,.\, 3917{,}17},$$

$$\text{der westlichen Skale} = \frac{1}{2 \,.\, 4025{,}77};$$

folglich beträgt die Wirkung eines Induktionsstosses, gemessen durch den Bogenwerth a der von ihm hervorgebrachten Ablenkung der ruhenden Magnetnadel, nach den Beobachtungen

$$\text{an der östlichen Skale } a = \frac{166{,}9045}{2 \,.\, 3917{,}17} = 0{,}021\,304\,2,$$

$$\text{an der westlichen Skale } a = \frac{171{,}584}{2 \,.\, 4025{,}77} = 0{,}021\,310\,7,$$

im Mittel also $a = 0{,}021\,307\,5$.

Aus dieser von einem Induktionsstosse hervorgebrachten *Ablenkung* der Nadel $= a$ wird nun nach der von Gauss gegebenen Anleitung die von einem Induktionsstosse der Nadel ertheilte Drehungsgeschwindigkeit $= C$ bestimmt. Es ist nämlich

$$C = a \cdot \frac{\pi}{T'} \cdot e^{\frac{\lambda}{m\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{m\pi}{\lambda}},$$

wo λ das logarithmische Dekrement für Abnahme der Schwingungsbögen bei geschlossener Kette, m den Modulus des Systems und T' die Schwingungsdauer der von *magnetischer* und *elastischer* Kraft $(MT + \Theta)$ getriebenen Nadel bezeichnet.

Aus den oben angeführten *Hülfsbeobachtungen* ergiebt sich das logarithmische Dekrement, bei *geschlossener* Kette, für den Modulus $m = 0{,}43\,429$,

$$\lambda = 0{,}004\,347\,7.$$

Da nun ferner aus den *Schwingungs-* und *Induktionsbeobachtungen*

$$T' = 16{,}9647''$$

und

$$a = 0{,}021\,307\,5$$

gefunden worden ist, so ergiebt sich

$$C = 0{,}003\,965\,6.$$

Da nun ferner aus den angeführten *Schwingungsbeobachtungen*, mit Rücksicht auf die durch die *Hülfsbeobachtungen* bestimmte Torsion, die Schwingungsdauer ohne Torsion

$$T = 16{,}9735''$$

gefunden worden ist; da endlich aus der Konstruktion des *Induktors* und *Multiplikators* die beiden Konstanten p und q bekannt sind, nämlich

$$p = 2\,.\,622\,200\,000,$$
$$q = 9{,}640\,15;$$

so ergiebt sich der gesuchte Widerstand des *Normalleiters* bei einer Temperatur von 20,85° cent., nach *absolutem Maasse*:

$$w = \pi^2 \frac{pq}{CT^2} = 10{,}360\,85\,.\,10^{10}.$$

Zweite Widerstandsmessung des Normalleiters.

Uebersicht der Beobachtungen.

Leipzig, alte Sternwarte 1879. August 5.

200 Millimeter lange Nadel.

3149,1 Millimeter oder Skalentheile, Abstand des östlichen Spiegels von der Skale;

3781,5 Millimeter oder Skalentheile, Abstand des westlichen Spiegels von der Skale.

26,7° cent. Temperatur des Induktors,

27,2° cent. Temperatur des Multiplikators.

Schwingungsbeobachtungen

(bei offener Kette).

8h 29m 23,70s	1157,3	9h 1m 47,90s	967,2
40,50s	327,9	2m 5,50s	516,0
57,70s	1151,8	22,00s	965,8
30m 14,80s	332,8	39,70s	518,1
31,65s	1146,1	56,10s	963,4
48,95s	337,8	3m 13,75s	519,6
	1140,7		961,8

11h 22m 47,75s	1096,8	11h 54m 3,70s	932,3
23m 4,90s	357,8	21,65s	512,2
21,45s	1093,9	37,90s	930,4
38,95s	361,7	55,65s	514,2
55,85s	1089,0	55m 12,00s	928,0
24m 13,00s	365,0	29,90s	516,4
	1085,8		926,0

26,66° cent. Temperatur des Induktors,

26,90° cent. Temperatur des Multiplikators.

Induktionsbeobachtungen nach der Zurückwerfungsmethode.
26,50° cent. Temperatur des Induktors,
26,74° cent. Temperatur des Multiplikators.

Oestliche Skale						Westliche Skale					
Induktionsstoss No.	Elongation		Induktionsstoss No.	Elongation		Induktionsstoss No.	Elongation		Induktionsstoss No.	Elongation	
	I	II		III	IV		I	II		III	IV
1.	707,3	833,8	2.	839,1	702,9	1.	661,0	813,0	2.	820,0	656,0
3.	704,6	836,0	4.	835,4	706,2	3.	658,0	816,0	4.	815,5	660,0
5.	704,6	836,0	6.	835,9	706,0	5.	658,0	816,1	6.	816,0	659,0
7.	704,1	836,3	8.	835,7	706,3	7.	657,3	816,8	8.	815,9	660,1
9.	703,3	836,9	10.	835,2	706,7	9.	656,5	817,0	10.	815,3	660,3
11.	702,0	838,7	12.	832,9	708,9	11.	655,8	819,5	12.	812,3	663,1
13.	701,3	838,9	14.	833,0	708,8	13.	654,0	819,7	14.	812,6	663,0
15.	701,3	838,9	16.	832,9	708,8	15.	654,0	819,6	16.	812,1	666,0
17.	700,7	839,4	18.	832,2	709,2	17.	653,1	820,2	18.	811,8	663,6
19.	701,1	839,0	20.	832,3	709,0	19.	653,9	819,9	20.	811,9	663,3
21.	701,0	838,8	22.	832,7	708,4	21.	653,9	819,7	22.	812,1	662,7
23.	701,1	838,4	24.	832,8	708,3	23.	653,9	819,1	24.	812,3	662,3
25.	701,6	838,0	26.	833,3	707,8	25.	654,1	818,8	26.	813,0	661,8
27.	701,8	837,7	28.	833,0	707,8	27.	654,8	818,1	28.	812,5	661,9
29.	701,2	838,0	30.	832,3	708,1	29.	654,0	818,7	30.	811,8	662,0
31.	700,3	838,1	32.	831,6	708,3	31.	653,0	818,9	32.	810,9	662,3
33.	699,1	838,9	34.	830,6	708,8	33.	651,5	819,0	34.	809,8	663,0
35.	699,0	838,7	36.	830,1	708,7	35.	651,3	819,6	36.	809,2	663,0
37.	698,9	838,5	38.	830,8	708,0	37.	651,1	819,1	38.	809,9	662,0
39.	698,0	839,1	40.	829,7	708,6	39.	650,2	819,9	40.	808,8	662,8
41.	698,1	838,5	42.	829,5	708,2	41.	650,1	819,1	42.	808,2	662,2
43.	698,1	838,2	44.	829,7	707,8	43.	650,2	818,9	44.	808,8	661,9
45.	698,6	837,7	46.	829,5	707,6	45.	650,8	818,1	46.	808,5	661,5
47.	697,3	838,2	48.	829,1	708,0	47.	649,5	819,0	48.	808,0	662,0
49.	696,7	838,2	50.	828,2	708,3	49.	648,3	818,9	50.	806,9	662,3
51.	696,2	838,8	52.	827,3	708,9	51.	648,0	819,5	52.	805,8	663,1
53.	695,1	840,0	54.	826,3	709,6	53.	646,7	821,0	54.	804,6	664,0
55.	694,3	840,0	56.	826,3	709,1	55.	645,9	821,0	56.	804,7	663,3
57.	694,9	839,5	58.	826,0	709,7	57.	646,2	820,3	58.	804,0	664,1
59.	695,0	839,1	60.	826,6	709,1	59.	646,3	819,9	60.	804,8	663,3
61.	694,6	839,9	62.	828,2	707,9	61.	645,9	820,9	62.	806,9	662,0
63.	696,9	837,8	64.	828,9	707,6	63.	648,8	818,2	64.	807,8	661,7
65.	696,4	838,2	66.	828,3	707,3	65.	648,0	818,9	66.	807,0	661,2
67.	696,9	837,4	68.	828,0	707,8	67.	648,8	818,0	68.	806,5	661,8
69.	695,9	838,8	70.	827,6	709,0	69.	647,7	819,5	70.	806,0	663,2
71.	695,7	839,3	72.	826,8	709,2	71.	647,2	820,1	72.	805,0	663,8
73.	694,6	839,6	74.	826,1	709,2	73.	646,0	820,5	74.	804,2	663,5
75.	694,3	839,7	76.	826,4	709,1	75.	645,8	820,7	76.	804,6	663,2
77.	694,7	839,3	78.	826,0	709,6	77.	646,0	820,2	78.	804,0	664,0
79.	694,1	840,7	80.	824,7	710,8	79.	645,1	821,9	80.	802,7	665,3
81.	694,0	840,8	82.	825,4	710,7	81.	645,0	821,9	82.	803,4	665,0
83.	693,8	841,1	84.	825,7	710,8	83.	644,9	822,2	84.	803,8	665,3
85.	694,1	841,2	86.	825,7	710,7	85.	645,5	822,2	86.	803,9	665,2
87.	694,9	840,7	88.	825,7	710,3	87.	645,9	821,7	88.	803,8	664,9
89.	693,0	841,2	90.	824,6	711,0	89.	644,0	822,5	90.	802,4	665,6

Hülfsbeobachtungen.

1. Schwingungsbeobachtungen bei *geschlossener* Kette am 4. August 1879

28,1° cent. Temperatur des Induktors,
27,44° cent. Temperatur des Multiplikators.

	1207,0		838,0
6h 23m 34,50s		6h 57m 6,10s	
	262,3		632,9
51,80s		24,85s	
	1188,2		836,9
24m 8,65s		40,15s	
	273,8		632,1
26,10s		59,00s	
	1177,7		835,7
42,65s		58m 14,30s	
	283,7		636,6
25m 0,15s		33,10s	
	1167,9		831,1

2. Torsionsbeobachtungen am 4. August 1879.

3149,1 Abstand des östlichen Spiegels von der Skale,
3781,5 Abstand des westlichen Spiegels von der Skale,
26,0° cent. Temperatur des Induktors.

Torsionskreis	Westliche Skale Ruhelage
161,8°	742,28
161,7° + 2π	806,13
161,8° — 2π	673,41
161,9° + 2π	800,75
161,8° — 2π	662,31
161,9° + 2π	799,80
161,7° — 2π	669,96
161,8° — 4π	622,37
161,8° + 4π	871,34
161,8°	722,28

Beobachtungsresultate.

Erstens ergiebt sich aus den oben angeführten *Schwingungsbeobachtungen* bei offener Kette

$$T' = 17,056\,35'',$$
$$\lambda' = 0,002\,264\,2.$$

Hierbei hing die Nadel an einem Faden, dessen *Torsionskraft* Θ im Verhältniss zur *magnetischen Direktionskraft* MT durch die unter (2) angeführten *Hülfsbeobachtungen* bestimmt wird, nämlich

$$\frac{\Theta}{MT} = 0,001\,328\,5,$$

woraus sich die Schwingungsdauer der Nadel *ohne Fadentorsion* ergiebt:

$$T = 17,079\,05''.$$

Zweitens, über die oben angeführten *Induktionsbeobachtungen* ist zunächst zu bemerken, dass sie ganz nach der *Methode der Zurückwerfung* ausgeführt worden sind, wodurch sie sich von den früheren, am 13. Juni 1878 ausgeführten Beobachtungen unterscheiden, wo zur Vergrösserung der Nadelschwingungen die *Zurückwerfungsmethode mit der Multiplikationsmethode* verbunden worden war. Die Vergleichung dieser beiden Methoden war jedenfalls nicht ohne Interesse.

Aus obiger, von zwei Beobachtern und einem Gehülfen in 50 Minuten nach der *Zurückwerfungsmethode* ausgeführten Beobachtungsreihe, welche für die Wirkung *eines Induktionsstosses* 90 an der östlichen und ebensoviel an der westlichen Skale gemachte Bestimmungen enthält, ergiebt sich nun nach bekannten Vorschriften aus der Differenz der Beobachtungen der I. und III. Kolumne ein *grösserer* Schwingungsbogen A, nämlich an der *östlichen* Skale $= 131{,}689/6298{,}2 = 0{,}020\,909\,3$, an der *westlichen* Skale $= 158{,}310/7563 = 0{,}020\,932\,4$, im Mittel

$$A = 0{,}020\,920\,8;$$

aus der Differenz der Beobachtungen der II. und IV. Kolumne ergiebt sich ein *kleinerer* Schwingungsbogen B, an der östlichen Skale $= 130{,}202/6298{,}2 = 0{,}020\,673$, an der westlichen Skale $= 156{,}649/7563 = 0{,}020\,712\,5$, im Mittel

$$B = 0{,}020\,692\,8.$$

A zu B steht im Verhältniss zweier auf einander folgenden Schwingungsbögen, wodurch das logarithmische Dekrement (für den Modulus $m = 0{,}434\,29$) bestimmt ist, nämlich

$$\lambda = \log \frac{A}{B} = 0{,}004\,348\,9.$$

Es ist hierbei zu beachten, dass die Methode der Zurückwerfung zur Bestimmung des logarithmischen Dekrements nur bei schneller Abnahme der Schwingungsbögen geeignet ist, und dass in vorliegendem Falle, wo diese Abnahme nur etwa ein Prozent beträgt, keine genaue Bestimmung erwartet werden kann. Zu genauerer Bestimmung sind daher schon unter den Hülfsbeobachtungen *Schwingungsbeobachtungen bei geschlossener Kette* angeführt worden, aus denen der Werth dieses Dekrements genauer erhalten wird, nämlich

$$\lambda = 0{,}005\,537.$$

Anders verhält es sich aber mit Bestimmung der der Nadel *durch einen Induktionsstoss ertheilten Geschwindigkeit*, wozu solche nach der Zurückwerfungsmethode ausgeführte Beobachtungen, auch bei schwacher Dämpfung, sehr wohl geeignet sind.

Diese mit C bezeichnete Geschwindigkeit ist:

$$C = \frac{\sqrt{\pi^2 + \frac{\lambda'^2}{m^2}}}{T'} \cdot \frac{A^2 + B^2}{2\sqrt{AB}} \cdot \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\lambda}{m\pi}}$$

und setzt man darin die gefundenen Werthe

$$\begin{aligned} T' &= 17{,}056\,35, \\ \lambda' &= 0{,}002\,264\,2, \\ \lambda &= 0{,}005\,537, \\ A &= 0{,}020\,920\,8, \\ B &= 0{,}020\,692\,8, \end{aligned}$$

so erhält man:

$$C = 0{,}003\,832\,6.$$

Nun war aber die Schwingungsdauer der Nadel ohne Torsion

$$T = 17{,}079\,05,$$

aus den oben angeführten Schwingungsbeobachtungen bei offener Kette gefunden worden; folglich ergiebt sich hieraus und aus dem Werthe der beiden Konstanten

$$\begin{aligned} p &= 2{,}622\,200\,000, \\ q &= 9{,}640\,15, \end{aligned}$$

der gesuchte Widerstand des Normalleiters bei einer Temperatur von $26{,}62^0$ cent., nach absolutem Maasse:

$$w = \pi^2 \frac{pq}{CT^2} = 10{,}5907 \,.\, 10^{10}.$$

Da die Beobachtungen am 5. August 1879 nach der *Zurückwerfungsmethode* gemacht worden sind, so ist daraus der Widerstand w auch in der auf diese Methode begründeten besonderen Weise berechnet worden, welche am schnellsten zum Ziele führte. Doch lassen sich dieselben Beobachtungen auch in der Weise wie die früheren vom 13. Juni 1878 berechnen, wodurch im Einzelnen mehr Einsicht und genauere Vergleichung aller Induktionsstösse unter einander gewonnen wird, wie folgende darnach berechnete Tafel beweist.

Induktionsstoss No.	Oestliche Skale	Westliche Skale	Induktionsstoss No.	Oestliche Skale	Westliche Skale	Induktionsstoss No.	Oestliche Skale	Westliche Skale
			31.	130,16	156,95	61.	130,58	157,45
2.	130,54	157,07	32.	129,73	156,15	62.	131,95	158,76
3.	132,94	159,95	33.	130,72	157,16	63.	130,36	156,31
4.	129,97	155,74	34.	129,96	156,05	64.	130,28	156,61
5.	129,47	154,67	35.	129,92	156,69	65.	129,72	157,64
6.	129,84	156,56	36.	129,72	155,66	66.	130,58	157,10
7.	130,20	155,40	37.	129,68	156,24	67.	129,93	156,82
8.	129,99	156,65	38.	130,37	157,60	68.	129,54	155,81
9.	130,58	157,18	39.	131,11	157,97	69.	131,21	157,36
10.	130,24	156,73	40.	130,26	157,09	70.	129,92	156,12
11.	131,72	157,89	41.	129,92	156,64	71.	130,27	157,04
12.	129,53	155,87	42.	130,02	155,88	72.	129,77	155,87
13.	129,97	156,56	43.	130,05	156,89	73.	130,49	157,06
14.	130,08	156,57	44.	130,17	156,78	74.	130,10	156,41
15.	130,07	156,70	45.	129,66	156,22	75.	130,34	157,02
16.	130,03	154,76	46.	129,68	156,04	76.	130,51	156,94
17.	130,57	155,75	47.	130,56	157,39	77.	130,12	157,01
18.	129,99	156,55	48.	130,18	156,61	78.	129,68	155,91
19.	129,65	156,21	49.	130,46	157,44	79.	130,66	157,62
20.	129,77	156,20	50.	129,87	156,46	80.	129,42	155,87
21.	129,73	156,30	51.	130,42	157,21	81.	129,53	156,39
22.	130,21	156,51	52.	129,66	155,97	82.	129,90	156,43
23.	129,97	156,40	53.	130,83	157,18	83.	130,17	157,11
24.	130,07	156,52	54.	129,95	156,76	84.	130,27	156,66
25.	129,62	156,44	55.	130,39	157,05	85.	130,17	156,84
26.	130,13	156,88	56.	130,59	157,06	86.	130,22	156,48
27.	129,86	155,33	57.	130,09	156,95	87.	129,83	156,49
28.	129,74	155,89	58.	129,59	155,80	88.	130,01	156,13
29.	130,16	156,74	59.	129,39	155,96	89.	130,97	157,95
30.	129,68	156,18	60.	129,96	156,37	90.	130,06	156,42

Obige Tafel giebt für *jeden Induktionsstoss* die von ihm der Nadel (wenn sie sich in Ruhe befunden hätte) ertheilte *Ablenkung in Skalentheilen*, welche an der östlichen Skale mit 6298,2, an der westlichen mit 7563 dividirt den Ablenkungsbogen in Theilen des Halbmessers giebt. Der Mittelwerth aller dieser Bestimmungen ist:

$$\text{für die östliche Skale} = 0{,}020\,67,$$
$$\text{für die westliche Skale} = 0{,}020\,71,$$

im Mittel aus beiden

$$a = 0{,}020\,69,$$

und hieraus ergiebt sich, da $T' = 17{,}056\,35''$ und $\lambda = 0{,}005\,537$ ist,

$$C = a \cdot \frac{\pi}{T'} \cdot e^{\frac{\lambda}{m\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{m\pi}{\lambda}} = 0{,}003\,835,$$

und ferner, da $T = 17{,}079\,05''$ und $\log pq = 10{,}079\,05$ ist,

$$w = \pi^2 \frac{pq}{CT^2} = 10{,}584\,.\,10^{10},$$

also ein von dem vorher gefundenen nicht merklich verschiedener Werth.

Der Mittelwerth von w aus obigen beiden Bestimmungen ist

$$w = 10{,}587 \,.\, 10^{10},$$

der hiernach bei einer Temperatur von 26,62° cent. des Normalleiters als rein absoluter Widerstand zu betrachten ist, wenn bei so geringem Unterschiede von dem Vorzug, den die letztere Berechnung durch genauere Vergleichung aller einzelnen Induktionsstösse zu verdienen scheint, abgesehen wird.

Dritte Widerstandsmessung des Normalleiters.

Die beiden vorhergehenden Messungen als erste Proben beweisen, dass auf dem eingeschlagenen Wege mit den beschriebenen Instrumenten der beabsichtigte Zweck sich wohl erreichen lasse. Der Unterschied der beiden Messungsresultate ist sehr gering, es ist nämlich

nach der *ersten* Messung, $w = 10{,}36085 \,.\, 10^{10}$,
bei 20,85° cent. Temperatur,
und nach der *zweiten* Messung, $w = 10{,}58700 \,.\, 10^{10}$,
bei 26,62° cent. Temperatur;

und dieser kleine Unterschied ist fast ganz auf Rechnung des Temperaturunterschieds von 5,77° cent., welcher dabei Statt gefunden hat, zu setzen.

Dieses günstige Resultat der ersten Messungen kann zum Beweise dienen, dass die angewandten Mittel, wenn sie auch noch der Vervollkommnung fähig sind, doch dem Zwecke im Wesentlichen schon jetzt genügen.

Was die *Messungsoperationen* im engeren Sinne betrifft, so sind dieselben durch die gewählte Messungsmethode auf blosse *Zeit-* und *Längenmessung* reducirt, wovon die *ersteren*, durch die schon erwähnte Mitwirkung seitens der Sternwarte, alle wünschenswerthe Sicherheit und Genauigkeit gewährten, was von den Längenmessungen nicht in gleichem Grade gilt. Indessen haben auch diese, wie die Uebereinstimmung der Resultate beweist, im Wesentlichen genügt, und nur zu grösserer Sicherheit und Erleichterung der auszuführenden Messungen wird noch möglichst Sorge zu tragen sein für festere Aufstellung der Instrumente, soweit es die Festigkeit des Gebäudes gestattet, und für möglichste Erleichterung der bei jeder Messung zu wiederholenden Prüfungen, insbesondere des Abstandes der beiden Skalen von einander und der richtigen Begrenzung der Induktionsstösse durch leicht stellbare und gut zu fixirende Hemmungen des drehbaren Induktors.

Ein Umstand jedoch bedarf bei diesen Messungen noch einer eingehenderen Erörterung, nämlich die Wahl des zur Nadel dienenden Magnets, welche bei der getroffenen Einrichtung im Grunde noch ganz

frei gelassen ist, indem nur das Schiffchen, in welches der zur Nadel dienende Magnet eingelegt werden soll, gegeben ist.

Bei den ersten Probeversuchen war nun ein 200 Millimeter langer Magnet als Nadel eingelegt worden, dessen Schwingungsdauer 17 Sekunden betrug, die bei einiger Uebung sich hinreichend gross zur Ausführung der Induktionsstösse und Beobachtungen ergab. Diese Nadellänge war etwa der fünfte Theil vom Durchmesser des Multiplikators, woraus sich ergab, dass die *Vertheilungsweise* des Magnetismus in der Nadel nur von sehr geringem Einfluss sein konnte; doch schien es wünschenswerth, für diesen Einfluss, so klein er sein mochte, eine nähere Kenntniss aus Beobachtungen zu gewinnen, was durch eine blosse Vertauschung der Nadeln bei den Messungen, z. B. der 200 Millimeter langen Nadel mit einer 100 Millimeter langen, leicht erreicht werden konnte.

Es soll daher den beiden vorhergehenden Widerstandsmessungen noch eine dritte, mit 100 Millimeter langer Nadel ausgeführte Messung beigefügt werden. Die Beobachtungen sind wieder, wie bei der zweiten Messung, nach der Zurückwerfungsmethode gemacht worden, am 7. August 1879.

Für den vorliegenden Zweck bedarf es nach den vorausgeschickten Proben keiner ausführlichen Beschreibung aller Beobachtungen, sondern es genügt eine kurze Anführung der aus den Beobachtungen gewonnenen Resultate.

Beobachtungsresultate.

Erstens aus den Schwingungsbeobachtungen bei offener Kette hat sich ergeben:

$$T' = 30{,}6139'',$$
$$\lambda' = 0{,}003\,791.$$

Die Torsionskraft des Fadens, an welchem die Nadel hing, im Verhältniss zur magnetischen Direktionskraft war:

$$\frac{\Theta}{MT} = 0{,}005\,035,$$

woraus sich die Schwingungsdauer ohne Fadentorsion ergiebt:

$$T = 30{,}6908''.$$

Temperatur des Induktors 24,53° cent., des Multiplikators 24,64° cent.

Zweitens aus den Induktionsbeobachtungen, nach der Methode der Zurückwerfung, ergeben sich der grössere und kleinere Schwingungsbogen im Mittel aus den Beobachtungen an der östlichen und westlichen Skale

$$A = 0{,}011\,468, \qquad B = 0{,}011\,405\,5.$$

Hieraus würde sich das logarithmische Dekrement für die Abnahme der

Schwingungsbögen (für den Modulus $m = 0{,}434\,29$) ergeben $= \log A/B = 0{,}002\,373$, was aber bei seiner Kleinheit viel genauer aus *Schwingungsbeobachtungen bei geschlossener Kette* bestimmt werden kann und gefunden worden ist:

$$\lambda = 0{,}003\,967.$$

Die der Nadel durch einen Induktionsstoss ertheilte Geschwindigkeit C wird nun aus den gefundenen Grössen:

$$\begin{aligned} T' &= 30{,}613\,9'', \\ \lambda' &= 0{,}003\,791, \\ \lambda &= 0{,}003\,967, \\ A &= 0{,}011\,468, \\ B &= 0{,}011\,405, \end{aligned}$$

berechnet, nämlich

$$C = \frac{\sqrt{\pi^2 + \left(\frac{\lambda'}{m}\right)^2}}{T'} \cdot \frac{A^2 + B^2}{2\sqrt{AB}} \cdot \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\lambda}{m\pi}}$$

Man findet hieraus

$$C = 0{,}001\,173\,7,$$

und, da $\log \pi^2 pq = 11{,}073\,346$ gegeben und die Schwingungsdauer T (ohne Torsion)

$$T = 30{,}690\,8''$$

aus Beobachtungen bestimmt worden ist, ergiebt sich der *Normalleiterwiderstand* bei 24,58° cent. Temperatur

$$w = \pi^2 \frac{pq}{CT^2} = 10{,}709\,8 \,.\, 10^{10}.$$

Mit derselben 100 Millimeter langen Nadel, mit welcher die zuletzt beschriebene Messung ausgeführt worden ist, sind am nämlichen und den folgenden Tagen noch mehrere Messungen von verschiedenen Beobachtern gemacht und es ist daraus gefunden worden:

am 7. August $w = 10{,}755 \,.\, 10^{10}$ bei 24,45° cent. des Induktors,
24,56° cent. des Multiplikators,
am 13. August $w = 10{,}148 \,.\, 10^{10}$ bei 18,00° cent. des Induktors,
17,44° cent. des Multiplikators,
am 15. August $w = 10{,}622 \,.\, 10^{10}$ bei 20,86° cent. des Induktors,
20,86° cent. des Multiplikators,
am 16. August $w = 10{,}613 \,.\, 10^{10}$ bei 20,94° cent. des Induktors,
20,21° cent. des Multiplikators,
am 17. August $w = 10{,}655 \,.\, 10^{10}$ bei 21,53° cent. des Induktors,
21,96° cent. des Multiplikators.

Jede von diesen Messungen war ungefähr in der Zeit von zwei Stunden ausgeführt worden, wobei hier immer *zwei* Beobachter und ein Gehülfe

für die Induktordrehung zusammen gewirkt hatten. Es waren hierbei alle Induktionsbeobachtungen an beiden Skalen gleichzeitig gemacht worden, was etwas grössere Sicherheit gewährt, aber nicht unbedingt nothwendig ist; würden diese Beobachtungen nur an einer Skale gemacht, so könnte die ganze Messung in der gegebenen Zeit von *einem* Beobachter mit einem Gehülfen ausgeführt werden.

Die angeführten Resultate von 8 Widerstandsmessungen, von denen die 3 ersten genauer beschrieben worden sind, gelten nun zwar alle für denselben *Normalleiter*, aber nicht für dieselbe *Temperatur*, sondern es war die Temperatur des Normalleiters nach obigen Angaben im Mittel:

bei der

ersten	Messung,	wo	$w = 10{,}360\,85 \,.\, 10^{10}$,	$t = 20{,}85^0$	cent.
zweiten	„	„	$w = 10{,}590\,7 \,.\, 10^{10}$,	$t = 26{,}62^0$	„
dritten	„	„	$w = 10{,}709\,8 \,.\, 10^{10}$,	$t = 24{,}58^0$	„
vierten	„	„	$w = 10{,}755 \,.\, 10^{10}$,	$t = 24{,}50^0$	„
fünften	„	„	$w = 10{,}148 \,.\, 10^{10}$,	$t = 17{,}72^0$	„
sechsten	„	„	$w = 10{,}622 \,.\, 10^{10}$,	$t = 20{,}86^0$	„
siebenten	„	„	$w = 10{,}613 \,.\, 10^{10}$,	$t = 20{,}57^0$	„
achten	„	„	$w = 10{,}655 \,.\, 10^{10}$,	$t = 20{,}74^0$	„

Abgesehen von der Temperatur findet noch der Unterschied Statt, dass die beiden ersten Messungen mit einer 200 Millimeter langen Galvanometernadel, alle anderen mit einer 100 Millimeter langen Nadel gemacht worden waren.

Nach bekannten Beobachtungen können diese bei verschiedenen Temperaturen des Normalleiters gemachten Widerstandsmessungen leicht auf eine mittlere Temperatur, z. B. von 24^0 cent., reducirt werden, nämlich durch Multiplikation des gefundenen Werthes von w mit dem Faktor $(1 + 0{,}003\,71 \,.\, \Theta)$, wo Θ die Differenz bezeichnet, um welche die Temperatur des Normalleiters unter 24^0 cent. war. Es ergiebt sich hiernach der Widerstand des Normalleiters bei 24^0 cent.

aus	der	*ersten*	Messung	$w = 10{,}481\,66 \,.\, 10^{10}$,
„	„	*zweiten*	„	$w = 10{,}487\,76 \,.\, 10^{10}$,
„	„	*dritten*	„	$w = 10{,}686\,56 \,.\, 10^{10}$,
„	„	*vierten*	„	$w = 10{,}735 \,.\, 10^{10}$,
„	„	*fünften*	„	$w = 10{,}382 \,.\, 10^{10}$,
„	„	*sechsten*	„	$w = 10{,}745\,8 \,.\, 10^{10}$,
„	„	*siebenten*	„	$w = 10{,}747\,8 \,.\, 10^{10}$,
„	„	*achten*	„	$w = 10{,}744\,1 \,.\, 10^{10}$.

Beachtet man endlich noch, dass die ersten beiden Messungen mit einer 200 Millimeter, die 6 letzten Messungen mit einer 100 Millimeter langen Nadel gemacht worden waren, so leuchtet ein, dass eine genaue Ver-

gleichung dieser Messungen noch eine andere Reduktion derselben, nämlich auf unendlich kleine Nadellänge, fordert.

Die Nadellänge von 200 Millimeter war nahezu nur $\frac{1}{5}$ des Multiplikatordurchmessers, die Nadellänge von 100 Millimeter also nur $\frac{1}{10}$. Für so kleine Nadellängen ergiebt sich leicht, dass die Korrektion des Widerstands w wegen der Nadellänge dem Quadrate der Nadellänge sehr nahe proportional sein müsse, bei 200 Millimeter langer Nadel also 4 Mal grösser als bei 100 Millimeter langer Nadel, und dass folglich der Unterschied der mit beiden Nadeln ausgeführten Messungen 3 Mal grösser sein soll, als die ganze an den mit der kleineren Nadel ausgeführten Messungen anzubringende Korrektion.

Es ergiebt sich nun der mit der *längeren* Nadel gemessene Widerstand des Normalleiters bei 24° cent. Temperatur im Mittel aus den *beiden ersten* hier näher beschriebenen Messungen $= 10{,}4847 \,.\, 10^{10}$; der mit der *kürzeren* Nadel gemessene Widerstand bei derselben Temperatur aus der *dritten*, ebenfalls hier näher beschriebenen Messung $= 10{,}68656 \,.\, 10^{10}$; folglich der dritte Theil ihrer Differenz

$$= 0{,}06728 \,.\, 10^{10}$$

als Korrektion für die mit 100 Millimeter langer Nadel gemachten Messungen, und ferner die Korrektion für die mit 200 Millimeter langer Nadel gemachten Messungen viermal grösser

$$= 0{,}26912 \,.\, 10^{10}.$$

Nach diesen Korrektionen erhält man endlich den Widerstand w des Normalleiters bei 24° cent. Temperatur

aus der *ersten* Messung $= 10{,}75079 \,.\, 10^{10}$,
" " *zweiten* " $= 10{,}75689 \,.\, 10^{10}$,
" " *dritten* " $= 10{,}75384 \,.\, 10^{10}$,

im Mittel also aus diesen 3 Messungen

$$w = 10{,}75384 \,.\, 10^{10}.$$

Nachdem auf die beschriebene Weise ein *Normalleiter* hergestellt worden ist, dessen Widerstand jederzeit nach absolutem Maasse genau bestimmt werden kann, so ist dadurch der Weg gebahnt zu stetem Gebrauche nicht blos des absoluten Widerstandsmaasses, sondern überhaupt zum Gebrauche lauter absoluter Maasse in der ganzen Elektrodynamik.

Die Elektrodynamik bietet drei *Arten von Grössen* für Messungen dar, nämlich *elektromotorische Kräfte*, *Leitungswiderstände* und *Stromintensitäten*, die nach den Ohm'schen Gesetzen in solcher Beziehung zu einander stehen, dass, wenn die Grössen zweier Arten gemessen werden können, die Grössen der dritten Art durch Rechnung daraus bestimmt werden können.

Nun können *Stromintensitäten* aus Fernwirkungen der Ströme auf Magnete oder andere Ströme nach absolutem Maasse bestimmt oder gemessen werden, nämlich mit Hülfe von Galvanomotern und Dynamometern; kommen also zu diesen absoluten *Strommessungen* nun noch absolute *Widerstandsmessungen* hinzu, so ist dadurch der Weg auch für absolute Messungen *elektromotorischer Kräfte* gebahnt.

Es ist aber zu diesem Zwecke nothwendig, nicht blos einen Normalleiter zu haben, dessen Widerstand zu jeder Zeit nach absolutem Maasse bestimmt werden kann, sondern es wird ausserdem erfordert, jederzeit auf dem Wege der Beobachtung auch über *Gleichheit oder Ungleichheit* zweier Leiter entscheiden und dadurch zur Herstellung von *Widerstandsskalen* nach absolutem Maasse in Stand gesetzt zu werden. Die zur Ausführung solcher Beobachtungen zu treffenden Einrichtungen sollen zum Gegenstand genauerer Erörterung in einer künftigen Abhandlung gemacht werden.

Solche Einrichtungen vorausgesetzt, kann auch die Kenntniss *elektromotorischer Kräfte* nach absolutem Maasse aus gewonnener Kenntniss absoluter *Widerstände* und *Stromintensitäten* erlangt werden, wie aus folgendem Beispiele sich näher ergiebt, welches zeigt, wie absolute Maassbestimmungen *elektromotorischer Kräfte* einer Volta'schen Säule oder einer Induktionsmaschine *und deren Aenderungen* zugleich mit den *Widerständen derselben und deren Aenderungen* gewonnen werden können.

Setzt man voraus, was entweder wirklich Statt findet oder leicht herzustellen ist, dass die Widerstände des Induktors und Multiplikators gleich seien, und bezeichnet mit e und x die *elektromotorische Kraft* und den *Widerstand* der Säule oder Induktionsmaschine *zu Anfang*, ferner mit $e+\varepsilon$ und $x+\xi$ dieselben zu irgend einer späteren Zeit, und bezeichnet endlich *drei zu Anfang gemessene Stromintensitäten* mit i^0, i' und i'', und dieselben zu jener späteren Zeit mit i_0, $i_,$ und $i_{,,}$, wo nämlich i^0 und i_0 die Stromintensitäten der Säule oder Induktionsmaschine sind, wenn dieselbe blos durch den den *Multiplikator* bildenden Theil des Normalleiters geschlossen wird, folglich der Widerstand der Kette $=x+\frac{1}{2}w$ ist; ferner i' und $i_,$ dieselbe Bedeutung für die durch den *ganzen Normalleiter* geschlossene Kette haben, der Widerstand der Kette folglich $=x+w$ ist; endlich i'' und $i_{,,}$ auch dieselbe Bedeutung haben, aber für die von beiden Theilen des Normalleiters, *Multiplikator und Induktor neben einander*, geschlossene Kette, deren Widerstand folglich $=x+\frac{1}{4}w$ ist.

Nach den Ohm'schen Gesetzen ergiebt sich hieraus für die Ströme *zu Anfang:*

$$i^0=\frac{e}{x+\frac{1}{2}w},\qquad i'=\frac{e}{x+w},\qquad i''=\frac{e}{x+\frac{1}{4}w};$$

für die Ströme zur *anderen Zeit:*

$$i_0 = \frac{e+\varepsilon}{x+\xi+\frac{1}{2}w}, \qquad i_{,} = \frac{e+\varepsilon}{x+\xi+w}, \qquad i_{,,} = \frac{e+\varepsilon}{x+\xi+\frac{1}{4}w}.$$

Aus den drei ersten Gleichungen folgt:

$$2\frac{x}{w} = \frac{i'}{i^0 - i'} - 1 = \frac{1}{2}\frac{i''}{i'' - i^0} - 1;$$

aus den drei letzten Gleichungen folgt:

$$2\frac{x+\xi}{w} = \frac{i_{,}}{i_0 - i_{,}} - 1 = \frac{1}{2}\frac{i_{,,}}{i_{,,} - i_0} - 1;$$

und hieraus wird erhalten:

$$i'' = \frac{2i^0 i'}{3i' - i^0} \quad \text{und} \quad i_{,,} = \frac{2i_0 i_1}{3i_{,} - i_0}.$$

Es brauchen daher nur die beiden Ströme i^0 und i' *zu Anfang* und die beiden Ströme i_0 und $i_{,}$ zur *anderen Zeit* gemessen zu werden, weil der dritte Strom i'' oder $i_{,,}$ aus ihnen berechnet werden kann. Die *Messung* der beiden Ströme i'' und $i_{,,}$ dient daher nur zur Vergleichung der berechneten Werthe mit den gemessenen, und dadurch zur *Prüfung* der Genauigkeit der Messungen.

Aus der Differenz obiger Werthe von x/w und $(x+\xi)/w$ ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{\xi}{w} = \frac{1}{4}\left(\frac{i_0}{i_0 - i_{,}} - \frac{i^0}{i^0 - i'}\right),$$

und aus obigen Gleichungen für i^0, i', i_0 und $i_{,}$

$$e = \left(x + \frac{1}{2}w\right) i^0 = (x+w)\, i',$$

$$e + \varepsilon = \left(x + \xi + \frac{1}{2}w\right) i_0 = (x + \xi + w)\, i_{,},$$

woraus erhalten wird

$$\frac{e}{w} = \frac{1}{2}\frac{i^0 i'}{i^0 - i'} \quad \text{und} \quad \frac{e+\varepsilon}{w} = \frac{1}{2}\frac{i_0 i_{,}}{i_0 - i_{,}},$$

folglich

$$\frac{\varepsilon}{w} = \frac{1}{2}\left(\frac{i_0 i_{,}}{i_0 - i_{,}} - \frac{i^0 i'}{i^0 - i'}\right).$$

Es bedarf also, ausser den *zu Anfang* zu machenden Messungen der Ströme i^0 und i', für jede *andere Zeit* nur noch der Messung der Ströme i_0 und $i_{,}$, um die Aenderung der *elektromotorischen Kraft* sowohl als auch des *Widerstandes* der Säule oder Induktionsmaschine in der Zwischenzeit zu erfahren, und diese beiden Messungen unterscheiden

sich von einander blos dadurch, dass zwischen Säule (oder Induktionsmaschine) und Multiplikator der Induktor entweder ausgeschlossen bleibt oder eingeschaltet wird, was ohne Zeitverlust vermittelst eines Kommutators leicht bewerkstelligt werden kann.

Werden die Ströme mit der Tangentenboussole gemessen, deren Multiplikator vom Normalleiter gebildet wird, so wird

$$i^0 = \frac{T}{q}\operatorname{tang} v^0,\quad i' = \frac{T}{q}\operatorname{tang} v',\quad i_0 = \frac{T}{q}\operatorname{tang} v_0,\quad i_{\prime} = \frac{T}{q}\operatorname{tang} v'$$

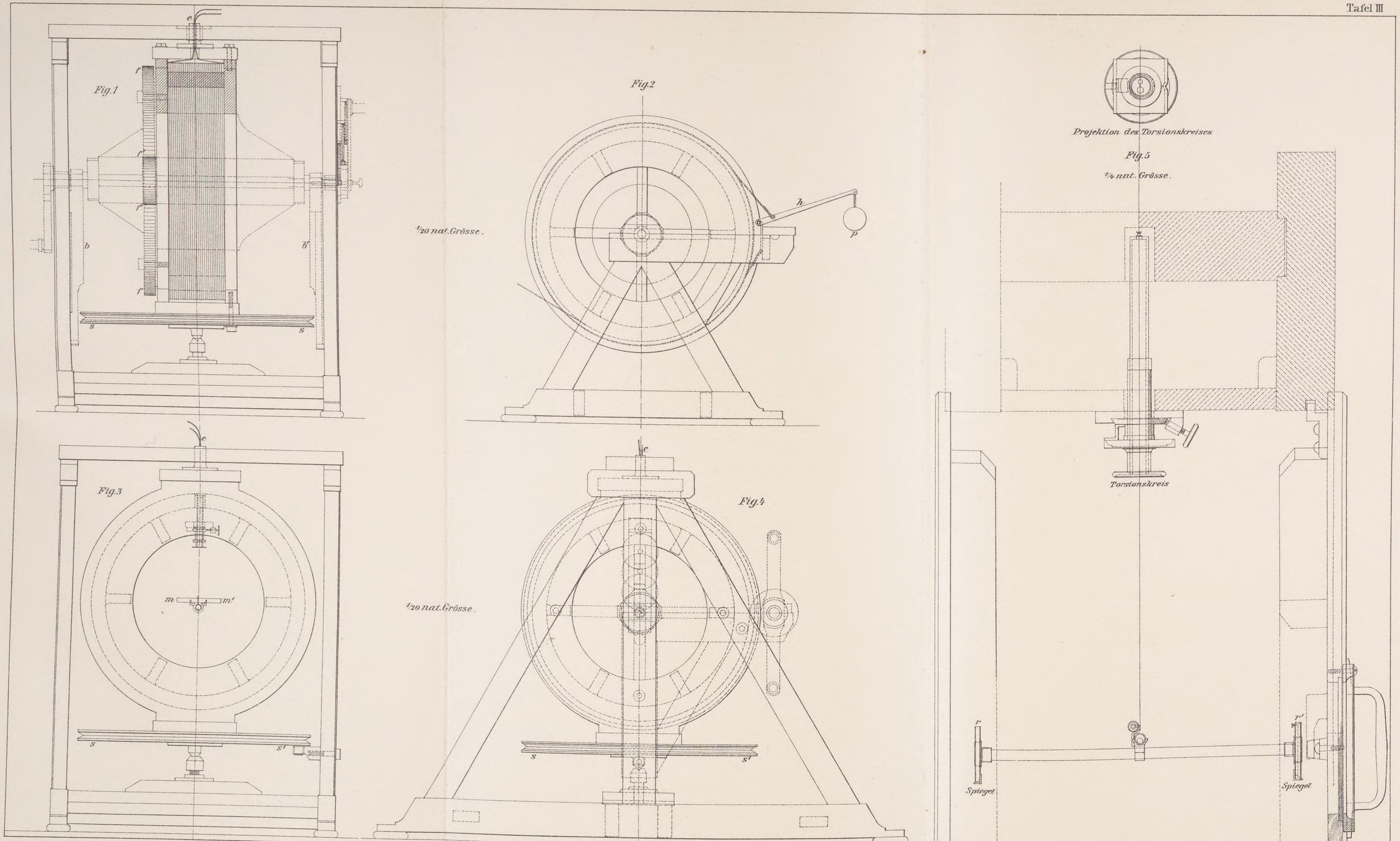
gefunden, wo T die horizontale Komponente des Erdmagnetismus, und v^0, v', v_0, $v_{\prime}$ die beobachteten von den Strömen i^0, i', i_0, $i_{\prime}$ hervorgebrachten Nadelablenkungen bezeichnen, und q die aus der Konstruktion des Multiplikators bekannte Konstante. Substituirt man diese Werthe, so erhält man

$$\frac{\xi}{w} = \frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{tang} v_0}{\operatorname{tang} v_0 - \operatorname{tang} v_{\prime}} - \frac{\operatorname{tang} v^0}{\operatorname{tang} v^0 - \operatorname{tang} v'}\right),$$

$$\frac{\varepsilon}{w} = \frac{T}{2q}\left(\frac{\operatorname{tang} v_0 \operatorname{tang} v_{\prime}}{\operatorname{tang} v_0 - \operatorname{tang} v_{\prime}} - \frac{\operatorname{tang} v^0 \operatorname{tang} v'}{\operatorname{tang} v^0 - \operatorname{tang} v'}\right).$$

In allen Fällen, wo der *absolute Werth* der zu messenden elektromotorischen Kräfte besonders in Betracht kommt, dürfte es angemessen erscheinen, jeder solchen Beobachtungsreihe eine genaue Widerstandsmessung des Normalleiters vorausgehen und folgen zu lassen. Doch kann derselbe Zweck noch leichter und vollkommener dadurch erreicht werden, dass zwischen den angegebenen Strommessungen i^0, i' und i_0, $i_{\prime}$ eine Beobachtungsreihe zur Bestimmung der bei einer blos aus Induktor und Multiplikator gebildeten Kette durch einen Induktionsstoss hervorgebrachten *Nadelelongation* a eingeschaltet wird, welche in einer ebensolchen Reihe von *Induktionsbeobachtungen* besteht, wie bei jeder Widerstandsmessung zur Bestimmung der Geschwindigkeit C gemacht wurde.

Sind ausserdem aus vorher oder nachher gemachten Schwingungs- und Torsions-Beobachtungen die Werthe T', T, λ', λ bekannt, so kann C und a bestimmt werden und es wird $w = \pi^2\,[pq/CT^2]$ gefunden. Die Untersuchung der elektromotorischen Kraft und des Widerstandes einer Säule oder Induktionsmaschine und deren Variationen wird dadurch selbstständig und unabhängig von allen willkürlichen Voraussetzungen gemacht.


Fig.1
e
b
b'
s
s
1/20 nat. Grösse.
Fig.2
h
p
Fig.3
e
m
m'
s
s'
Fig.4
e
s
s'
1/20 nat. Grösse.
Projektion des Torsionskreises
Fig.5
1/4 nat. Grösse.
Torsionskreis
r
r'
Spiegel
Spiegel

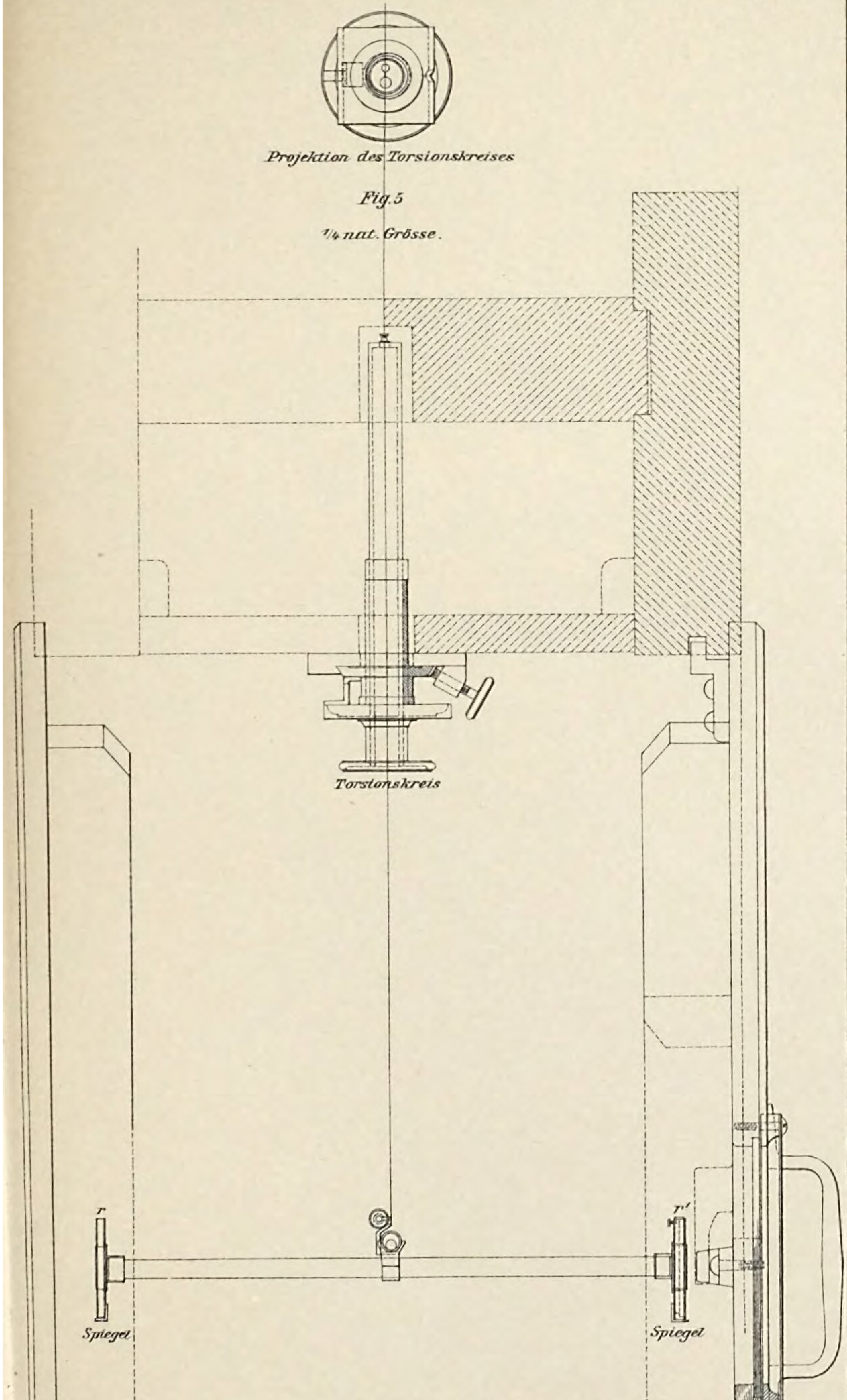

Projektion des Torsionskreises
Fig. 5
1/4 nat. Grösse.
Torsionskreis
r
r'
Spiegel
Spiegel

Fig. 1

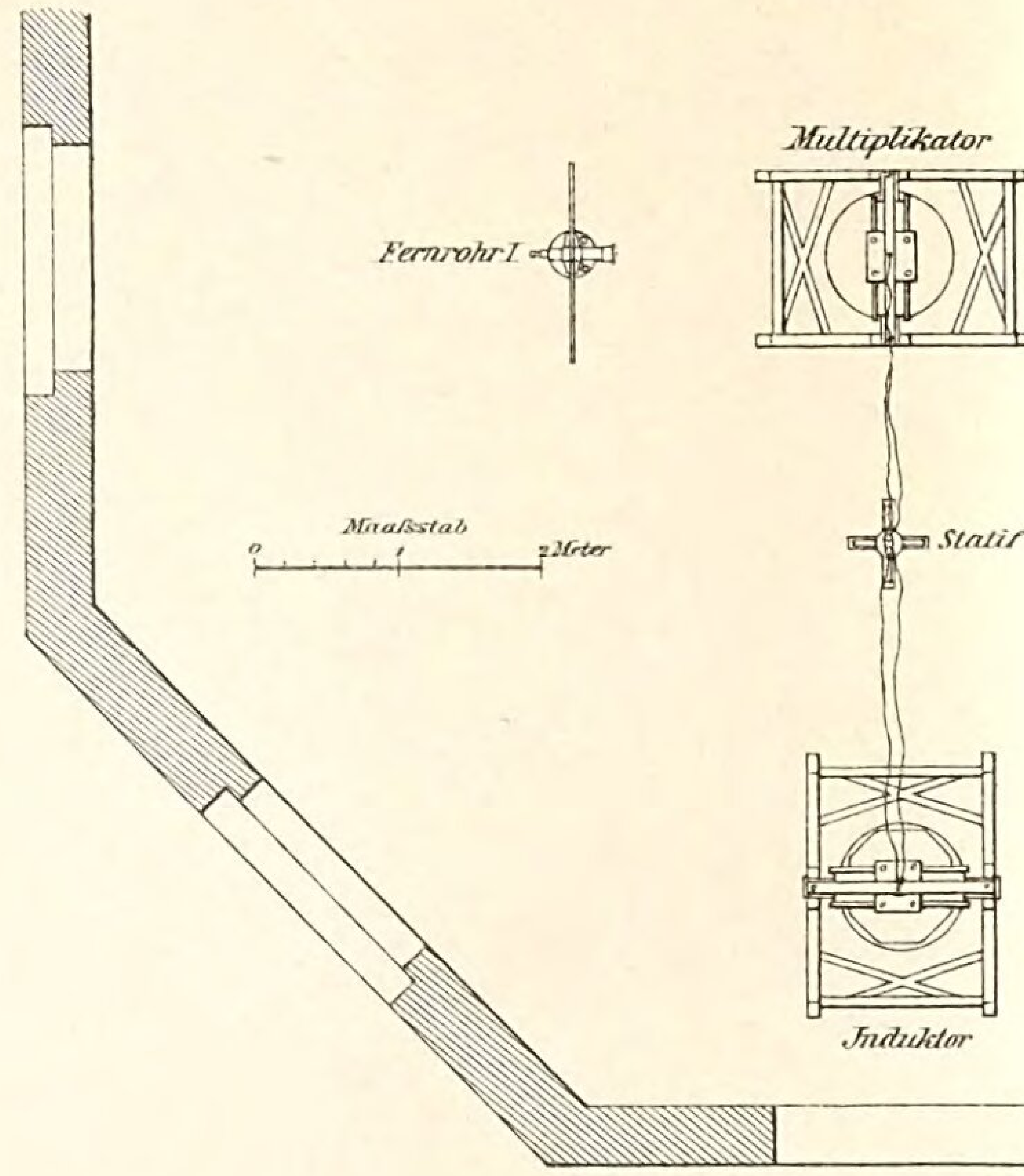
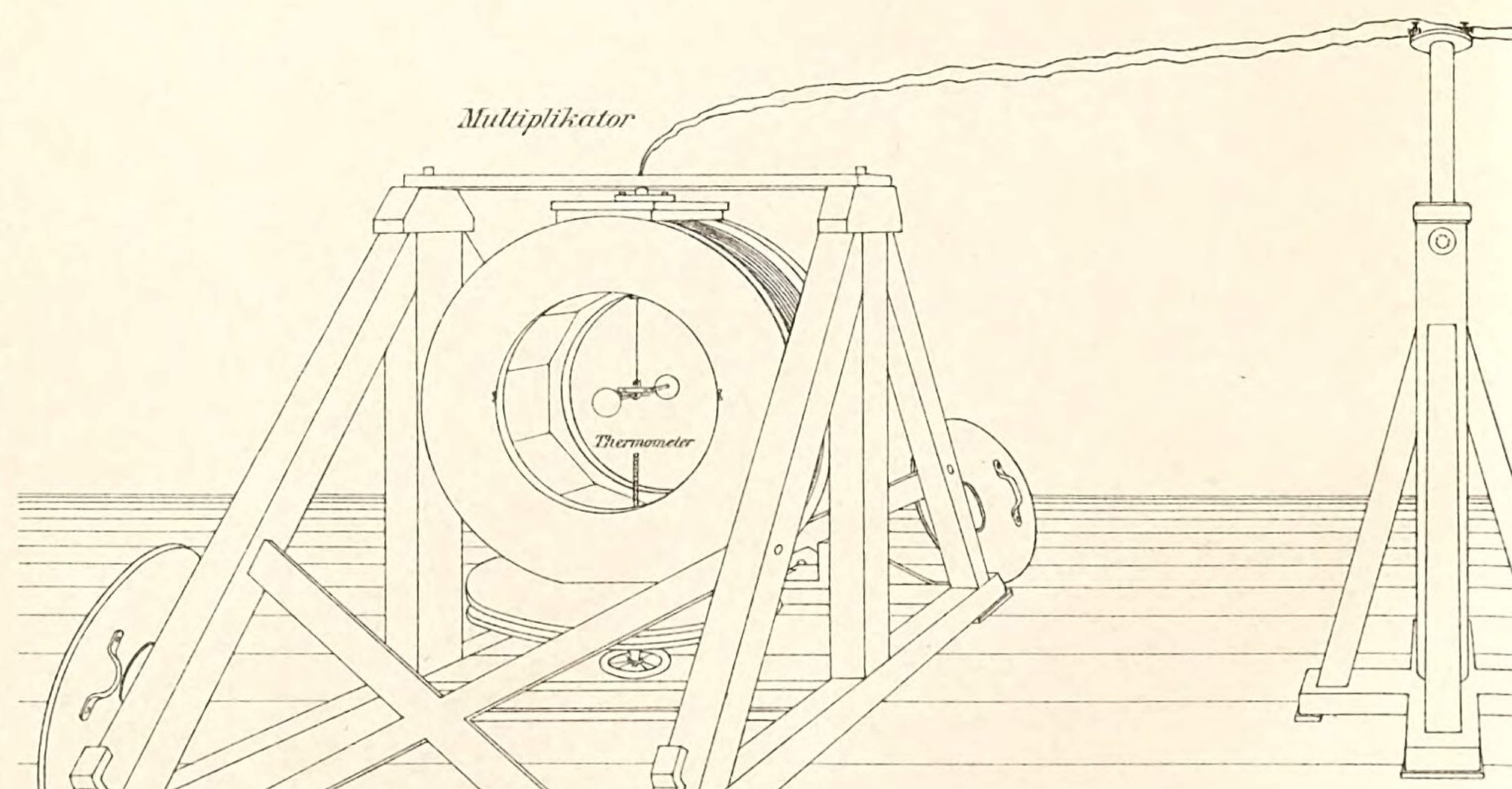
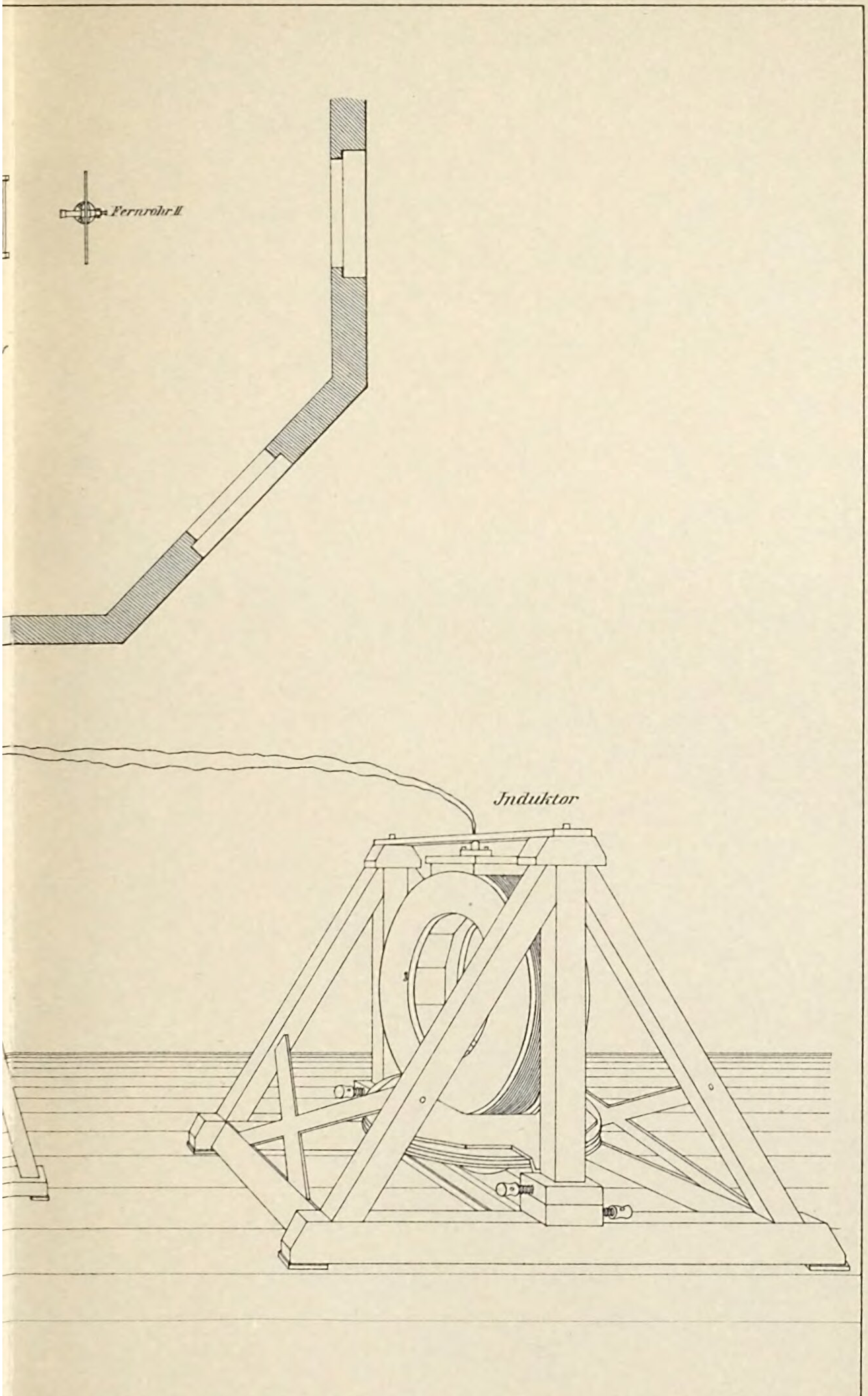

Multiplikator
Fernrohr I.
Maaßstab
2 Meter
Statif
Induktor

Fig. 2


Multiplikator
Thermometer


Fernrohr II
Induktor

HANDSCHRIFTLICHER NACHLASS.

Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über den Zusammenhang des elektrischen Grundgesetzes mit dem Gravitationsgesetze.

1.

Ueber Zurückführung qualitativer Verschiedenheiten der Körper auf quantitative, nach der Annahme, dass alle ponderabelen Moleküle Verbindungen positiv und negativ elektrischer Moleküle seien.

Von den *ponderabelen Körpern* im Weltenraume im *festen, flüssigen* und *luftförmigen* Aggregatzustande sind *imponderabele* Körper unterschieden worden, insbesondere der *Lichtstoff, Wärmestoff, zwei elektrische* und *zwei magnetische* Stoffe, und es ist hiernach die ganze Physik eingetheilt worden in die Mechanik der ponderabelen *festen, flüssigen* und *luftförmigen* Körper und in die Lehre vom *Lichte,* von der *Wärme*, der *Elektricität* und dem *Magnetismus.*

In Folge weiterer Entwickelung dieser Lehren ist nun aber die vom *Magnetismus* nebst deren Erweiterung durch die Lehre vom Diamagnetismus, ganz von der *Elektricitätslehre* absorbirt worden, wodurch die *Annahme zweier besonderen magnetischen Stoffe* weggefallen ist. Ebenso ist die Unterscheidung eines *Lichtäthers* für Lichtstrahlen von einem *Wärmeäther* für Wärmestrahlen fallen gelassen worden; es blieb jedoch *ein Aether* für Licht- und Wärmestrahlen und ein *Wärmestoff* übrig als Träger der Wärme im Inneren ponderabeler Körper, besonders metallischer Wärmeleiter.

Es ist interessant, diesen Entwickelungsgang der physikalischen Forschungen weiter zu verfolgen und zwar, indem man beachtet:

Erstens, dass die *Lehre vom Magnetismus* von der Elektricitätslehre nur absobirt werden kann unter Voraussetzung *beweglicher Theile im Innern* aller magnetischen und magnetisirbaren Körper, nämlich *positiv elektrischer* Moleküle, welche *Molekularströme* um die ponderabelen, mit *negativer* Elektricität geladenen Moleküle im Innern aller magnetisirbaren Körper bilden.

Zweitens, indem man ferner beachtet, dass die *Lehre vom Galvanismus und der Wärme,* um gleichfalls von der Elektricitätslehre absorbirt zu werden, im Innern aller galvanischen Leiter und Wärmeleiter ebenfalls bewegliche Theile als vorhanden voraussetzen müssen; dass es aber keineswegs *andere Theile* zu sein brauchen, deren Bewegung im *Innern ponderabeler Körper* den *Magnetismus, andere,* deren Bewegung den *Galvanismus* und noch andere, deren Bewegung die *Wärme* erzeuge, sondern dass *dieselben Theile* nach Verschiedenheit ihrer Bewegungen *Magnetismus, Galvanismus* und *Wärme,* bald zusammen, bald einzeln erzeugen können, und dass diese beweglichen Theile im Innern der ponderabelen Körper *Moleküle der einen Elektricität* seien, welche die *positive Elektricität* genannt werden soll.

Drittens ist dabei zu beachten, dass die Bewegungen dieser positiv elektrischen Moleküle um die negativ elektrisch geladenen *ponderabelen Moleküle* der Körper *entweder* geschlossene Kreisbahnen bilden, oder von Kreisbahnen wenig abweichende Spiralbahnen mit *periodisch* bald wachsendem bald abnehmendem Halbmesser, *oder* endlich spiralförmige Bahnen mit *fortgesetzt wachsendem* Halbmesser, wodurch sie endlich in *Wurfbewegung* übergehen und der Uebergang dieser elektrischen Moleküle von *einem ponderabelen Moleküle* zu einem *anderen benachbarten ponderabelen Moleküle* bewirkt wird, worauf theils die *Wärmeleitung,* theils die Bildung *galvanischer Ströme* in metallischen Leitern beruht.

Viertens endlich ist auch noch zu beachten, dass durch *magnetische oder elektrodynamische Induktion von Aussen her* Kreisströme um die *ponderabelen Moleküle* eines Körpers erregt, oder schon vorhandene Kreisströme *verstärkt, geschwächt* oder *anders gerichtet* werden können.

Es ergiebt sich hierbei von selbst, dass zu denjenigen ponderabelen Körpern, um deren Moleküle *positiv elektrische Moleküle* in Kreisbahnen jedoch mit wachsendem Halbmesser sich bewegen, die in *Wurfbewegung* übergehen und dadurch von denjenigen *ponderabelen* Molekülen, um welche sie sich drehten, zu benachbarten *ponderabelen Molekülen* geführt werden, *alle metallischen Wärme- und Elektricitätsleiter* gehören; dass dagegen zu den *ponderabelen Körpern,* um deren Moleküle zwar positive elektrische Moleküle sich herum bewegen, aber nur in *engeren Kreisen ohne in Wurfbewegung überzugehen* (die also weder Wärmeleiter noch auch Elektricitätsleiter sind), während der übrige grössere Theil des zwischen den *ponderabelen Molekülen* befindlichen Raumes (gleich dem Weltenraume) mit positiv elektrischen, in Wurfbewegungen oder Wellenbewegungen begriffenen, den Lichtäther bildenden Molekülen erfüllt ist, alle durchsichtigen Körper, wie Glas und Krystalle gehören.

Was überhaupt die von *elektrischen Molekülen* um *ponderabele Moleküle* gebildeten Molekularströme betrifft, so leuchtet ein, dass zur Fort-

dauer solcher Kreisströme eine von den ponderabelen Molekülen aus wirkende *Anziehungskraft* erfordert wird, und es fragt sich nur, woher diese Anziehungskraft rühre? Ist dazu eine entgegengesetzte elektrische Ladung der ponderabelen Moleküle nothwendig, oder kann das in jedem Centrum befindliche ponderabele Molekül selbst für sich allein jene Anziehungskraft ausüben? Es ergiebt sich, dass diese Anziehungskraft von dem *ponderabelen* Moleküle für sich allein, ohne hinzukommende elektrische Ladung, ausgeübt werden kann, und zwar auf ein darum kreisendes *positiv* elektrisches Molekül sowohl als auch auf ein *negativ* elektrisches, vorausgesetzt, dass folgende beiden Annahmen, welche zuerst von Zöllner klar und bestimmt ausgesprochen worden, begründet sind, nämlich:

1. *dass alle ponderabelen Moleküle blosse Verbindungen gleicher Mengen positiver und negativer Elektricität seien,* und dass

2. *die Anziehungskraft gleicher Mengen ungleichartiger Elektricität grösser sei als die Anstossungskraft derselben Mengen gleichartiger Elektricität.*

Diese beiden Annahmen bilden die Grundlage für diejenige *Lehre von den ponderabelen Körpern,* wonach das für alle diese Körper geltende *Gravitationsgesetz* sich als nothwendige Folge des elektrischen Grundgesetzes ergiebt.

Man übersieht leicht die grosse Bedeutung, welche die Bestätigung obiger Annahmen für die ganze Physik haben würde, wenn man die ausserordentliche Mannigfaltigkeit der *qualitativen Verschiedenheiten* ponderabeler Körper beachtet, welche sämmtlich darnach auf blosse *quantitative,* aus dem elektrischen Grundgesetz ableitbare Verschiedenheiten müssten zurückgeführt werden können.

2.

Ableitung des Gravitationsgesetzes aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung nach Zöllner.

Die Ableitung des Gravitationsgesetzes aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung nach Zöllner bedarf näherer Entwickelung, um darauf weiter bauen zu können.

Nach Zöllner wird angenommen, dass jedes *ponderabele Molekül* aus einem oder mehreren Molekülen positiver und einem oder mehreren Molekülen negativer Elektricität bestehe, wovon ersteres mit $+e$ oder $+ne$, letzteres mit $-e$ oder $-ne$ bezeichnet wird. Der *Zahlenwerth* von e (abgesehen vom Vorzeichen) dient zur Bestimmung der *Elektricitätsmenge* eines Moleküles, unabhängig von der *Elektricitätsart,* die positiv oder negativ sein kann, denn e wird blos von der Wahl des *Längen-* und *Kraftmaasses* abhängig gemacht, indem $e.e$ die *Abstossungskraft* eines

positiv oder negativ elektrischen Moleküls $\pm e$ *auf ein ihm gleiches Molekül in der Entfernungseinheit* bezeichnet.

Es wird ferner angenommen, dass die Grösse e, welche *Elektricitätsmenge* genannt und von der *Masse* ε des Moleküls unterschieden wird, *für alle elektrischen Moleküle gleich* sei, und dass folglich das aus $+e$ und $-e$ zusammengesetzte *ponderabele Molekül* stets *neutral* sei, d. h. sich ganz gleich zu einem $+e$ wie zu einem $-e$ verhalte. Dasselbe gilt auch von ponderabelen Molekülen, die aus $+2e$ und $-2e$, oder aus $+3e$ und aus $-3e$ u. s. w. zusammengesetzt sind.

Aus dieser Gleichheit der *Elektricitätsmengen,* welche nach Zöllner für *alle einfachen elektrischen Moleküle* gilt, worauf die *Neutralität* der aus gleicher Zahl positiv und negativ elektrischen Moleküle gebildeten *ponderabelen Moleküle* beruht, folgt nun zwar auch die *Massengleichheit* aller *positiv elektrischen* Moleküle untereinander, ebenso wie aller *negativ elektrischen* untereinander, aber es folgt daraus keineswegs die *Massengleichheit positiv und negativ elektrischer Moleküle,* sondern es muss die Entscheidung über Gleichheit oder Ungleichheit ihrer Masse der Erfahrung vorbehalten bleiben, sei es durch Ausführung direkter *Massenmessung* oder auf indirektem Wege durch Erforschung ihres Zusammenhanges mit anderen messbaren Erscheinungen.

Es ergiebt sich hiernach aus dem *Grundgesetze der elektrischen Wirkung* die Kraft, mit welcher *zwei ponderabele Moleküle,* wo von jedes aus $+e$ und $-e$ zusammengesetzt ist, auf einander wirken, als die Summe von vier Kräften, welche die beiden Bestandtheile $+e$ und $-e$ des *einen ponderabelen Moleküls* aus beliebiger Entfernung r bei relativer Ruhe oder Bewegung auf die beiden Bestandtheile $+e$ und $-e$ des *anderen ponderabelen Moleküls* ausüben, nämlich *erstens* die beiden *Abstossungskräfte* der in den ponderabelen Molekülen enthaltenen *gleichartig elektrischen* Moleküle:

die *Abstossungskraft* von $+e$ und $+e = \frac{ee}{r^2}\left(1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right)$

die *Abstossungskraft* von $-e$ und $-e = \frac{ee}{r^2}\left(1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right)$;

zweitens die beiden *Anziehungskräfte* der in denselben ponderabelen Molekülen enthaltenen *ungleichartig elektrischen* Moleküle, welche nach Zöllner's Annahme grösser, im Verhältniss von $1:1+\alpha$, gesetzt werden sollen, nämlich

die *Anziehungskraft* von $+e$ und $-e$

$$= -(1+\alpha)\frac{ee}{r^2}\left(1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right),$$

die *Anziehungskraft* von $-e$ und $+e$

$$=-(1+a)\frac{ee}{r^2}\left(1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right).$$

Hieraus resultirt *ein negativer Werth der Abstossungskraft* (d. i. eine Anziehungskraft) der *beiden ponderabelen Moleküle,* deren jedes aus einem $+e$ und einem $-e$ besteht, nämlich der Werth

$$-2a\frac{ee}{r^2}\left(1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right),$$

worin der unbekannte Werth von a dadurch bestimmt werden kann, dass obige Kraft, von der a ein Faktor ist, der *bekannten* von den beiden ponderabelen Molekülen auf einander ausgeübten *Gravitationskraft* gleichgesetzt wird.

Hierbei ist angenommen worden, dass die beiden einem *ponderabelen Moleküle* angehörigen *elektrischen Moleküle* stets in verschwindend kleiner Entfernung von einander bleiben.

Bezeichnet man nun mit V das *Potential* der beiden ponderabelen Moleküle und folglich ihre *Abstossungskraft* mit

$$\frac{dV}{dr}=-2a\frac{ee}{r^2}\left(1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right),$$

so ergiebt sich jenes *Potential*

$$V=-2a\frac{ee}{r}\left(1-\frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}\right).$$

Wird nun ferner die Masse von $+e$ mit ε, die Masse von $-e$ mit $a\varepsilon$ bezeichnet, so ergiebt sich hieraus die Beschleunigung des *einen* ponderabelen Moleküls in der Richtung r, $=1/\varepsilon.[dV/dr]$, die des *anderen* in entgegengesetzter Richtung $=1/a\varepsilon.[dV/dr]$; folglich die relative Beschleunigung des ersteren Moleküls gegen letzteres

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{1+a}{a\varepsilon}\cdot\frac{dV}{dr}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $2dr$, so erhält man folgende Differentialgleichung:

$$2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d^2r}{dt}=2\frac{1+a}{a\varepsilon}dV,$$

und durch Integration derselben von $r=r_0$ bis $r=r$, wenn r_0 denjenigen Werth von r bezeichnet, für welchen $[dr/dt]=0$ ist,

$$\frac{dr^2}{dt^2}=\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{4aee}{\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}\right)-\frac{1}{r_0}\right],$$

oder, wenn $dr^2/dt^2 = c^2 u^2$ und die Konstante

$$\frac{4(1+a)}{a\varepsilon} \cdot aee = c^2 \varrho$$

gesetzt wird,

$$u^2 = \varrho \left[\frac{1}{r}(1-u^2) - \frac{1}{r_0}\right],$$

dieselbe Gleichung, welche in den Elektrodynamischen Maassbestimmungen, 7. Abh., S. 668,[1]) für zwei ungleichartig elektrische Moleküle e und e' gefunden worden ist, nur dass hier, wo es sich um Wechselwirkung *ponderabeler* Moleküle handelt, der Faktor $2a$ dem Werthe von ϱ beigefügt und $-e$ und $a\varepsilon$ für e' und ε' gesetzt worden ist.[2])

Hieraus ergiebt sich also für die Wechselwirkung zweier relativ in Ruhe befindlicher Moleküle, welche aus *gleichen Mengen* positiver und negativer Elektricität bestehen, dasselbe Gesetz wie für zwei dem Gravitationsgesetze unterworfene Moleküle für alle Entfernungen, gegen welche ϱ als verschwindend betrachtet werden darf; nur für *Molekulardistanzen,* für welche dies nicht der Fall ist, ergeben sich Abweichungen vom NEWTON'schen Gesetze, welche, wenn sie sich bestätigten, zum besten Beweise dienen würden, dass die ponderabelen Moleküle *wirklich aus gleichen Mengen* positiver und negativer Elektricität beständen.

Solche *Molekulardistanzen* kommen nun bei den *ponderabelen Gasmolekülen* nach der *dynamischen Gastheorie* besonders in Betracht. MAXWELL (On the Dynamical Theory of Gases, Philos. Transact. Vol. 157, Part. I, pag. 49 ff.) hat schon gefunden, dass das zur Erklärung des Verhaltens der Gase nach dieser Theorie nothwendig anzunehmende Gesetz der Zurückwerfung und Zerstreuung der in Wurfbewegung befindlichen Gasmoleküle bei ihren Begegungen (was nicht auf das NEWTON'sche Gravitationsgesetz begründet werden kann) auf eine besondere zum Zwecke dieser Erklärung anzunehmende, der 5. Potenz der Entfernung der Moleküle proportionale Abstossungskraft begründet werden könne,

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. IV, p. 385.]

[2]) Aus der oben angeführten Gleichung, worin die Geschwindigkeit u in Theilen der aus dem elektrischen Grundgesetze bekannten Geschwindigkeit c ausgedrückt ist, nämlich aus $u^2 = \varrho\,([1/r](1-u^2) - 1/r_0)$, erhält man $u = \pm\sqrt{[\varrho/r_0]\cdot[(r_0 - r)/[(r+\varrho)]}$, d. i. für jede Entfernung r zwei entgegengesetzt gleiche Werthe von u, nämlich einen *positiven* für den Fall wechselseitiger Entfernung der Moleküle, und einen *negativen* für den Fall der Annäherung. Betrachtet man hier $r_0 - r = s$ als *Fallraum* von der Ruhe ab, indem man sich das eine ponderabele Molekül durch die in einem Punkte konzentrirt gedachte Erdmasse, das andere Molekül durch den fallenden Stein vertreten denkt und u als die in Theilen von c ausgedrückte Fallgeschwindigkeit des Steines v, d. i. $cu = v$, so ergiebt sich $v^2/s = \varrho c^2/[r_0(r_0+\varrho)]$, d. i. das *Gallilei'sche Fallgesetz*, worin die Konstante $\varrho c^2/[r_0(r_0+\varrho)]$ die Bedeutung der im Gallilei'schen Fallgesetz gewöhnlich mit $2g$ bezeichneten *Konstanten* hat.

deren Annahme jedoch anderweitig in keiner Weise zu rechtfertigen wäre. — Jede solche willkürliche Annahme wird nun aber ganz beseitigt, wenn alle ponderabelen Moleküle, folglich auch alle Gasmoleküle, Verbindungen *gleicher Mengen positiver und negativer Elektricität* sind, weil für solche Moleküle das Gravitationsgesetz nur für grössere Entfernungen gilt, für Molekulardistanzen dagegen das *Gesetz der Zurückwerfung und Zerstreuung* sich auf ähnliche Weise ergiebt, als wie für zwei in Wurfbewegung befindliche *gleichartig elektrische* Moleküle, die einander begegnen, nach der in den Elektrodynamischen Maassbestimmungen, 7. Abhandlung, Art. 7, entwickelten Theorie.[1])

Besondere Beachtung verdient noch bei dieser Wechselwirkung *zweier* aus gleichen Mengen positiver und negativer Elektricität gebildeten *ponderabelen Molekülen,* dass von dem einen Moleküle auf *beide Bestandtheile des anderen,* sowohl auf den positiven als auf den negativen *gleiche* Kräfte und zwar *Anziehungskräfte* ausgeübt werden, deren Summe die von einem Moleküle auf das andere ausgeübte *Gravitationskraft* giebt.

Vermöge der hiernach von einem jeden *ponderabelen* Moleküle nicht blos auf ein anderes *gleiches* Molekül, sondern auch auf jeden seiner beiden *Bestandtheile* ausgeübten Anziehungskraft würden alle diejenigen ponderabelen Moleküle, welche *zuerst* mit *positiv elektrischen* Molekülen zusammengetroffen wären, dieselben als *positiv elektrische Trabanten* an sich gefesselt haben, dagegen würden andere *ganz gleiche* ponderabele Moleküle, welche zuerst mit *negativ elektrischen* Molekülen zusammengetroffen wären, dieselben als *negativ elektrische Trabanten* gefesselt haben, wonach *alle ponderabelen Moleküle* in drei Klassen zerfallen würden, welche als *positiv ponderabele, negativ ponderabele* und *neutrale* unterschieden werden könnten, von denen die letzten solche ponderabele Moleküle wären, die noch keine Trabanten an sich gezogen hätten.

Wenn alle diese Trabanten mit den ponderabelen Molekülen immer auf gleiche Weise verbunden blieben, so würden sie als dazu gehörig zu betrachten sein, wonach *ihre Masse der Masse des ponderabelen Moleküls,* dem sie angehören, hinzuzufügen sein würde, und die von den Trabanten *zweier* ponderabeler Moleküle wechselseitig, sowie die von jedem der beiden Trabanten auf dasjenige der beiden ponderabelen Moleküle, dem er selbst nicht angehört, ausgeübte Kraft der *Gravitationskraft des Molekülenpaares* nach Verschiedenheit der Vorzeichen zu addiren oder zu subtrahiren sein würde.

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. IV, p. 389.]

3.

Ueber die Unzulänglichkeit direkter Versuche zur Entscheidung der Frage, ob bei gleichen Elektricitätsmengen die Anziehungskraft zweier ungleichartig elektrischer Moleküle wirklich grösser sei als die Abstossungskraft zweier gleichartig elektrischer Moleküle.

Es lassen sich metallische Konduktoren, z. B. Hohlkugeln von Kupfer, darstellen, welche mit gleichen Mengen positiver oder negativer Elektricität geladen sind, und es lassen sich die von je zwei von ihnen bei gleicher Entfernung ausgeübten Abstossungs- oder Anziehungskräfte mit grosser Genauigkeit messen. Wäre die Genauigkeit dieser Messungen gar nicht beschränkt, so leuchtet ein, dass dadurch müsste entschieden werden können, ob bei gleich starken Ladungen die *Anziehungskraft ungleichartig geladener Konduktoren* grösser sei, als die *Abstossungskraft gleichartig geladener Konduktoren* oder nicht.

Die genauesten Instrumente und Versuche, welche zum Zweck ähnlicher Messungen ausgeführt worden sind, sind in der vierten Abhandlung der Elektrodynamischen Maassbestimmungen[1]) beschrieben worden, und es fragt sich also, ob mit denselben Instrumenten auch die Messungen zur Entscheidung obiger Frage würden ausgeführt werden können.

Mit einer solchen Drehwage, wie dort beschrieben worden, würden nun zwar sowohl die *Abstossungskräfte* zweier *gleich elektrisch* geladenen Kugeln, als auch die *Anziehungskraft* zweier *ungleich elektrisch* geladenen Kugeln gemessen werden können; doch sieht man leicht ein, dass in letzterem Falle, wenn die eine Kugel positiv, die andere negativ geladen ist, die *gleiche Stärke* der beiden Ladungen sich nur durch ihre vollkommene Entladung bei wechselseitiger Berührung genau prüfen lasse. Um daher auch für diesen Fall Sicherheit für *gleiche Ladungsstärke* unmittelbar vor der Entladung zu gewinnen, worauf es hier wesentlich ankommt, kann man nur *zwei ganz gleiche Torsionswagen* zugleich in Anwendung bringen, indem die *drehbare Kugel* der einen Torsionswage *positiv*, die andere *negativ* geladen wird. Zu der drehbaren Kugel jeder Torsionswage gehört aber eine ganz gleiche *feste Standkugel*, welche bei der Ladung von der drehbaren Kugel berührt worden ist, wodurch die Ladungsgleichheit beider Kugeln jedes Paares verbürgt ist. Nun kann zwar die Stärke der Ladung des *positiv* geladenen Paares von der des *negativ* geladenen verschieden sein; diese Verschiedenheit ist aber durch Messung ihrer *Abstossungskräfte* genau bestimmbar. Werden diese Abstossungskräfte der positiv geladenen

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 670.]

denen der negativ geladenen gleich gefunden, so folgt daraus die *Gleichheit der absoluten Werthe jener positiven und dieser negativen Ladungen.*

Diese *beiden Standkugeln* sollen nun aber ferner mit einander durch eine *gut isolirende Schellackstange* fest verbunden sein, und diese Schellackstange soll in ihrer Mitte mit einem festen Querzapfen versehen sein, um welchen sie so gedreht werden kann, dass nach halber Umdrehung beide Standkugeln ihre Plätze vertauscht haben, so dass die Abstände der beiden Standkugeln von den drehbaren Kugeln der beiden Torsionswagen unverändert geblieben sind.

Bezeichnet man die gleichen Ladungen der drehbaren Kugel und der festen Standkugel der *ersten Torsionswage* mit $+e$ und ihren Abstand von einander mit r, und dieselben Grössen bei der *zweiten Torsionswage* mit $-e'$ und r', so erhält man *vor Vertauschung der Standkugeln* die beiden mit den beiden Drehwagen gemessenen *Abstossungskräfte* f und f' gleich ee/r^2 und $e'e'/r'^2$; *nach Vertauschung der Standkugeln* aber die gemessenen *Anziehungskräfte* g und g' gleich $-(1+a).ee'/r^2$ und $-(1+a)e'e/r'^2$, woraus sich das Verhältniss des Produktes der beiden *gemessenen Abstossungskräfte* zu dem der beiden *gemessenen Anziehungskräfte* ergiebt $ff':gg' = 1:(1+a)^2$, wonach a durch die gemessenen Grössen $ff'gg'$ bestimmt werden kann, nämlich $a = \sqrt{gg'/ff'} - 1$.

Aber auch bei grösster Vollkommenheit der zu diesen Messungen hergestellten *Torsionswagen* und höchster Genauigkeit in Ausführung aller Messungen, wird es doch nicht gelingen, für gleichstarke Ladungen einen Unterschied der Grösse der *Anziehungskraft ungleichelektrischer* Ladungen von der Grösse der *Abstossungskraft gleichelektrischer* Ladungen mit Sicherheit nachzuweisen, weil dieser Unterschied viel zu klein ist.[1])

[1]) Sollte sich hiernach also aus allen auch mit den vollkommensten *Torsionswagen* ausgeführten Messungen wirklich ergeben, dass der Werth von a viel zu klein sei, um eine sichere Bestimmung aus solchen Beobachtungen zu gestatten, so bliebe doch noch die Frage übrig, ob nicht auf Grund *anderer Erscheinungen und Beobachtungen* die Grösse a zu bestimmen möglich sei, z. B. auf Grund der so mannigfaltigen, höchstinteressanten Erscheinungen und Beobachtungen, welche die Crookes'schen *Lichtmühlen* darbieten.

Man kennt noch nicht genau die Differenz, welche zwischen der Vorder- und Rückseite der Flügel dieser Lichtmühlen wesentlich und nothwendig sei, damit die Mühle von Lichtstrahlen in Drehung gesetzt werden könne. Ohne eine wenn auch sehr geringe Differenz zwischen beiden Flügelseiten, sei es in ihrer Beschaffenheit oder Gestalt (konvex oder konkav), findet keine Drehung Statt.

Es wäre nun z. B. möglich, dass die bei Crookes'schen Lichtmühlen *nothwendige Verschiedenheit* der Vorderseite und der Rückseite jedes Flügels auf einer *elektrischen Differenz* beruhte, z. B. dass die Vorderseite mehr *positiv elektrisch*, die Rückseite *negativ elektrisch* wäre, und dass der Lichtstrahl die Drehung hervor-

Sollte sich jedoch künftig aus allen auch mit den vollkommensten Instrumenten ausgeführten Messungen ergeben, dass der Werth von a viel zu klein sei, um eine sichere Bestimmung zu gestatten, so würde für den Zweck der Prüfung und Bestätigung der Zöllner'schen Ableitung des Gravitationsgesetzes aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung doch noch der andere in letzterem Gesetze enthaltene Faktor übrig bleiben, nämlich der Faktor $(1 - [1/c^2]\,[dr^2/dt^2] + [2r/c^2]\,[d^2r/dt^2])$, für welchen schon die Nachweisung grosses Interesse haben würde, dass sein Einfluss auf die Bewegung einiger Weltkörper, wenn auch sehr klein, doch noch messbar sei.

Hierüber hat nun zuerst C. Seegers gehandelt in der Abhandlung: De motu perturbationibusque planetarum secundum legem electrodynamicam Weberianam solem ambientium. Scripsit C. Seegers, Gott. 1864, worauf acht Jahre später Prof. Scheibner in Leipzig gefunden hat, dass unter Beibehaltung des numerischen Werthes der Weber'schen Konstanten c ein Unterschied höchstens in der Bewegung des Merkur beobachtet werden könnte, indem hier eine säkulare Aenderung des Perihels von 6,73 Bogensekunden hervorgebracht würde. Bei der Venus würde dieser Einfluss nur noch 1,43 Sekunden betragen. — Endlich hat Tisserand am 30. September 1872 der französischen Akademie eine Abhandlung mitgetheilt: Sur le mouvement des planets autour du Soleil d'après la loi electrodynamique de Weber. Compt. rend. 1872, Sept. 30, worin er für die säkulare Aenderung des Perihels beim Merkur den Werth 6,28, bei der Venus den Werth 1,32 Sekunden findet. So klein diese Korrektionen sein würden, so leuchtet doch die Möglichkeit ihrer Bestätigung oder Widerlegung auf dem Wege genauer Beobachtungen ein.

brächte, indem er wie ein positiv geladener Konduktor wirkt, welcher die ihm zugekehrte *positiv* elektrische *Vorderseite* des einen Flügels *abstiesse* und die ihm zugekehrte *negativ* elektrische *Rückseite* des anderen Flügels *anzöge*.

Wäre dies der Fall, so leuchtet ein, dass man mit dem ersten Paar von Flügeln nur noch ein zweites Paar zu verbinden brauchte, welches mit dem ersten zusammen um dieselbe vertikale Axe gedreht würde. Stände nun das zweite Paar senkrecht über dem ersten, kehrte aber dem Lichtstrahle entgegengesetzte Seite zu, so würde bei vollkommener Symmetrie keine Drehung erfolgen, wenn die *Anziehungskraft ungleich* elektrischer Ladungen, *bei gleicher Ladungsstärke*, der Abstossungskraft gleichelektrischer Ladungen gleich wäre; es würde aber Drehung erfolgen, wenn die Anziehungskraft *ungleichelektrischer Ladungen*, bei gleicher Ladungsstärke, grösser wäre als die Abstossungskraft *gleichelektrischer Ladungen*.

Bei der ausserordentlichen Feinheit und Empfindlichkeit, deren die Lichtmühlen fähig sind, würde man hoffen dürfen, die *Drehungswirkung* dieses wenn auch noch so geringen Ueberschusses jener Anziehungskraft wirklich zu beobachten und daraus die Grösse von a zu bestimmen.

Zur Vergleichung des *nach* Zöllner *aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Gravitationsgesetzes,* wonach zwei gleiche *ponderabele Moleküle,* deren jedes aus einem $+e$ und aus einem $-e$ besteht (wovon jedes auf ein ihm gleiches Molekül bei relativer Ruhe in der Einheit der Entfernung die Einheit der Kraft ausüben würde), auf einander bei beliebiger relativer Geschwindigkeit und Beschleunigung eine *Anziehungskraft* ausüben

$$=2a\frac{ee}{r^2}\left(1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right)$$

mit dem Newton'schen *Gesetze,* wonach *zwei gleiche ponderabele Massen m,* ausgedrückt in Theilen derjenigen Masse, welche auf eine andere Masse in der Einheit der Entfernung die Einheit der beschleunigenden Kraft ausübt, auf einander eine *Anziehungskraft* ausüben

$$=\frac{mm}{r^2},$$

möge noch beigefügt werden, dass wenn n die *Zahl* der aus einem $+e$ und einem $-e$ zusammengesetzten ponderabelen Moleküle bezeichnet, welche *in der nämlichen Masseneinheit,* nach welcher m ausgedrückt ist, enthalten sind, $2anne e/r^2 = mm/r^2$, also

$$n=\frac{m}{e}\sqrt{\frac{1}{2a}}$$

sich ergiebt.

4.

Elektrische Raumerfüllung, insbesondere über die Existenz eines aus lauter gleichartig elektrischen Molekülen bestehenden Aethers — Lichtäthers — in allen von ponderablen Körpern nicht eingenommenen Räumen. — Mannigfaltigkeit ponderabeler Körper.

Die Annahme vom Vorhandensein eines aus lauter gleichartig elektrischen Molekülen bestehenden, in allen Räumen, die von keinen *ponderabelen Körpern* eingenommen sind, verbreiteten *imponderabelen Aethers,* hängt, wie schon im vorigen Artikel bemerkt worden, wesentlich mit der Annahme zusammen, dass alle *ponderabelen Moleküle* aus positiv und negativ elektrischen Molekülen, und zwar in *gleicher Menge* zusammengesetzt seien. Denn es würde sich daraus ergeben, dass wenn in der Welt überhaupt negativ elektrische Moleküle *nicht in gleicher Menge* existirten wie positiv elektrische, der *Ueberschuss an positiv elektrischen*

Molekülen (abgesehen von den möglicher Weise vorhandenen, am Schlusse des ersten Artikels erwähnten, *Trabanten* ponderabler Moleküle, die jedoch von *beiden Arten* elektrischer Moleküle gebildet werden können, ohne dass ein Grund für eine *Mehrzahl der einen* Art vorhanden ist) nothwendig in allen, von keinen ponderabelen Körpern eingenommenen Räumen oder Zwischenräumen verbreitet sein müsse, und zwar in Folge der wechselseitigen Abstossungen, Reflexionen und Zerstreuungen bei allen ihren Begegnungen stets *in nahe gleichmässiger Verbreitung.*

Enthält nun aber auch jedes *ponderabele* Molekül *gleiche Mengen positiver und negativer* Elektricität, welche mit $+e$ und $-e$ bezeichnet werden können, so ist doch durch die *Gleichheit der Mengen* keineswegs die *Gleichheit der Massen,* welche davon unterschieden werden muss, gegeben, und es möge daher die Masse der *Menge* $+e$ mit ε, die Masse der *Menge* $-e$ mit $a\varepsilon$ bezeichnet werden.

Können sich nun aber auch die beiden *gleichen Mengen* zweier ungleichartiger elektrischer Moleküle $+e$ und $-e$ zu einem ponderabelen Moleküle verbinden, so wird dabei doch keine Vereinigung *in einem Punkte* stattfinden, sondern so nahe beide Moleküle dabei einander kommen mögen, werden sie doch immer, indem sie sich um einander drehen, voneinander getrennt bleiben; beide, die zusammen die Masse $(1+a)\varepsilon$ besitzen, werden aber stets in einem sehr kleinen Raume zusammen bleiben, der sich bei unveränderter Drehungsgeschwindigkeit nicht ändert, so dass einem solchen *ponderabelen Moleküle* eine bestimmte *Dichtigkeit* $d = [(1+a)/v] . \varepsilon$ zugeschrieben werden kann.

Hätte nun eine solche Vereinigung *aller negativ elektrischen* Moleküle mit *positiv elektrischen* wirklich stattgefunden, so würden alle daraus entstandenen *ponderabelen* Moleküle zusammen also einen bestimmten *Raum* einnehmen und der ganze übrige Raum würde leer sein, wenn nicht die eine von den beiden Elektricitäten, welche zur *positiven* genommen werden kann, in beträchtlichem *Ueberschuss* vorhanden wäre. Im Falle eines solchen *Ueberschusses* aber würde der ganze übrige Raum von den einander *abstossenden* Molekülen dieser im Ueberschuss vorhandenen Elektricität erfüllt werden, überall in gleichmässiger Vertheilung.

Man bezeichnet alle diese den leeren Weltenraum gleichmässig erfüllenden elektrischen Moleküle als *imponderabelen Aether,* während alle jene *paarweise verbundenen* und auf einen engeren Raum reduzirten Moleküle die *ponderabele* Körperwelt bilden, wonach also, da allen Molekülen *Masse* zukommt, *ponderabele Massen* und *imponderabele Massen* in der Welt von einander unterschieden werden müssen.

Man hat das *Gravitationsgesetz* auch das *Gesetz indifferenter Massenanziehung* genannt, was aber hiernach nicht mit Recht geschehen wäre. Denn existiren auch positiv elektrische Moleküle, welche nicht mit negativ elektrischen zu *ponderabelen* Molekülen verbunden sind, die also der *ponderabelen Körperwelt* nicht angehören, die aber auch *Masse* besitzen, so gilt *für die Massen dieser letzteren Moleküle* nicht das NEWTON'sche *Gravitationsgesetz,* sondern ein ganz anderes Gesetz, nämlich das *Grundgesetz elektrischer Wechselwirkung,* nach welchem nicht immer Anziehung, sondern eben so häufig Abstossung stattfindet, und die Geltung des Gravitationsgesetzes muss auf die Massen jener *paarweise verbundenen* positiv und negativ elektrischer Moleküle, welche *ponderabele Moleküle* genannt worden sind, beschränkt werden. Jene *positiv elektrischen* Moleküle, welche getrennt von den negativ elektrischen existiren und in gleichmässiger Vertheilung den von ponderabelen Körpern leeren *Weltenraum* erfüllen, bilden den sogenannten *Aether* — Lichtäther. —

Gilt das *Gravitationsgesetz* weder für positive elektrische Moleküle für sich, noch für negative für sich, aber für alle durch Verbindung dieser beiden Arten von Molekülen gebildeten *ponderabelen Moleküle,* so leuchtet ein, da alle Eigenschaften *verbundener* Moleküle in den Eigenschaften der *nicht verbundenen* begründet sein müssen, dass das Gravitationsgesetz für alle ponderabelen Moleküle im allgemeinen Gesetze elektrischer Wechselwirkung begründet sein müsse, wie schon Art. 2 nachgewiesen worden ist.

Wären aber alle ponderabelen Körper wirklich blosse Verbindungen positiv und negativ elektrischer Moleküle, so würde es sich darum handeln, wie bei dieser allen ponderabelen Körpern zukommenden wesentlich gleichen Zusammensetzung die *unendliche Mannigfaltigkeit und Verschiedenheit* derselben erklärt werden könnte. Es könnte der *Grund aller dieser Verschiedenheiten* nur in verschiedener *Zahl, räumlicher Gruppirung* und *Bewegungsenergie* der in kleineren Gruppen vereinigten elektrischen Moleküle beider Art, die keinen Veränderungen durch äussere Einflüsse unterworfen zu sein brauchen, gefunden werden. Der Einfluss der *Zahl* und *Gruppirung,* so lange dieselbe unverändert bliebe, würde leichter zu übersehen und zu bestimmen sein, als der Einfluss verschiedener *Bewegungsenergien* der in einer Gruppe vereinigten auf einander einwirkenden Moleküle, deren Gesetze vollständig aus dem bekannten Grundgesetze zu entwickeln, selbst bei Beschränkung auf nur drei Moleküle, noch nicht gelungen ist.

5.

Klassifikation der Körpermoleküle nach Zusammensetzung und Scheidbarkeit.

Giebt es nun zwei Arten von *einfachen* Körpertheilchen, nämlich einfache *positiv elektrische* und einfache *negativ elektrische,* so ist es möglich, dass durch Verbindungen mehrerer elektrischen Theilchen der einen Art mit einander oder der anderen Art mit einander oder auch von Theilchen der einen Art mit Theilchen der anderen Art sehr viele Arten verschieden *zusammengesetzter* Moleküle gebildet werden, und zwar zunächst *unscheidbarer Moleküle.*

Es soll dabei zunächst angenommen werden, dass alle positiv und negativ elektrische Theilchen gleiche *Menge* e und gleiche *Masse* ε besitzen, wonach ee die Kraft ist, mit welcher zwei gleichartige Theilchen, die in der Einheit der Entfernung sich in Ruhe befinden, einander abstossen und ee/ε die Geschwindigkeit, welche diese Kraft jedem der beiden Theilchen in der Zeiteinheit ertheilen würde.

Ein solches zusammengesetztes *unscheidbares Molekül* wird gebildet von *zwei einfachen positiv elektrischen* oder *negativ elektrischen* Theilchen, die sich in kleinerer Entfernung von einander als ihrer kritischen Entfernung ϱ befinden; denn dieselben ziehen einander an mit einer Kraft, welche bei einer bis ϱ wachsenden Entfernung *unendlich* gross werden würde, woraus einleuchtet, dass keine endliche äussere Kraft sie bis ϱ, also auch nicht über ϱ hinaus, von einander zu entfernen vermag. Beide Theilchen müssen also stets in kleineren Entfernungen als ϱ von einander bleiben.

Von solchen zusammengesetzten *unscheidbaren* Molekülen können nun aber noch viel mehr Arten existiren, weil, wenn ein einfaches, z. B. positiv elektrisches Theilchen mit mehr als einem anderen eben solchen Theilchen in einem so engen Raume sich zusammen befände, dass die Entfernungen derselben von einander sämmtlich kleiner als ϱ wären, *alle diese Theilchen zusammen ein ebenso unscheidbares Molekül* bilden würden, wie es mit zweien derselben der Fall ist. Wenn von jener Mehrzahl, z. B. von *drei* Theilchen a, b, c irgend zwei a und b zuerst sich der Entfernung ϱ näherten, wo ihre wechselseitige *Anziehungskraft* unendlich gross werden würde, würde eine Aufhebung dieser unendlich gross werdenden Anziehungskraft durch das dritte Theilchen c nur möglich sein, wenn dieses dritte Theilchen auf entgegengesetzter Seite in gleicher Entfernung sich befände, also in einer Entfernung $= 2\varrho$ von a, was gegen die Voraussetzung wäre.

Unter derselben Voraussetzung für *negativ elektrische* Theilchen,

wie die soeben für *positiv elektrische* gemachte, würden nun ferner ebensoviele Fälle unscheidbarer, aus einfachen *negativ* elektrischen Theilchen zusammengesetzter Moleküle existiren können, wie Fälle unscheidbarer Moleküle aus einfachen *positiv elektrischen* Theilchen.

Hierzu kommt, dass nicht blos zwei oder drei, sondern eine noch viel grössere Zahl *gleichartig elektrischer Theilchen* in so kleinem Raume zusammen sein können, ohne dass die Entfernung irgend eines Theilchens von einem anderen $\overline{>}\,\varrho$ sei, so dass alle diese Theilchen zusammen ein ebenfalls *untrennbares ewig zusammen bleibendes Molekül* bilden. Endlich kommt hinzu, dass diese in dem engen Raume eines Moleküles eingeschlossenen Theilchen ebenso wenig, wie die ursprünglich in grösseren Räumen vertheilten, in Ruhe zu verharren brauchen, sondern die mannigfaltigsten Bewegungen theils *zusammen*, in enger Verbindung miteinander, im Weltenraume machen können, theils auch *gegeneinander*, innerhalb des engen Raumes, in dem sie sich befinden, ohne darum aufzuhören, eine *untrennbare Gruppe* oder ein einziges *zusammengesetztes Molekül* zu bilden. Jedes solches zusammengesetztes Molekül bildet eine abgeschlossene Welt für sich, und nach Verschiedenheit der Zahl einfacher elektrischer Theilchen, die es enthält, und deren gegenseitigen Bewegungen kann ein solches zusammengesetzes Molekül sehr verschiedene Wirkungen auf alle anderen ausserhalb liegenden Moleküle ausüben, wonach ihnen *sehr verschiedene Eigenschaften* zukommen können. Fügt man hinzu, dass die *Zahl* der einfachen elektrischen Theilchen, welche auf diese Weise vereinigt sein können, wenn auch nicht unbeschränkt, doch sehr gross sein kann, so lässt sich denken, dass solche ewig unveränderliche, theils positiv, theils negativ elektrische Theilchen oder Moleküle sich wieder zu sehr *verschiedenartigen ponderabelen Körpern* verbinden können, z. B. von sehr verschiedener Dichtigkeit oder Härte u. s. w., denn jene aus einer grösseren Zahl *gleichartig elektrischer Theilchen* bestehenden, *theils positiv, theils negativ elektrischen Gruppen,* von denen jede doch nur einen kugelförmigen Raum vom Durchmesser ϱ einnimmt, müssen einander offenbar mit *viel grösserer Kraft* anziehen und sich verbinden, als ein einfaches positiv elektrisches mit einem einfachen negativ elektrischen Moleküle.

Bei allen solchen aus mehr als zwei gleichelektrischen Theilchen zusammengesetzten *unscheidbaren* Molekülen können drei Fälle unterschieden werden, nämlich *erstens* der Fall, wo alle diese Moleküle so nahe beisammen liegen, dass sie bei Fernwirkungen als in einem Punkte vereinigt betrachtet werden dürfen, *zweitens* der Fall, wo zwei Moleküle sich umeinander drehen, und *drittens* der Fall, wo eine grössere Zahl von Molekülen in dem von ihnen eingenommenen Raume sich umeinander in verschiedenen Bahnen bewegen. Auch auf diesen Ver-

schiedenheiten können ebenfalls verschiedene Eigenschaften der Moleküle beruhen.

Hiernach ergiebt sich nun folgende Klassifikation der Körpermoleküle, zunächst der *unscheidbaren elektrischen* Moleküle, sodann der *ponderabelen* Moleküle. Die in einem Moleküle enthaltenen *positiv oder negativ elektrischen Theilchen* werden durch ihre *Zahl* mit vorgesetztem + oder — bezeichnet, und dass dieselben zusammen ein *unscheidbares Molekül* bilden, wird durch Einschluss in Klammern angedeutet.

1. Einfache elektrische Moleküle:
 positiv elektrische Moleküle (+ 1),
 negativ elektrische Moleküle (— 1).
2. Zusammengesetzte unscheidbare elektrische Moleküle
 aus *positiv elektrischen:*
 aus zweien (+ 2),
 „ dreien (+ 3),
 „ vieren (+ 4),
 „ fünfen (+ 5),
 „ sechsen (+ 6) u. s. w.,
 aus *negativ elektrischen:*
 aus zweien (— 2),
 „ dreien (— 3),
 „ vieren (— 4),
 „ fünfen (— 5),
 „ sechsen (— 6) u. s. w.[1])
3. *Ponderabele,* aus gleicher Zahl *positiv und negativ elektrischer* Moleküle zusammengesetzte Moleküle, welche auf folgende Weise übersichtlich geordnet werden können. [Siehe nebenstehende Seite.]

Hierin entspricht nun jede von den in denselben Klammern eingeschlossenen Zahlen einer Zahl um einander sich bewegender gleichartig elektrischer Theilchen, deren Entfernung von einander dabei kleiner als ϱ bleibt. Diese unscheidbaren Theilchen bewegen sich zusammen in *einer* Bahn, und es entspricht jeder Zahl eine besondere Bahn. Die Bahnen ungleichelektrischer Theilchen werden durch wechselseitige Anziehung derselben zusammengehalten. Die in jeder Zahl begriffenen Moleküle sind demnach unscheidbar und ebenso auch alle Moleküle der *zweiten* von den *oben angeführten drei Klassen,* auch die, welche aus mehreren einfachen Molekülen zusammengesetzt sind, weil

[1]) Moleküle $(+n)$ und $(-n)$, wo n eine grössere Zahl wäre, werden in Folge ihrer grösseren wechselseitigen Anziehungskraft selten einzeln, sondern meist nur in der Verbindung $\left[\begin{smallmatrix}+n\\-n\end{smallmatrix}\right]$, d. i. als *ponderabele Moleküle* vorkommen.

$$\begin{bmatrix}+1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2\\+1\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+2\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+2\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+1\\+1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2\\-1\\+1\\+1\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\+1\\+1\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\+2\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+3\\-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+3\\-2\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+3\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+2\\+1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+1\\+1\\+1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2\\-1\\-1\\+1\\+1\\+1\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\-2\\+1\\+1\\+1\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\-1\\+1\\+1\\+1\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\+1\\+1\\+1\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\+2\\+1\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\+2\\+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\+3\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+4\\-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+4\\-3\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+4\\-2\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+4\\-2\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+4\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+3\\+1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+2\\+2\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+2\\+1\\+1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+1\\+1\\+1\\+1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2\\-1\\-1\\-1\\+1\\+1\\+1\\+1\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\-2\\-1\\+1\\+1\\+1\\+1\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\-1\\-1\\+1\\+1\\+1\\+1\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\-2\\+1\\+1\\+1\\+1\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\-1\\+1\\+1\\+1\\+1\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\+1\\+1\\+1\\+1\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\+2\\+1\\+1\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\+2\\+2\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\+3\\+1\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\+3\\+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\+4\\+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+5\\-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+5\\-4\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+5\\-3\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+5\\-3\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+5\\-2\\-2\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+5\\-2\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+5\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+4\\+1\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+3\\+2\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+3\\+1\\+1\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+2\\+2\\+1\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+2\\+1\\+1\\+1\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+1\\+1\\+1\\+1\\+1\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

etc. etc.

nämlich diese Moleküle gleichartig und ihre Entfernungen von einander $< \varrho$ sind.

In allen Molekülen der *dritten Klasse* dagegen sind die *positiv elektrischen* unter $+$ angeführten von den *negativ elektrischen* unter $-$ angeführten *möglicher Weise* immer scheidbar, wenn auch oft keine zu ihrer Scheidung hinreichend grosse Kraft vorhanden ist. Wirklich ist noch keine solche Scheidung, wodurch ein ponderabeler Körper in seine imponderabelen Bestandtheile zerlegt worden wäre, beobachtet worden. Da aber Zerlegungen ponderabeler Körper in ponderabele Bestandtheile häufig beobachtet werden, durch fortgesetzte Zerlegungen aber man endlich zu ponderabelen Körpern gelangt, die nicht weiter haben zerlegt werden können, so hat man diese letzten ponderabelen Körper zwar als *Elementarkörper* bezeichnet, wodurch aber die *Möglichkeit* ihrer Zerlegung in positive und negative elektrische Moleküle nicht ausgeschlossen wird.

Am *schwersten scheidbar* werden diejenigen ponderabelen Moleküle sein, worin viele *gleichartig elektrische* Theilchen in kleineren Entfernungen als ϱ von einander sich befinden, also alle mit $\left[\begin{smallmatrix}+n\\-n\end{smallmatrix}\right]$ bezeichneten Moleküle, worin n eine grössere Zahl ist. Ponderabele Moleküle $\left[\begin{smallmatrix}+n\\-n\end{smallmatrix}\right]$ mit grossen Zahlenwerthen n werden sich hiernach wie *ponderabele Elementarkörper* verhalten, dagegen werden ponderabele Moleküle, worin n eine kleine Zahl z. B. 1 ist, am leichtesten in *elektrische Elemente* zerlegbar sein.

Nimmt man nun das Gewicht des ponderabelen Moleküls $\left[\begin{smallmatrix}+1\\-1\end{smallmatrix}\right]$ zur Einheit der Atomgewichte, so würde n das Atomgewicht des Moleküls $\left[\begin{smallmatrix}+n\\-n\end{smallmatrix}\right]$ sein. Das kleinste uns bekannte Atomgewicht ponderabeler Moleküle ist das des Wasserstoffes und pflegt $= 1$ gesetzt zu werden. Darnach würden die Atomgewichte der anderen bisher unzerlegt gebliebenen ponderabelen Körper und ihre Zusammensetzung aus positiv und negativ elektrischen Elementartheilchen erhalten werden wie folgt:

	Atom-gewicht	elektrische Zusammensetzung
Wasserstoff	1	$\left(\begin{smallmatrix}+1\\-1\end{smallmatrix}\right)$
Kohlenstoff	12	$\left(\begin{smallmatrix}+12\\-12\end{smallmatrix}\right)$
Lithium	13	$\left(\begin{smallmatrix}+13\\-13\end{smallmatrix}\right)$
Beryllium	14	$\left(\begin{smallmatrix}+14\\-14\end{smallmatrix}\right)$
Stickstoff	14	$\left(\begin{smallmatrix}+14\\-14\end{smallmatrix}\right)$

	Atomgewicht	elektrische Zusammensetzung
Sauerstoff	16	$\begin{pmatrix}+16\\-16\end{pmatrix}$
Fluor	19	$\begin{pmatrix}+19\\-19\end{pmatrix}$
Brom	20	$\begin{pmatrix}+20\\-20\end{pmatrix}$
Bor	22	$\begin{pmatrix}+22\\-22\end{pmatrix}$
Magnesium	25	$\begin{pmatrix}+25\\-25\end{pmatrix}$
Aluminium	27	$\begin{pmatrix}+27\\-27\end{pmatrix}$
etc.	etc.	etc.

Der Fall, dass zwei ganz verschiedenartige ponderabele Körper gleiches Atomgewicht haben, kommt fünf Mal vor und einmal sogar, dass drei solche Körper dasselbe Atomgewicht haben, nämlich

1. Beryllium und Stickstoff	$\begin{pmatrix}+14\\-14\end{pmatrix}$
2. Kobalt und Nickel	$\begin{pmatrix}+59\\-59\end{pmatrix}$
3. Rhodium und Ruthenium	$\begin{pmatrix}+104\\-104\end{pmatrix}$
4. Thorium und Uran	$\begin{pmatrix}+119\\-119\end{pmatrix}$
5. Barium und Vanadium	$\begin{pmatrix}+137\\-137\end{pmatrix}$
endlich Gold, Platin und Iridium sämmtlich	$\begin{pmatrix}+197\\-197\end{pmatrix}$

Worin besteht nun der Unterschied solcher ponderabelen Elementarkörper von gleichem Atomgewichte? Dieser Unterschied könnte hiernach nur in der Verschiedenheit der Bahnen und Geschwindigkeiten bestehen, in und mit welchen die vereinigten *positiv elektrischen* Theilchen eines ponderabelen Moleküls, deren Entfernungen von einander kleiner als ϱ sind, sich bewegen, von den Bahnen und Geschwindigkeiten, in und mit welchen die vereinigten *negativ elektrischen* Theilchen desselben ponderabelen Moleküls, deren Entfernungen von einander kleiner als ϱ sind, sich bewegen. Je schneller diese Bahnen durchlaufen werden, desto grösseren Widerstand wird dem Eindringen

anderer Theilchen geleistet werden, also desto grössere Härte werden die Moleküle besitzen.

Was die Abweichungen mancher Atomgewichte von den Multiplis des Atomgewichtes des Wasserstoffs betrifft, so dürften sie zum Theil wenigstens wohl von *Trabanten* mancher ponderabeler Moleküle herrühren, deren Vorkommen an gewisse Verhältnisse, die noch näher erörtert werden sollen, gebunden zu sein scheint.

Ein *ponderabeles* aus $+e$ und $-e$ zusammengesetztes Molekül (wo für e auch eine Mehrzahl gleichartig elektrischer Moleküle gesetzt werden kann) übt auf ein *positiv elektrisches* Molekül $+e'$ zwei Kräfte aus, nämlich eine von $+e$ auf $+e'$ ausgeübte *Abstossungskraft* $= +(ee'/r^2).(1-[1/c^2][dr^2/dt^2]+[2r/c^2][d^2r/dt^2])$ und eine von $-e$ auf $+e'$ ausgeübte *Anziehungskraft*

$$= -(1+a)(ee'/r^2)(1-[1/c^2][dr^2/dt^2]+[2r/c^2][d^2r/dt^2]),$$

in Summa also eine *Anziehungskraft*

$$= -a\frac{ee'}{r^2}\left(1-\frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right).$$

Durch diese von einem *ponderabelen Moleküle* auf das *positiv elektrische* Molekül ausgeübte *Anziehungskraft* kann letzteres fortwährend in einer *drehenden Bewegung um das ponderabele Molekül erhalten* werden.

Dasselbe *ponderabele* aus $+e$ und $-e$ bestehende Molekül übt auch auf ein *negativ elektrisches* Molekül $-e'$ zwei Kräfte aus, nämlich eine *Anziehungskraft*

$$= -(1+a)(ee'/r^2)(1-[1/c^2][dr^2/dt^2]+[2r/c^2][d^2r/dt^2])$$

und eine *Abstossungskraft*

$$= +(ee'/r^2)(1-[1/c^2][dr^2/dt^2]+[2r/c^2][d^2r/dt^2]),$$

in Summa also ebenfalls eine *Anziehungskraft,* und zwar von *derselben Grösse* wie die auf $+e'$ ausgeübte *Anziehungskraft,* wonach also auch das *negativ elektrische* Molekül in einer *drehenden Bewegung um das ponderabele Molekül erhalten* werden kann.

Es werden auf diese Weise die meisten *ponderabelen Moleküle* mit der Zeit entweder ein *positiv elektrisches* oder ein *negativ elektrisches* Molekül zum *Trabanten* erhalten haben, und es würden darnach die ponderabelen Moleküle in *drei Klassen* zerfallen, nämlich in die Klasse der von *positiv elektrischen Trabanten* begleiteten, in die Klasse der von *negativ elektrischen Trabanten* begleiteten und in die Klasse der bisher *ohne Trabanten* gebliebenen.

Könnten nun *Zusammensetzungen ponderabeler Moleküle aus elektrischen Theilchen* bis zur Zahl von fünf positiven Theilchen mit fünf

negativen stattfinden, so würden sich daraus nach obigem Schema 53 ponderabele Grundstoffe ergeben, woraus die Möglichkeit von 53.54/2=1431 *binär zusammengesetzten ponderabelen Körpern* folgen würde.

Beachtet man noch die ausserordentliche Mannigfaltigkeit, welche in jedem dieser *ponderabelen* Moleküle in Beziehung auf die Bahnen und lebendigen Kräfte der einzelnen elektrischen Theilchen, aus denen sie zusammengesetzt sind, stattfinden können, so ergiebt sich die Möglichkeit von *unendlich vielen verschiedenen Arten solcher Moleküle.*

6.

Elektricität in metallischen Leitern.

In der Abhandlung „Zur Galvanometrie" im 10. Bande der Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1862)[1]) handelt Art. 33 *„von der Umsetzung der Stromarbeit in Wärme"*. Es heisst daselbst: Die *Stromarbeit* ist an die Bewegung der elektrischen Fluida geknüpft, und auch die *Wärme* ist nach der mechanischen Wärmetheorie an die Bewegung eines Körpers gebunden, den man aber von den elektrischen Fluidis zu unterscheiden pflegt und *Wärmestoff* nennt, jedoch ohne diesen Unterschied näher zu bestimmen. Eine nähere Einsicht in die Art und Weise, wie *Stromarbeit in Wärme* umgesetzt werde, scheint hiernach zu fordern, dass entweder Identität des Wärmestoffs mit elektrischem Fluidum nachgewiesen werde, oder wenn dies nicht der Fall ist, dass die Bewegungen des elektrischen Fluidums bis zu dem Punkte verfolgt werden müssen, wo der Uebergang der Bewegungen vom *elektrischen Fluidum* zum *Wärmestoff* stattfindet. In letzterem Falle würde aber die Koexistenz vieler Substanzen in den kleinsten Raumtheilen des Leiters angenommen werden müssen, nämlich der *ponderabelen Leitersubstanz* nebst *beiden elektrischen Fluidis* und ausserdem nun auch noch des sogenannten *Wärmestoffs.* Zur Vermeidung solcher Anhäufung von Stoffen in demselben Raume hat man daher zunächst versucht, die *ponderabele Leitersubstanz* dadurch möglichst zu eliminiren, dass man sie, z. B. das Kupfer, statt *stetig im ganzen Raume* verbreitet, *in einzelnen räumlich geschiedenen* Punkten, nämlich den sogenannten *ponderabelen Molekülen koncentrirt* annimmt, und indem man ferner die Oberfläche eines jeden solchen Moleküls mit einer Lage negativ elektrischer Moleküle an seiner Oberfläche fest verbunden und darüber noch *umströmt von positiv elektrischen Molekülen* annimmt, welche sich im Falle eines galvanischen Stromes successive von *einem ponderabelen Moleküle zum anderen fortbewegen.*

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. IV, p. 17.]

Von welchen Kräften nun auch die *Arbeit* beim Austritt eines solchen *positiv elektrischen* Moleküls aus der Anziehungssphäre eines *negativ geladenen* ponderabelen Moleküls abhängig sei, stets wird eine *entgegengesetzt gleiche Arbeit* von demselben elektrischen Moleküle *beim Eintritt* in die Anziehungssphäre des nächsten gleichfalls *negativ geladenen* ponderabelen Moleküls geleistet werden, so dass diese *beiden Arbeitsgrössen einander kompensiren.* Nachdem aber das elektrische Molekül von *einem* ponderabelen Molekül getrennt ist, wird es, getrieben von der elektromotorischen Kraft f, den Zwischenraum a bis zum *nächsten* ponderabelen Molekül durchlaufen und dabei also die Arbeit fa verrichten. Die Summe aller dieser Arbeitsgrössen Σfa bildet die Stromarbeit im Leiter. Jedes elektrische Molekül tritt daher beim Uebergange *von einem ponderabelen Moleküle zum anderen* mit einer um fa *vergrösserten lebendigen Kraft* in den Bereich des letzteren ein, im Vergleich mit der lebendigen Kraft, mit welcher es aus dem Bereich des vorhergehenden ausgetreten war, wodurch also der Werth der *lebendigen Kräfte* in der ganzen geschlossenen Kette um einen mit der ganzen *Stromarbeit* äquivalenten Betrag vergrössert werden muss. Eine *dieser Stromarbeit äquivalente Vergrösserung der lebendigen Kräfte* in allen Theilen des geschlossenen Leiters zusammengenommen ist nun aber, nach der *mechanischen Wärmetheorie,* auch die vom Strome erzeugte *Wärme,* und es fragt sich daher nur, ob sie selbst damit identisch ist, oder ob jene den elektrischen Fluidis zugehörige lebendige Kraft von diesen Fluidis erst auf ein anderes Medium (auf den sogenannten *Wärmestoff)* übertragen werden müsse, um als *Wärme* zu erscheinen.

Es ist darauf a. a. O. gezeigt worden, dass zur Annahme einer solchen Uebertragung gar kein Grund vorliege, dass aber mit dem Wegfall dieser Uebertragung auch jeder Grund zur Annahme eines besonderen *Wärmestoffs* oder *Wärmemediums* wegfalle, weil er von der *Elektricität* vertreten werde.

Soll nun aber diese Vertretung eines sogenannten Wärmestoffs durch die Elektricität vollkommen sein, so müssen auch die Gesetze der *Wärmeleitung,* der *Wärmestrahlung* und der *Wärmeabsorption,* sowie die davon abhängigen Gesetze der *Temperaturausgleichungen* in ponderabelen Körpern aus den Bewegungsgesetzen der *Elektricität* in ponderabelen Körpern und im leeren Raume abgeleitet werden können.

In der Abhandlung „Ueber die Bewegungen der Elektricität in Körpern von molekularer Konstitution“ in POGGENDORFF's Annalen, 1875, Bd. 156,[1]) ist nun wirklich schon versucht worden, alle Erscheinungen der

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. IV, p. 312.]

Wärme, ebenso wie die des *Magnetismus* und *Galvanismus* in solchen Körpern, auf Bewegungen der *Elektricität* in diesen Körpern zurückzuführen.

Man unterscheidet nun Statik und Dynamik der ponderabelen Körper, je nachdem man sie im Ruhe- oder Bewegungszustande betrachtet; indem man aber in der Statik dieser Körper von ihrem Ruhezustande spricht, bezeichnet man keineswegs damit einen Zustand der Ruhe *aller* in den Grenzen dieser Körper eingeschlossenen Theile, sondern nur der in diesen Grenzen eingeschlossenen *ponderabelen* Theile. Ohne diese Beschränkung würde niemals vom Ruhezustande eines ponderabelen Körpers gesprochen werden können, weil in jedem solchen Körper ausser seinen *ponderabelen* Theilen noch andere Theile enthalten sind, die nie zur Ruhe gelangen.

Denn *erstens* hat, wie wir gesehen haben, die genauere Erforschung aller an *ponderabelen* Körpern beobachteten *elektrischen* Erscheinungen dahin geführt, dass in allen diesen Körpern bewegliche Theile, nämlich *Elektricitätstheile* vorhanden sind, deren Verschiebungen und Bewegungen an der Oberfläche und im Innern jener Körper der Grund sind von allen Erscheinungen *elektrischer Ladungen* und *galvanischer Strömungen,* sowie überhaupt aller *elektrodynamischen Wirkungen.*

Ebenso hatte auch die genauere Erforschung aller an ponderabelen Körpern beobachteten *magnetischen* Erscheinungen, sowohl paramagnetischen als auch diamagnetischen, dahin geführt, dass im Innern aller dieser Körper bewegliche Theile vorhanden seien, welche man lange Zeit unter dem Namen der *magnetischen Fluida* von jenen ersteren, nämlich von den *elektrischen,* zu unterscheiden versucht hat. Von diesen *magnetischen* Fluidis wurde behauptet, dass sie im Innern der Körper nach Verschiedenheit der Verhältnisse verschieden vertheilt sein könnten, dass sie aber unter beharrlichen Verhältnissen zu Ruhe und Gleichgewicht gelangten. In der *Vertheilung* dieser magnetischen Fluida wurde der Grund der magnetischen Erscheinungen gesucht, ohne dass es dazu fortdauernder Bewegungen bedürfe. Doch hat die weiter geführte Untersuchung ergeben, dass in solchen ruhenden magnetischen Fluidis, wie sie auch vertheilt sein mögen, nicht der Grund von *allen magnetischen* (paramagnetischen und diamagnetischen) Erscheinungen liegen könne; dass aber *alle* diese Erscheinungen aus dem Vorhandensein *fortwährend bewegter* Theile im Innern der ponderabelen Körper, und zwar der nämlichen, deren Bewegungen der Grund aller galvanischen Erscheinungen sind, nämlich *elektrische Theile,* erklärt werden können.

Drittens kommt endlich noch hinzu, dass auch die Erforschung der jedem ponderabelen Körper zukommenden *Temperatur* dahin geführt hat, dass im Innern aller dieser Körper bewegliche Theile vorhanden seien und dass der Grund aller an diesen Körpern beobachteten Temperatur-

erscheinungen, nämlich die *Wärme,* in Bewegungen dieser Theile zu suchen sei. Die vermuthete *Identität* auch dieser Theile mit den *elektrischen* ist ebenfalls durch Thatsachen bestätigt worden, insbesondere durch *thatsächliche Gleichheit der von elektromotorischen Kräften in den Elektricitäts- und Wärmeleitern erzeugte lebendige Kraft mit der vom Strome erzeugten Wärme.*

Aus den die Wärmeerzeugung durch den galvanischen Strom im Stromleiter betreffenden Untersuchungen hat sich nun insbesondere ergeben, dass das *mechanische Aequivalent der erzeugten Wärme* im Zeitelemente dt gleich ist dem Produkte von dt in die Stromintensität i und in die elektromotorische Kraft e, wo für e auch das Produkt von i in den Leitungswiderstand w gesetzt werden kann, also $eidt = wi^2dt$ = dem *mechanischen Aequivalente der erzeugten Wärme.*

Nun ist aber $eidt$ das Produkt der auf die in der Längeneinheit des Leiters enthaltene strömende Elektricität wirkenden Kraft in den von derselben in der Zeit dt in der Richtung dieser Kraft zurückgelegten Weg, d. i. die von der in der Längeneinheit des Leiters enthaltenen *bewegten Elektricität in der Zeit dt geleistete Arbeit,* was gleich ist der in der Längeneinheit des Leiters in der Zeit dt erzeugten *Wärme.* Folglich ist diese *Wärme* gleich der *von der bewegten Elektricität geleisteten Arbeit,* und der *Wärmestoff selbst identisch mit der bewegten Elektricität* im Leiter.

Wir beschränken uns hier auf Betrachtung des Verhaltens der *Elektricität,* des *Galvanismus* und der *Wärme* in *metallischen Leitern* und lassen dahin gestellt, ob ihr Verhalten in *feuchten Leitern,* z. B. in verdünnten Säuren dasselbe oder davon verschieden sei; nur zu ihrer Unterscheidung möge angeführt werden, dass der Strom in den ersteren, nämlich *metallischen* Leitern, blos von den elektrischen Fluidis, ohne irgend eine Theilnahme der ponderabelen Moleküle, gebildet wird, während in letzteren (nämlich in den *feuchten* Leitern) *ponderabele Stoffe,* wie Wasserstoff und Sauerstoff, an der Bewegung Theil nehmen.

Eine klare Einsicht in diese Verhältnisse der elektrischen Fluida zu den ponderabelen Molekülen in *metallischen Leitern während galvanischer Strömungen* fordert aber zuvor nähere Kenntniss vom Verhalten der elektrischen Fluida in *metallischen Leitern ohne galvanischen Strom.* Findet kein galvanischer Strom in einem metallischen Leiter statt, so befindet sich die Elektricität in demselben doch keineswegs in Ruhe, sondern in Bewegung und es ist demgemäss im metallischen Leiter eine *lebendige Kraft* vorhanden, welche mit dem Namen *Wärme* bezeichnet wird. Eine klare Einsicht ins Verhalten der elektrischen Fluida in metallischen Leitern fordert daher eine Trennung und genaue Unterscheidung *derjenigen Bewegungen* der im metallischen Leiter vorhan-

denen Elektricität, welche blos Grund der *Wärmeerscheinungen* sind, von denjenigen, welche den *galvanischen Strom* im metallischen Leiter bilden.

Was *zuerst* die Bewegungen der im metallischen Leiter vorhandenen Elektricität betrifft, welche den Grund der *Wärmeerscheinungen* in denselben enthalten, so scheiden wir den diesem Leiter zukommenden Raum zunächst in zwei Theile, nämlich in den von den *ponderabelen Molekülen* eingenommenen Raum, und in den von keinem ponderabelen Moleküle eingenommenen, sogenannten *leeren Zwischenraum*. In letzterem befinden und bewegen sich *positiv elektrische Moleküle*, während alle *negativ elektrischen Moleküle* theils als bleibende Bestandtheile der *ponderabelen Moleküle* vorhanden, theils als *Ladungen* mit ihnen temporär verbunden angenommen werden.

Die Bewegungen der *positiv elektrischen Moleküle* in dem ein *ponderabeles Metallmolekül* umgebenden leeren Raum sind aber nicht auf diesen Raum beschränkt, sondern ein solches Molekül kann aus der Umgebung jenes *ponderabelen* Moleküls in die Umgebung eines benachbarten *ponderabelen* Moleküls übergehen; aber diese Uebergänge müssen von allen ponderabelen Molekülen aus (wenn kein galvanischer Strom vorhanden ist) indifferent nach allen Richtungen, wenn auch nicht gleichzeitig, doch successive stattfinden. In Körpern, wo das nicht der Fall wäre, würde nämlich, wie leicht einleuchtet, keine *wechselseitige Wärmestrahlung* stattfinden, auf welcher bekanntlich das Gesetz der *Wärmeleitung* beruht, d. i. das Gesetz der *Uebertragung* der lebendigen Kraft der Wärme von einem ponderabelen Molekül zu den umgebenden, welches die charakteristische Eigenschaft *metallischer Leiter* bildet. Unter *metallischen Leitern* werden also Körper verstanden, um deren *ponderabele negativ elektrisch geladene Moleküle* positiv elektrische Moleküle sich drehen und nach allen Richtungen ohne Unterschied ausgeworfen werden.

Alle diese Bewegungen elektrischer Moleküle im leeren Raume zwischen den ponderabelen *Metallmolekülen* folgen Gesetzen, welche aus dem *Grundgesetze elektrischer Wirkung* abzuleiten sind. Diese Ableitung ist nun schon in der angeführten Abhandlung in Poggendorff's Annalen, 1875, Bd. 156, Art. VI,[1]) *„Ueber die Bewegung der Elektricität in Konduktoren"*, S. 39 ff. gegeben worden.[2])

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. IV, p. 339.]

[2]) Diese Ableitung wurde auf die Betrachtung der Bewegungen zweier *ungleichartig elektrischer* Moleküle begründet, wovon das *eine* (negativ elektrische) an ein *ponderabeles* Molekül gebunden ist, während das *andere* (positiv elektrische) sich frei darum bewegen kann, und auf die daraus sich ergebenden Verschiedenheiten der *molekularen Körperkonstitutionen*.

Beschränken wir uns hierbei auf solche Systeme, welche aus Paaren von Mole-

Aus der unten *in der Note* angeführten Gleichung für ein *ungleichartig elektrisches Molekülenpaar,* welche aus dem *Grundgesetze elektrischer Wirkung* abgeleitet ist, folgt nämlich, wie daselbst angeführt worden ist, dass für $u = 0$ entweder $r = r_0$ oder $r = [n/(1-n)]\, r_0$ ist.

Hieraus ergiebt sich nun ferner, dass solche Molekülenpaare in zwei Klassen zerfallen, nämlich in Molekülenpaare, deren Drehung um einander *beharrlich* ist und in solche, deren Drehung um einander *nicht beharrlich* ist. Ob ein Molekülenpaar der einen oder der anderen dieser beiden Klassen angehört, hängt von dem ihm zugehörigen Werthe von $n = -r_0 a_0^2/\varrho c^2$ ab, wo r_0 den kleinsten Werth von r bezeichnet, für welchen die relative Geschwindigkeit der beiden Moleküle $u = 0$ ist, und a_0 die Drehungsgeschwindigkeit des elektrischen Moleküls um das ponderabele bei der Entfernung r_0.

Beharrlichkeit der Drehung des elektrischen Theilchens um das ponderabele Molekül *findet statt,* wenn der Werth der mit n bezeichneten Grösse zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt; *findet dagegen nicht* statt, wenn der Werth der mit n bezeichneten Grösse zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt.

Da hier nur Paare ungleichartig elektrischer Moleküle, die sich um einander drehen können, betrachtet werden, wonach ϱ hier stets einen *negativen* Werth hat, so ergiebt sich, dass n stets einen *positiven* Werth haben müsse. Ist dieser Werth grösser als 1, so ist $r_0 = -n\varrho\,.\,[c^2/a_0^2]$ *der einzige Werth von r, für welchen* $u = 0$ *ist.* Ist dieser Werth dagegen kleiner als 1, aber grösser als $\frac{1}{2}$, so existirt ausser dem Werthe $r_0 = -n\varrho\,.\,[c^2/a_0^2]$ noch ein anderer Werth von r, für welchen $u = 0$ ist, nämlich derjenige Werth, für welchen $n([r_0/r]+1) = 1$ ist, d. i. der Werth $[n/(1+n)]\,.\,r_0 = r^0$, woraus folgt, dass, wenn n kleiner als 1, aber grösser als $\frac{1}{2}$ ist, die Entfernung beider Moleküle von einander abwechselnd wächst und abnimmt, von r_0 bis r^0 und von r^0 bis r_0 u. s. f., wodurch eine *fortdauernde Drehung* beider Moleküle um einander gegeben ist.

külen bestehen, von denen das eine $(-e)$ *negativ elektrisch* und an ein ponderabeles Molekül *gebunden* ist, das andere $(+e)$ *positiv elektrisch* ist und sich um ersteres herumbewegt; so ist für dieselben in der 6. Abhandlung der Elektrodynamischen Maassbestimmungen (Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., Leipzig 1871, Art. 11, S. 32) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. IV, p. 273] folgende Gleichung gefunden worden:

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r-r_0}{r-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r+r_0}{r}\cdot\frac{a_0^2}{c^2}\right),$$

wo ϱ, r_0 und a_0 gegebene Konstanten sind, r der Abstand beider Moleküle von einander und u ihre relative Geschwindigkeit. Wird hierin $a_0^2/c^2 = -n\varrho/r_0$ gesetzt, so erhält man

$$\frac{\varrho - r}{\varrho}\cdot\frac{u^2}{c^2} = \left(\frac{r}{r_0} - 1\right)\left[n\left(\frac{r_0}{r}+1\right) - 1\right],$$

woraus folgt, dass für $u = 0$ entweder $r = r_0$ oder $r = [n/(1-n)]\, r_0$ ist.

Dieser *beharrlichen Drehung* der Moleküle um einander, wenn n kleiner als 1, aber grösser als $\frac{1}{2}$ ist, steht nun gegenüber die Drehung der Moleküle um einander, wenn n kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, aber grösser als 0, wo nur der einzige Werth von $r = r_0$ existirt, für welchen $u = 0$ ist, von dem an r immerfort *in's Unendliche* wachsen würde, wenn es nicht durch hinzukommende äussere Einwirkungen daran verhindert würde.

Dieses Wachsthum von r (oder die Krümmungsabnahme der Molekülenbahn) wird nun sehr beschleunigt bei Annäherung des so in Wurfbewegung übergehenden *positiv elektrischen* Moleküls an ein benachbartes *ponderabeles* Molekül, wo die Molekülenbahn zunächst in eine geradlinige Wurfbahn übergeht und sodann bei fortgesetzter Annäherung an das nächste *ponderabele* Molekül endlich wieder in eine Kreisbahn um das letztere Molekül herum.

In Folge verschiedener Richtungen der Wurfbewegungen, durch welche der Uebergang dieser *positiv elektrischen* Moleküle von einem *ponderabelen* Moleküle zu den *ponderabelen* Nachbarmolekülen vermittelt wird, findet eine Vertheilung derselben auf alle *ponderabelen* Nachbarmoleküle statt, wie auch umgekehrt von allen ponderabelen Nachbarmolekülen ausgeworfene *positiv elektrische* Moleküle zum ersten *ponderabelen* Molekül gelangen.

Diese Wurfbewegungen positiv elektrischer Moleküle von jedem ponderabelen zu allen ponderabelen Nachbarmolekülen und umgekehrt von allen diesen letzteren zu jenen ersteren, wird mit dem Namen der *wechselseitigen Strahlung* bezeichnet. Fourier hat nachgewiesen, dass aus solcher *wechselseitiger Strahlung* zwischen allen *ponderabelen Molekülen* eines Wärmeleiters die Gesetze der *Wärmeleitung* sich ergeben, wodurch die Vertheilungs- und Bewegungserscheinungen der Elektricität mit den Vertheilungs- und Bewegungserscheinungen der Wärme auf's engste mit einander verknüpft werden.

Hierauf gründet sich also nun *erstens* die Annahme, dass *Metalle* Körper sind, deren *negativ elektrisch* geladenen *ponderabelen Moleküle* von *positiv elektrischen Molekülen* umströmt werden, die sich aber nicht in *beharrlicher Drehung* um dieselben befinden, sondern in einer *Drehung, welche in Wurfbewegung übergeht,* wodurch diese *positiv elektrischen Moleküle* nach allen Richtungen zerstreut werden. Es ist dabei nämlich für diese *positiv elektrischen Moleküle* nur der oben mit n bezeichnete Werth in metallischen Leitern kleiner als $\frac{1}{2}$ und grösser als 0 an zu nehmen.

Eben darauf kann *zweitens* auch die Annahme gegründet werden, dass *feste ponderabele Körper,* die sich von Metallen dadurch unterscheiden, dass sie *keine Leiter der Elektricität und Wärme* sind, z. B.

Glas oder Krystalle, Körper sind, deren *ponderabele Moleküle* zwar ebenfalls eine *negativ elektrische* Ladung besitzen und umströmt werden von *positiv elektrischen Theilchen,* die aber in *beharrlicher* Drehung um jene *ponderabelen Moleküle* sich befinden, also nicht in Wurfbewegungen übergehen, weil nämlich für sie der oben mit n bezeichnete Werth grösser als $\frac{1}{2}$ und kleiner als 1 ist. —

An die Stelle der Fortpflanzung von Elektricität und Wärme in *metallischen Leitern* durch Wurfbewegung tritt in den *glasartigen* und *krystallinischen* Körpern eine Fortpflanzung von Wärme und Licht durch *Wellenbewegung* des in ihnen vorhandenen *Aethers oder Lichtmediums,* welches von den zwischen den ponderabelen Molekülen befindlichen positiv elektrischen Molekülen gebildet wird.

Nach obigen Bestimmungen müssen nun die *Gesetze galvanischer Ströme in metallischen Leitern* aus dem allgemeinen *Grundgesetze elektrischer Wirkung* abgeleitet werden können. Eine solche Ableitung ist in der schon angeführten Abhandlung „Ueber die Bewegungen der Elektricität in Körpern von molekularer Konstitution" (Poggendorff's Annalen, 1875, Bd. 156, Art. VI)[1]) gegeben worden, welche hier noch weiter entwickelt werden soll.

Es wird also hierzu eine *molekulare Konstitution der metallischen Leiter* angenommen, nämlich ein System *ponderabeler* und *negativ elektrisch* geladener Moleküle, durch Zwischenräume von einander geschieden und in stabilem Gleichgewichte. Dieses *stabile Gleichgewicht* des den *metallischen Leiter* bildenden *ponderabelen Molekülensystems* soll nach der von Mossotti angegebenen Weise resultiren, 1. aus der wechselseitigen *Abstossung* dieser ponderabelen Moleküle in Folge ihrer gleichartigen, nämlich *negativ elektrischen Ladungen,* wogegen ihre wechselseitige Anziehung durch Gravitation verschwindet, 2. aus der wechselseitigen *Abstossung* aller um die ponderabelen Moleküle sich drehenden *positiv elektrischen Moleküle,* 3. aus der wechselseitigen *Anziehung jener ponderabelen Moleküle* mit ihren negativ elektrischen Ladungen und *dieser* die Zwischenräume füllenden *positiv elektrischen Moleküle.* Die *Möglichkeit* eines solchen ponderabelen Molekülensystems in stabilem Gleichgewichte hat Mossotti nachzuweisen gesucht in seiner Abhandlung: Sur les forces qui regissent la constitution intérieuse des corps, aperçu pour servir à la détermination de la cause et des lois de l'action moléculaire. Turin 1836.

Mossotti nimmt dazu an, dass im Raume eines ponderabelen Körpers in gewissen Abständen von einander *ponderabele Moleküle* sich befinden, die einander wechselseitig abstossen, — ebenso wie die oben betrachteten

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. IV, p. 339.]

negativ geladenen ponderabelen Moleküle eines metallischen Leiters — und deren Zwischenräume von einem *elastischen Fluidum,* dessen Atome sich gleichfalls wechselseitig abstossen, aber von den *ponderabelen* Molekülen angezogen werden, erfüllt sind, was Alles von den obigen *positiv elektrischen,* die Zwischenräume eines metallischen Leiters erfüllenden, in *Wurfbewegung* übergegangenen Molekülen gleichfalls gilt, insofern dieselben auch einander abstossen, aber von den *negativ* elektrisch geladenen *ponderabelen* Molekülen angezogen werden.

Mossotti beweist sodann, dass bei einem bestimmten Verhältnisse der abstossenden und anziehenden Kräfte jene *ponderabelen Moleküle* sich *bei grösseren Entfernungen* von einander ebenso verhalten, wie wenn sie allein vorhanden wären, und nach dem Gravitationsgesetze einander anzögen; dagegen in *kleineren* sogenannten *Molekularabständen* sich so verhalten, wie wenn sie allein im Raume vorhanden wären und einander durch Zusammenwirken von Anziehungs- und Abstossungskräften in *stabilem Gleichgewicht* erhielten.

Die Analogie unseres Falles mit dem von Mossotti betrachteten scheint zu gleichem Schlusse führen zu müssen, nämlich auf die Möglichkeit des Zustandekommens eines stabilen Gleichgewichtes auch unseres *ponderabelen,* den *metallischen Leiter* bildenden Molekülensystems.

Es würde also hiernach auch für die *metallischen Leiter* gelten, dass zwei ihrer *ponderabelen Moleküle* bei grösserer Entfernung von einander sich gerade so verhielten, wie wenn sie im Raume allein vorhanden wären und nach dem Gravitationsgesetze einander anzögen, dagegen bei kleineren sogenannten *Molekularabständen* von einander geradeso, als wenn sie für sich allein ein im *stabilen Gleichgewichte* befindliches Molekülensystem bildeten.

7.

Theorie des galvanischen Widerstands metallischer Leiter.

(Siehe Poggendorff's Annalen, Bd. 156, S. 49—55.)[1])

Statt der im vorigen Artikel erwähnten Mossotti'schen Annahme von der inneren Konstitution fester Körper werde nun hier zur Vereinfachung der Betrachtung des *galvanischen Widerstands metallischer Leiter* eine *feste Verbindung* der durch Zwischenräume von einander geschiedenen *negativ elektrischen ponderabelen Moleküle* der metallischen Leiter angenommen und durch *feste Linien* dargestellt, welche die Bewegungen *positiv elektrischer Moleküle* um alle einzelnen ponderabelen Moleküle herum und deren Uebergang in Wurfbewegung nicht hindern. —

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. IV, p. 348—353.]

Der wirkliche sehr *feste Zusammenhalt* der ponderabelen Moleküle *metallischer Leiter* dürfte seinen Grund darin haben, dass jedes *positiv elektrische* Molekül in seiner Kreisbahn nicht blos das *eine negativ elektrische* Molekül des *einen* ponderabelen Nachbarmoleküls umschliesst, sondern auch noch das *andere negativ elektrische* Molekül des *anderen* ponderabelen Nachbarmoleküls. Dasselbe gilt von der Kreisbahn jedes *negativ elektrischen* Moleküls und zwei positiv elektrischen Nachbarmolekülen.

Im Punkte *A*, Fig. 1, befinde sich ein solches negativ elektrisch geladenes *ponderabeles Molekül* des metallischen Leiters, um welches sich *imponderabele positiv elektrische Moleküle* bewegen, wie oben beschrieben worden ist. Wenn *keine elektromotorische Kraft* vorhanden wäre, so würden die den gemachten Annahmen gemäss in Wurfbewegung übergegangenen *positiv elektrischen* Moleküle von *A* aus betrachtet indifferent nach allen Richtungen gehen, was in der Figur durch sechs Kardinalrichtungen, nämlich durch die Radien *Aa*, *Ab*, *Ac*, *Ad*, wozu noch die beiden Radien *Ae* und *Af* senkrecht auf die Ebene der Figur nach oben und nach unten hinzugedacht werden mögen, angedeutet wird.[1]) Auch die Geschwindigkeit dieser Wurfbewegungen in allen diesen Richtungen wäre gleich anzunehmen, und *jede solche Bahn* würde sich bis in das Bereich des nächsten ponderabelen Moleküls erstrecken, deren Länge im Mittel $= r'$ sei und zur *Länge eines Leiterelementes* genommen werden soll.

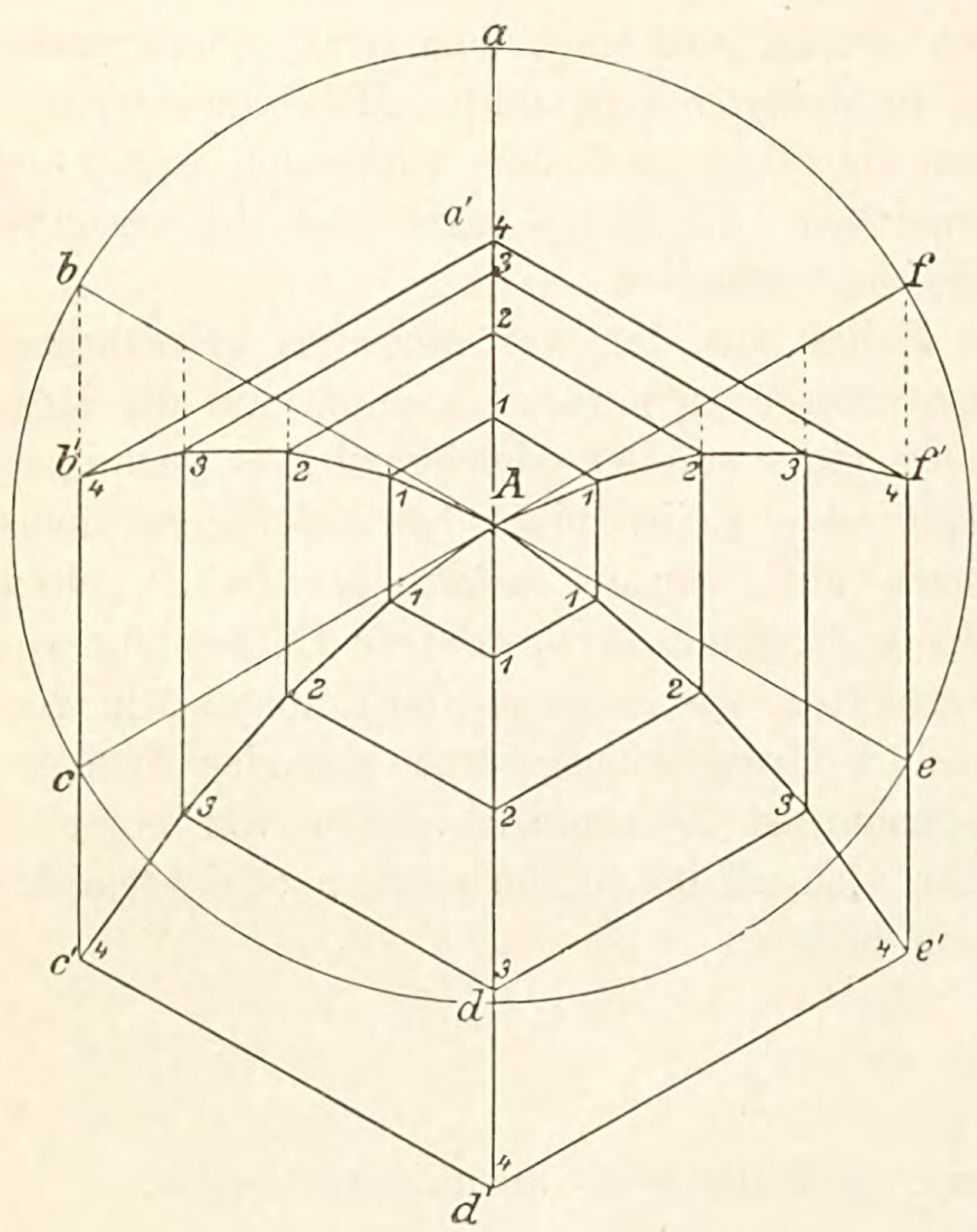


Fig. 1.

Wirkt nun aber eine *elektromotorische Kraft* auf alle diese nach verschiedenen Richtungen in Wurfbewegung befindlichen *positiv elek-*

[1]) [In der oben von W. Weber selbst gezeichneten Figur sind die Richtungen *Ae* und *Af* seitlich eingetragen.]

trischen Moleküle, z. B. Fig. 1 in vertikaler Richtung von oben nach unten; so werden alle diese Moleküle von ihrer geradlinigen Wurfbahn abgelenkt, in ähnlicher Weise, wie geworfene Steine durch die Schwerkraft, und müssen krumme Bahnen beschreiben, welche in der Figur unter jenen geradlinigen Wurfbahnen dargestellt worden sind, nämlich Ab' unter Ab, Ad' unter Ad, wozu Ae' unter Ae und Af' unter Af hinzuzudenken sind.

Was nun die resultirende Strombewegung betrifft, so leuchtet ein, dass die ursprünglichen *Wurfbewegungen* ohne die durch die *elektromotorische Kraft* hinzukommenden Bewegungen, weil sie symmetrisch nach allen Richtungen stattfinden, zu jener *Strombewegung* nichts beitragen, dass man also bei Bestimmung der letzteren von jenen Wurfbewegungen ganz abstrahiren könne. Für die Strombewegungen der ausgeworfenen Moleküle bleiben dann blos die Bahnen $aa' = bb' = cc' = dd' = ee' = ff' = r'$ übrig.

Auch kann man mit den von A ausgeworfenen, alle von den anderen in demselben *Leiterelement* $= r'$ enthaltenen *ponderabelen Molekülen* auf gleiche Weise ausgeworfenen *positiv elektrischen Moleküle* zum Zwecke der Strombestimmung in A vereinigt denken, und ebenso alle in dem *folgenden Leiterelement* $= r'$ enthaltenen *ponderabelen Moleküle* in A', und so fort, wo $AA' = A'A'' \dots = r'$ den *mittleren Abstand zweier ponderabeler Moleküle* bezeichnet, zwischen denen *unmittelbare wechselseitige Strahlung* stattfindet. r' ist hiernach die mittlere Weglänge, welche die von ponderabelen Molekülen ausgeworfenen positiv elektrischen Moleküle zurückzulegen haben, bis sie in das Bereich des nächsten ponderabelen Moleküls gelangen, um welches sie wieder in Drehung gerathen.

Bezeichnet man mit E die Menge positiver Elektricität, welche von einem ponderabelen Moleküle in der Zeiteinheit ausgeworfen oder ausgestrahlt wird, und mit n die Zahl solcher in der *Längeneinheit* eines *geschlossenen* Leiters enthaltenen Moleküle, so ist r' die mittlere Weglänge, den jedes Theilchen der Elektricitätsmenge E vom Orte des *ausstrahlenden* Moleküls bis zum Orte des *absorbirenden* Moleküls im Leiter l zurückzulegen hat, folglich $nr'E$ der *Grenzwerth der Stromintensität* für wachsende *elektromotorische Kraft*, nach *mechanischem Maasse* ausgedrückt, und es wird die *Stärke eines galvanischen Stroms*, welche in einem solchen geschlossenen Leiter von einer *schwächeren elektromotorischen Kraft* hervorgebracht wird, nur einem *Bruchtheil von $nr'E$ gleich sein.*

Diesen Bruchtheil nun zu bestimmen, werde die *Wurfgeschwindigkeit* der von einem *ponderabelen* Moleküle in A, Fig. 2, ausgehenden positiv elektrischen Moleküle mit a bezeichnet, AB sei die Richtung,

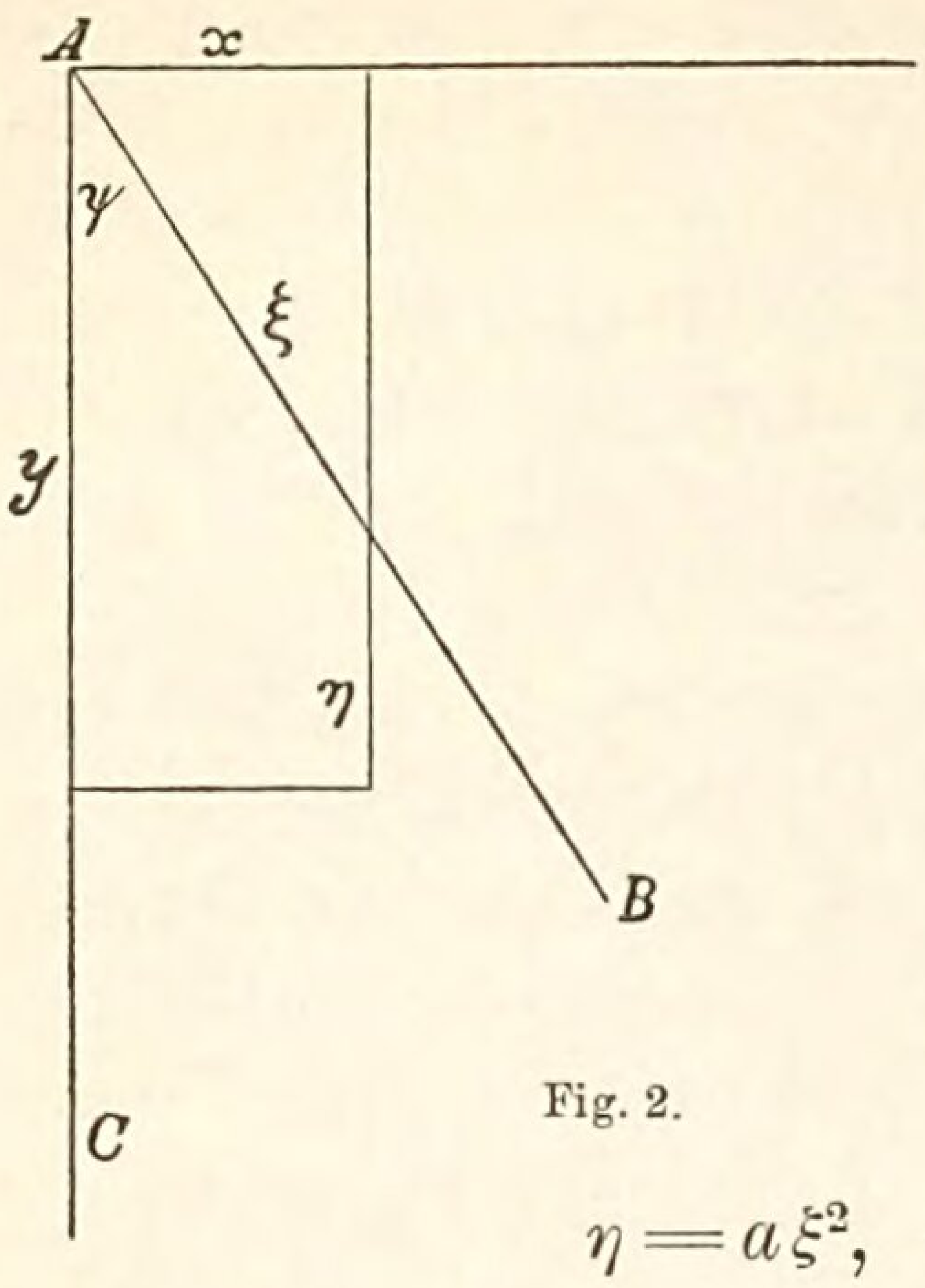


Fig. 2.

in welcher ein solches Molekül sich bewegt und ξ der mit dieser Geschwindigkeit in der Zeit t zurückgelegte Weg $\xi = at$. Wirkt auf dieses Molekül nun aber eine konstante elektromotorische Kraft $= e^0$, nach mechanischem Maasse in der mit AC parallelen Richtung, welche mit AB den Winkel ψ einschliesst, so würde das Molekül durch diese Kraft allein in der Zeit t einen mit t^2 oder ξ^2 proportional wachsenden Weg η zurücklegen Man setze hiernach

$$\eta = a\xi^2,$$
$$x = \xi \sin\psi,$$
$$y = \xi \cos\psi + \eta = x \operatorname{cotg}\psi + \frac{a}{\sin\psi^2} x^2,$$
$$r^2 = x^2 + y^2,$$

woraus

$$y = \operatorname{cotg}\psi \,.\, \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{a}{\sin\psi^2} \cdot (r^2 - y)$$

erhalten wird.

Diese Wurfbewegung erreicht nach den gemachten Annahmen ihr Ende, wenn das von A ausgeworfene Molekül den Weg r' zurückgelegt hat und dadurch in das Bereich des *nächsten ponderabelen Moleküls des metallischen Leiters* gelangt ist.

Bezeichnet man mit y' den Werth von y für $r = r'$, so erhält man die Gleichung:

$$y' = \operatorname{cotg}\psi \,.\, \sqrt{r'^2 - y'^2} + \frac{a}{\sin\psi^2} \cdot (r'^2 - y'^2),$$

woraus sich ergiebt, dass, für wachsende Werthe der *elektromotorischen Kraft* a, y' sich einem *Grenzwerth* nähere, nämlich dem Werthe r'.

Es bezeichne nun E die Menge positiver Elektricität, welche in der Zeiteinheit vom *ponderabelen Moleküle* in A ausgesandt wird, und n die Zahl der in der Längeneinheit des Leiters enthaltenen *ponderabelen Moleküle,* wonach $nr'E$ die Menge positiver Elektricität, welche in dem angegebenen *Grenzfalle* in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters gehen und das Maximum der Stromstärke für in's Unendliche wachsende elektromotorische Kraft nach *mechanischem Maasse* sein würde. Die *Stromintensität* würde hiernach mit der *elektromotorischen* Kraft nicht immer proportional wachsen, sondern würde, während die elektromotorische Kraft in's Unendliche wüchse, sich dem Grenzwerth $nr'E$ nähern.

Ist dagegen die *elektromotorische Kraft* oder die damit proportionale Grösse a *sehr klein*, in welchem Falle $r' \cos\psi$ ein Näherungswerth von y' ist, welcher in dem *letzten mit a multiplicirten Gliede* der gefundenen oben angeführten Gleichung, nämlich

$$y' = \operatorname{cotg}\psi\sqrt{r'^2 - y'^2} + \frac{a}{\sin\psi^2}(r'^2 - y'^2),$$

für y' gesetzt werden kann, so erhält man die Gleichung

$$y' = \operatorname{cotg}\psi\sqrt{r'^2 - y'^2} + ar'^2,$$

oder

$$(y' - ar'^2)^2 \sin\psi^2 = (r'^2 - y'^2)\cos\psi^2.$$

Wird $y'^2\cos\psi^2 - a^2r'^4\sin\psi^2 = y'^2\cos\psi^2 - a^2r'^4\sin\psi^2$ noch hinzugefügt, so erhält man

$$y'^2 - 2y'ar'^2\sin\psi^2 = r'^2\cos\psi^2 - a^2r'^4\sin\psi^2,$$

oder

$$y' - ar'^2\sin\psi^2 = \pm r'\cos\psi.$$

Hiernach ergiebt sich *im Mittel* für je zwei Moleküle, welche von A in den durch die beiden Winkel ψ und $\pi - \psi$ bestimmten Richtungen ausgesandt werden,

$$y' = ar'^2\sin\psi^2.$$

Der Mittelwerth der Wege aller von A ausgesandten Moleküle, in der Richtung der darauf wirkenden elektromotorischen Kraft, wird hiernach erhalten

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y'\sin\psi\, d\psi = ar'^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi^3\, d\psi = \tfrac{2}{3}ar'^2.$$

Wäre dieser Werth $= r'$, so würde die *Stromintensität* gleich dem vorher betrachteten *Grenzwerthe* sein, nämlich $= nr'E$, nach mechanischem Maasse; hiervon beträgt nun aber die *wirkliche Stromintensität* bei kleinen Werthen von a, wie sie hier vorausgesetzt worden sind, nur einen kleinen Bruchtheil, nämlich $\frac{2}{3}ar'$, wonach also die *wirkliche Stromintensität nach mechanischem Maasse* erhalten wird, nämlich

$$i^0 = \tfrac{2}{3}ar'.nr'E\cdot\left[\sqrt{\frac{MR^3}{T^4}}\right],$$

wenn die zu Grunde gelegten *Maasse der Masse, Länge* und *Zeit* mit *M, R* und *T* bezeichnet werden. Hierin bedarf nur a noch einer näheren Bestimmung, die auf folgende Weise erlangt wird. Die auf

jede *elektrostatische Einheit* der von A ausgehenden Elektricität wirkende *elektromotorische Kraft nach mechanischem Maasse* werde mit e^0 bezeichnet. Wird die Masse der elektrostatischen Einheit mit $= [1/\sigma] M$ gesetzt, so ist die *beschleunigende Kraft* $= \sigma e^0$ und der in der Zeit t in Folge dieser Beschleunigung von A an zurückgelegte Weg

$$\eta = \tfrac{1}{2} \sigma e^0 t^2 = a \xi^2 = a \,.\, \alpha^2 t^2;$$

folglich

$$a = \tfrac{1}{2} \frac{\sigma e^0}{\alpha^2}.$$

Hiernach ist also die *Stromintensität nach mechanischem Maasse:*

$$i^0 = \tfrac{1}{3} \frac{\sigma e^0 r'}{\alpha^2} \cdot n r' E \left[\sqrt{\frac{MR^3}{T^4}}\right].^{1)}$$

Nach dieser Bestimmung der *Stromintensität* i^0 *nach mechanischem Maasse* bleibt noch die *elektromotorische Kraft nach mechanischem Maasse* zu bestimmen übrig, welche auf die ganze geschlossene Kette wirkt, deren Länge mit l bezeichnet werden soll, und wovon jede Längeneinheit n ponderabele Moleküle enthalte, von denen jedes gleich dem Moleküle A, E positiv elektrische Einheiten in jeder Sekunde auswerfe, und e^0, wie angegeben worden ist, die auf jede *elektrostatische* Einheit (deren Masse $= [1/\sigma] M$ gesetzt werden soll) wirkende *elektromotorische Kraft nach mechanischem Maasse* bezeichnet.

nlE ist hiernach die Zahl der in der ganzen Kette vorhandenen in Wurfbewegung befindlichen *elektrostatischen Einheiten.* Auf jede Einheit dieser Elektricität wirkt nun die *elektromotorische Kraft* e^0, aber nicht 1 Sekunde lang, in welcher dieses Theilchen vermöge seiner schon vorhandenen Wurfgeschwindigkeit den Weg α zurücklegen würde, sondern nur während des Bruchtheils r'/α einer Sekunde, d. i. während der Zeit, in welcher dasselbe mit der Geschwindigkeit α den Weg r' zurücklegen würde.

Es ergiebt sich hieraus die elektromotorische Kraft für die ganze Kette nach mechanischem Maasse $= nlEe^0$, die aber nicht *fortwährend*

[1]) Dieser Werth von i^0 ist derselbe, welcher in POGGENDORFF's Annalen, Bd. 156, S. 53 [WILHELM WEBER's Werke, Bd. IV, p. 352], angegeben worden ist, wo nur der hier mit $nr'E$ bezeichnete Grenzwerth der Stromintensität mit $n\varepsilon\sigma$ bezeichnet worden ist. Die am a. a. O. darauf folgende Bestimmung der elektromotorischen Kraft $e^0 = \gamma/\sigma \left[\sqrt{MR^{-1}T^{-2}}\right]$ dagegen bedarf der hier folgenden Berichtigung, nämlich $e^0 = 2\alpha^2 a/\sigma \left[\sqrt{MR^{-1}T^{-2}}\right]$.

auf die Gesammtheit der in irgend einem Augenblicke von allen nl ponderabelen Molekülen der geschlossenen Kette gleichzeitig ausgeworfenen Theilchen wirkt, sondern nur während r'/a Sekunde, die aber bei jeder folgenden Aussendung, d. i. in jeder Sekunde Emal, sich wiederholt, was in der Wirkung gleich zu achten ist, wie wenn die *elektromotorische Kraft für die ganze Kette nach mechanischem Maasse*

$$E^0 = nlE \cdot \frac{r'}{a} e^0$$

wäre. Der Quotient dieser *elektromotorischen Kraft*, dividirt mit der *Stromintensität nach mechanischem Maasse* $i^0 = \frac{1}{3}[\sigma e^0 r'/a^2] . nr'E$ giebt alsdann den *Widerstand der Kette nach mechanischem Maasse:*

$$w^0 = nlE \cdot \frac{r'}{a} \cdot \frac{e^0}{\frac{1}{3}\frac{\sigma e^0 r'}{a^2} \cdot nr'E},$$

$$w^0 = \frac{3al}{\sigma r'},$$

wo r'/a die nach einem Maasse T ausgedrückte Zeit tT bezeichnet, welche jedes ausgeworfene Theilchen braucht, um seine Bahn r' zurück zu legen. Ferner ist l die nach dem Längenmaasse L ausgedrückte Länge der ganzen geschlossenen Kette $= lL$. Endlich ist $3/\sigma$ eine reine Zahl, nämlich σ das reine Zahlenverhältniss der Masse der elektrostatischen Einheit zur Masse eines Milligrammes. Nach festgesetzten Maassen ergiebt sich also der *Widerstand der Kette nach mechanischem Widerstandsmaasse*

$$w^0 = \frac{3}{\sigma} \cdot \frac{al}{r'} \left[\frac{R}{T}\right],$$

d. i. der Widerstand einer Kette nach mechanischem Maasse ist der *Länge l der Kette direkt proportional* und der Zeit r'/a, in welcher ein von einem ponderabelen Moleküle ausgeworfenes elektrisches Molekül mit seiner Wurfgeschwindigkeit a die mittlere Länge r' der Bahnstrecke bis zum nächsten ponderabelen Molekül durchläuft, *umgekehrt proportional*, wonach die Angabe in POGGENDORFF's Annalen, Bd. 156, S. 54,[1]) zu berichtigen ist.

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. IV, p. 352.]

8.

Einige Aufgaben, welche nach dem Grundgesetze elektrischer Wirkung in Verbindung mit der Annahme von der Zusammensetzung ponderabeler Moleküle aus positiv und negativ elektrischen Molekülen noch zu lösen sind.

Alle *beharrlichen Aggregatzustände* elektrischer und ponderabeler Moleküle müssen unter der Voraussetzung, dass ponderabele Moleküle Verbindungen positiv und negativ elektrischer Moleküle seien, aus dem *Grundgesetze der elektrischen Wirkung* abgeleitet werden können, woraus sich dann die *Mechanik aller in einem solchen Aggregatzustande befindlichen Körper* ergeben muss.

Es würde hiernach also zunächst

1. die *Mechanik ausdehnsamer Flüssigkeiten* (Gase),
2. die *Mechanik unausdehnsamer Flüssigkeiten,*
3. die *Mechanik fester elastischer Körper*

zu entwickeln sein.

Bei Begründung der Mechanik der Körper im *ersten der drei genannten Aggregatzustände,* nämlich der *Gase,* würde anzunehmen sein, dass dieselben aus *ponderabelen Kernen* bestehen, welche sich in grösseren Zwischenräumen von einander befinden und jeder von einem positiv elektrischen *Trabanten* begleitet wird. In *jeder Gasart* würden *alle Kerne gleich* aber verschieden von denen jeder anderen Gasart anzunehmen sein; die *Trabanten* dagegen würden auch für *alle Gasarten dieselben* sein, nämlich lauter gleiche positiv elektrische Moleküle. Zwei Moleküle irgend eines Gases mit ihren Trabanten würden also vermöge der *Gravitationskraft ihrer Kerne* einander anziehen, vermöge *elektrischer Abstossungskraft ihrer Trabanten* aber einander abstossen, und zwar würden, bei *gleichen Entfernungen der Gasmoleküle, gleiche Abstossungskräfte* der *Trabanten für alle Gasarten, aber verschiedene Anziehungskräfte der Kerne für verschiedene Gasarten* stattfinden. Ausserdem würde für je zwei Gasmoleküle noch eine wechselseitige Anziehungskraft des Kernes des einen Moleküls und des Trabanten des anderen Moleküls hinzukommen, die für alle Molekülenpaare gleich, aber im Verhältniss zu den vorher erwähnten Abstossungskräften sehr klein sind.

Die hiernach stattfindende Gleichheit der Abstossungskräfte der Gasmoleküle bei gleichen Entfernungen bei allen Gasen ist von grosser Bedeutung für die Mechanik ausdehnsamer Flüssigkeiten (Gase) und verdient künftig noch genauerer Betrachtung.

Zur Begründung der *Mechanik der Körper in dem zweiten der drei genannten Aggregatzustände,* nämlich dem der *unausdehnsamen Flüssig-*

keiten, würde anzunehmen sein, dass dieselben aus *ponderabelen Molekülen ohne Trabanten* bestehen, die sich vermöge der von ihnen wechselseitig auf einander ausgeübten *Gravitationskraft* um einander drehen.

Endlich zur Begründung der *Mechanik* der Körper im dritten der drei genannten Aggregatzustände, nämlich der festen elastischen Körper, dürfte zunächst der Unterschied zwischen *elektrischen* Leitern und *Nichtleitern* in Betracht zu ziehen sein, ein Unterschied, der wesentlich in der inneren Konstitution dieser Körper begründet sein muss, wie schon aus den von den *metallischen Leitern* handelnden Art. 6 und 7 entnommen werden kann.

Der Zusammenhang des elektrischen Grundgesetzes mit dem Gravitationsgesetze ponderabeler Körper fordert zur festen Begründung zunächst eine auf dem elektrischen Grundgesetze beruhende Erklärung der *drei Aggregatzustände*, nämlich des *festen*, *flüssigen* und *gasförmigen* und ihrer Abhängigkeit von der Wärme, weil nämlich nach jenem Zusammenhange die ganze ponderabele Körperwelt in positiv und negativ elektrische Moleküle auflösbar sein soll, wonach also nicht blos das *Gravitationsgesetz* der ponderabelen Körper, sondern auch alle *Aggregatzustände* derselben und alle Gesetze ihrer Veränderlichkeit *aus dem elektrischen Grundgesetze* müssten abgeleitet werden können, wobei es hauptsächlich auf *Erklärung der Wärme* und deren Einfluss auf den *Aggregatzustand* ankommen würde.

Man unterscheidet den *festen*, *flüssigen* und *gasförmigen* Aggregatzustand ponderabeler Körper und bei *festen Körpern* insbesondere wieder *Metalle und Krystalle*, wovon sich die *ersteren* durch Leitung galvanischer Ströme, die *letzteren* durch Fortpflanzung des Lichtes auszeichnen.

Was Körper des ersteren, nämlich festen Aggregatzustands betrifft, so hat die Betrachtung der dazu gehörigen Metalle und ihres mit *Wärmeleitungsvermögen eng verbundenen elektrischen Leitungsvermögens* zur Annahme *molekulärer* Konstitution geführt, wonach sich positiv elektrische Moleküle in diesen Körpern um die einzelnen ponderabelen Moleküle mit fortwährend wechselndem Halbmesser herumbewegen, jedes so lange, bis es in Wurfbewegung übergeht und dadurch aus der Wirkungssphäre *eines ponderabelen Moleküls zu der eines anderen* geführt wird. Es gründet sich darauf die *Wärmeleitung* der Metalle durch wechselseitige *Strahlung* der ponderabelen Moleküle und das *galvanische Leitungsvermögen* der Metalle. Da aber die um die ponderabelen Moleküle sich drehenden positiv elektrischen Moleküle sich in keinem stabilen Gleichgewicht befinden, so kann keine Wellenbewegung in ihnen stattfinden, folglich keine Fortpflanzung des Lichtes.

Ferner führt, was den *festen Aggregatzustand* betrifft, die Betrachtung der *Krystalle* mit *Fortpflanzung des Lichtes* durch dieselben und als *elektrische Isolatoren,* auf den von Mossotti *begründeten festen Aggregatzustand,* wonach Moleküle in gewissen Abständen von einander im *stabilen Gleichgewichte* sich befinden, welches Gleichgewicht zu Stande kommt durch *Abstossungskräfte* dieser Moleküle selbst, ferner durch die *Abstossungskräfte* der Moleküle eines die Zwischenräume enthaltenden (positiv elektrischen) Fluidums und endlich durch die *Anziehungskräfte* jener ponderabelen und dieser (positiv elektrischen) Moleküle.

Bei dem normalen Gleichgewichtszustande des die Zwischenräume erfüllenden elektrischen Fluidums ist dasselbe zugleich der Lichtäther, durch welchen Licht fortgepflanzt wird, welchem, vermöge seiner molekularen Zusammensetzung, drei Elasticitätsaxen zukommen. Aus dem normalen stabilen Gleichgewichtszustande ergiebt sich ferner, warum keine durch wechselseitige Strahlung der Moleküle vermittelte Wärme und Elektricitätsleitung in Krystallen stattfinde, aber dafür in Folge jeder Gleichgewichts-Störung, Wellenbewegungen, d. i. Lichtverbreitung in dem alle Zwischenräume der ponderabelen Moleküle füllenden imponderabelen Medium, nämlich dem *Lichtäther.*

9.

Fortsetzung.

Ausser der *Mechanik der Körper nach Verschiedenheit ihrer Aggregatzustände* müssen, unter gleichen Voraussetzungen wie im vorigen Artikel, aus dem *Grundgesetze elektrischer Wirkung* auch *alle chemischen Eigenschaften der Körper* in Abhängigkeit von ihrer molekularen Konstitution abgeleitet werden können, z. B. *alle chemischen Eigenschaften des Wasserstoffs, Sauerstoffs* und des *Wassers.*

Es werde z. B. angenommen, dass jedes Molekül *Sauerstoff* aus 160 positiv elektrischen und ebenso vielen negativ elektrischen *einfachen* Molekülen (deren Entfernungen von einander, sämmtlicher positiven, wie auch sämmtlicher negativen, kleiner als die kritische Entfernung ϱ sind) zusammengesetzt sei, wozu im gasförmigen Aggregatzustande noch ein positiv elektrisches Molekül als *Trabant* hinzukomme; dass ferner jedes Molekül *Wasserstoff* aus 10 einfachen positiv elektrischen und ebenso viel einfachen negativ elektrischen Molekülen zusammengesetzt sei, wozu ebenfalls im gasförmigen Aggregatzustande noch ein positiv elektrisches Molekül als *Trabant* komme; und endlich ebenso, dass ein Molekül *Stickstoff* aus 140 positiv elektrischen und ebensoviel negativ elektrischen Molekülen zusammengesetzt sei, wozu

im gasförmigen Zustande auch noch ein positiv elektrisches Molekül als *Trabant* hinzukomme.

Bei gleichem Drucke (bei welchem diese verschiedenen zusammengesetzten Moleküle gleichen Raum einnehmen, würden sich also die Dichtigkeiten verhalten wie die Zahlen der einfachen elektrischen Molekülenpaare, die sie, abgesehen von ihren Trabanten, enthalten, nämlich wie 160 : 10 : 140 = 16 : 1 : 14), wobei im gleichen Voluminibus dieser Gase die Zahl der Gasmoleküle gleich ist, würde dieser gleiche Druck blos von der Wechselwirkung der *Trabanten* herrühren, deren Entfernungen von einander bei gleichem Drucke gleich wäre. Genau genommen wäre diesem aus der Wechselwirkung der Trabanten resultirenden Drucke noch ein aus wechselseitiger Gravitation der ponderabelen Gasmoleküle und aus der Wechselwirkung eines jeden Gasmoleküls mit dem Trabanten der benachbarten Gasmoleküle resultirende Korrektion hinzuzufügen, die aber als verschwindend klein betrachtet werden darf.

Bei Vereinigung von Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasser würden nun die positiv elektrischen *Trabanten* der ponderabelen Sauerstoff- und Wasserstoffmoleküle entweichen; diese ponderabelen Moleküle selbst aber in Rotation um einander versetzt werden, wodurch *Wasser* gebildet würde; wenn dagegen kein solches Entweichen der positiv elektrischen Trabanten stattfände, so würde durch dieselbe Vereinigung *Wasserdampf* gebildet werden.

Die *lebendige Kraft,* welche jene ponderabelen Sauerstoff- und Wasserstoff-Moleküle vermöge ihrer Drehung um einander besitzen, ist die *latente Wärme des Wassers;* wird dieselbe dem Wasser entzogen, so bilden jene ponderabelen Moleküle kein *Wasser* mehr, sondern *Eis.* Die Moleküle, welche sich im Wasser um einander drehten, reihen sich im Eise fest an einander in Folge fester Verbindung des *positiv elektrischen* Moleküls des einen ponderabelen Moleküls mit dem *negativ elektrischen* Moleküle eines ponderabelen Nachbarmoleküls u. s. f.

Alle ponderabelen Körper, durch welche Licht- und Wärmestrahlen gehen, bestehen aus isolirten *ponderabelen Molekülen,* deren Zwischenräume von einem imponderabelen *Licht-* oder *Wärmeäther* erfüllt sind. Es ist kein Grund vorhanden, nicht anzunehmen, dass dieser *Licht-* oder *Wärmeäther* von positiv elektrischen Molekülen gebildet sei, von welchen auch der leere Weltenraum erfüllt wird, wenn auch der in jenen Zwischenräumen von ponderabelen Molekülen eingeschlossene Aether durch die letzteren eine Modifikation seines Aggregatzustandes erleiden sollte.

Alle lebendigen Kräfte sind Produkte von Massen in die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten und zerfallen in solche, bei welchen wir die

Massen sowohl als auch ihre Geschwindigkeiten beobachten können, und in solche, aus deren Beobachtung wir unmittelbar weder Kenntniss der Massen, noch der Geschwindigkeiten, deren Produkte sie sind, erhalten. Die lebendigen Kräfte der letzteren Art werden *Licht* und *Wärme* genannt, weil alle Licht- und Wärmeempfindungen Wirkungen lebendiger Kräfte sind, durch welche wir unmittelbar keine Kenntniss der Massen, noch ihrer Geschwindigkeiten, erhalten, deren Produkte sie sind.

Gleichelektrische Moleküle in kleineren Entfernungen als ϱ von einander können sehr verschiedene Bewegungen haben, ohne den Abstand ϱ zu überschreiten und diese Bewegungen können auch mannigfaltige Wirkungen nach aussen ausüben, wonach diesen gleichartig elektrisch zusammengesetzten Molekülen Wärme zukommt, welche bald von aussen auf sie, bald von ihnen nach aussen übertragen wird.

10.

Ueber verschiedene Bewegungen in den aus positiv und negativ elektrischen Molekülen gebildeten ponderabelen Körpermolekülen und den davon abhängigen Wärmeeigenschaften.

Wenn wirklich in der Welt nur elektrische Moleküle existiren, welche durch ihre Verbindungen alle ponderabelen Moleküle, und unverbunden alle imponderabelen Medien bilden, welche mit dem Namen elektrischer Ladungen, oder als Licht- und Wärmeäther bezeichnet zu werden pflegen, so leuchtet ein, dass alle Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung, sowie alle Licht- und Wärmeerscheinungen, jener ponderabelen Körper sowohl als auch dieser imponderabelen Medien aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung müssten abgeleitet werden können, wenn Lage und Bewegung aller elektrischen Moleküle, von welchen jene ponderabelen Körper und diese imponderabelen Medien gebildet werden, zu irgend einer Zeit gegeben wären.

Ist nun auch keine allgemeine Lösung dieser Aufgabe zu hoffen und zu erwarten, so würde doch, bei der unendlichen Mannigfaltigkeit der ponderabelen Körper, die Möglichkeit vorhanden sein, die Zusammensetzung *eines oder einiger* dieser Körper, sowie deren gegenseitige Lage und Bewegung zu einer bestimmten Zeit zu errathen und durch die daraus folgende Entwickelung ihrer Gesetze des Gleichgewichtes und der Bewegung, sowie ihrer Licht- und Wärmeerscheinungen, mit beobachteten Erscheinungen dieser Körper zu vergleichen und daran zu prüfen. Es würde durch solche einzelne glückliche Griffe die Bahn gebrochen werden zu entscheidender Prüfung und fester Begründung der aufgestellten Hypothese oder zu deren Widerlegung.

Es würde z. B. dahin schon gehören, wenn es gelänge, aus einem in der Welt im Ganzen schon vorhandenen Ueberschuss von positiver Elektricität das Vorhandensein eines positiv elektrischen imponderabelen Mediums im Weltenraume nachzuweisen und die Gesetze der Wellenbewegung eines solchen Mediums aus dem Grundgesetze elektrischer Wirkung abzuleiten und die Uebereinstimmung derselben mit den Gesetzen der Verbreitung des Lichts und der strahlenden Wärme im Weltenraume nachzuweisen.

Ebenso würde es dahin gehören, wenn es gelänge, Körper im *gasförmigen* Aggregatzustande als aus ponderabelen Molekülen, verbunden mit positiv elektrischen Molekülen als Trabanten bestehend zu betrachten, so dass die ponderabelen Moleküle für verschiedene Gasarten verschieden, ihre elektrischen Trabanten aber für alle Gasarten gleich wären, und wenn es gelänge, alle Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung, mit Einschluss der Licht- und Wärmeverbreitung in allen diesen Gasen aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung abzuleiten. Ohne einige solche entscheidende Resultate ist auf feste Begründung der Lehre von der elektrischen Zusammensetzung ponderabeler Moleküle nicht zu rechnen. Insbesondere scheint für die grossen Verschiedenheiten chemischer Verwandtschaft zwischen verschiedenen Arten ponderabeler Moleküle sich kein genügender Grund zu ergeben.

Es würde hierbei vorzüglich auf die Verschiedenheit der ponderabelen Moleküle ankommen, von denen die Verschiedenheit der specifischen Gewichte der Gase bei gleichem Drucke abhängen würde. In jedem Gasmoleküle wäre, abgesehen von dem für alle gleichen Trabanten, zwischen einem positiv elektrischen und einem negativ elektrischen Moleküle zu unterscheiden, von denen jedes entweder einfach oder selbst wieder aus mehreren zusammengesetzt sein kann, und zwar letztere *entweder scheidbar oder unscheidbar* zusammengesetzt, worauf mannigfaltige Verschiedenheiten der Gase begründet sein dürften.

Hierzu würde noch kommen, dass die Bewegungen der elektrischen Moleküle um einander, welche *ponderabele Kerne* der Gasmoleküle bilden, nach den Gesetzen der Induktion von äusseren Einflüssen abhängig und demgemäss veränderlich sein würden, jedoch aber nach Entfernung dieser äusseren Einflüsse immer wieder hergestellt werden würden, so dass sie, abgesehen von solchen vorübergehenden Aenderungen, bleibende Unterschiede der Gase bildeten.

11.

Eis, Wasser, Dampf.

Bei Eis, Wasser, Dampf findet, unter der Voraussetzung, dass ponderabele Moleküle Verbindungen positiv und negativ elektrischer Mole-

küle sind, der interessante Fall statt, dass blos durch Wärme, d. h. blos Bewegungsverschiedenheiten der Moleküle, so wesentliche Verschiedenheiten, wie die der Aggregatzustände des Eises, Wassers und Dampfes, hervorgebracht werden.

Es kommt hierbei zunächst in Betracht, dass den ponderabelen Molekülen des Dampfes eine Kraft wechselseitiger Abstossung zugeschrieben werden muss, welche den ponderabelen Molekülen des Eises und Wassers nicht zukommt. Diese wechselseitige Abstossungskraft kann aber diesen ponderabelen Molekülen nur in Folge gleichartig (positiv) elektrischer Trabanten in ihrer Begleitung zukommen, welche die ponderabelen Moleküle des Wassers bei ihrer Verwandlung in Wasserdampf erhalten haben müssen. Es würde sich hieraus auch ergeben, dass Wasserdampf gegen das Wasser aus dem er entstanden ist, sich *positiv elektrisch* verhalten müsse, was durch die elektrischen Wirkungen der mit Dampfkesseln dargestellten Elektrisirmaschinen wirklich auch bestätigt zu werden scheint. Es wird dadurch unnöthig, bei Erklärung der Wirksamkeit dieser Dampf-Elektrisirmaschinen auf die *Reibung des Dampfes* an den Wänden der Ausflussröhren zu rekurriren.

Die[1]) ponderabelen Moleküle [ponderabelen Kerne] der Gase und Dämpfe üben keine abstossende Kraft auf einander aus, woraus folgt, dass die Ursache der Expansivkräfte der Gase und Dämpfe in ihren ponderabelen Molekülen nicht liegen könne. Jedes ponderabele Molekül, also auch jedes ponderabele Gas- oder Dampfmolekül, zieht aber ein *positiv elektrisches* Molekül an, welches daher in der Wirkungssphäre eines ponderabelen Moleküls nur bleiben kann, wenn es sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit darum dreht und also einen *Trabanten* des ponderabelen Moleküls bildet. Die ponderabelen Moleküle der Gase und Dämpfe, wenn sie von solchen von imponderabelen positiv elektrischen Molekülen gebildeten Molekülen gebildeten *Trabanten* begleitet werden, üben, durch ihre Trabanten, *abstossende Kräfte* auf einander aus, die viel grösser sind als die *anziehenden Kräfte,* welche ihre ponderabelen Moleküle selbst auf einander ausüben. Von diesen abstossenden Kräften solcher Trabanten rühren die Expansivkräfte aller Gase und Dämpfe her. Auch sind bei gleichem Druck und Temperatur die specifischen Gewichte der Gase und Dämpfe den Gewichten ihrer ponderabelen Moleküle nahezu proportional, weil das Gewicht der Trabanten im Vergleich mit dem Gewicht der ponderabelen Moleküle klein ist.

[1]) [Der folgende Absatz, die „Expansivkräfte der Gase und Dämpfe“ betreffend, findet sich im Original am Schlusse der Abhandlung, wurde aber des Zusammenhanges wegen an dieser Stelle eingefügt.]

Bei der Verwandlung des *Wassers in Eis* durch Entziehung von Wärme, d. h. durch Verlangsamung der Drehung der positiv und negativ elektrischen Moleküle um einander, muss sich zunächst der Grund einer *Fadenbildung* ergeben, indem bei *verlangsamter* Drehung die Wirkungen des positiv elektrischen und des negativ elektrischen Poles, welche jedes ponderabele Molekül besitzt, mehr hervortritt als bei *schneller Drehung*. In Folge dieser bei langsamer Drehung stärker hervortretenden Wirkung der elektrischen Pole werden sich zwei benachbarte Moleküle mit ihren ungleichartigen Polen fester an einander schliesen in Reihen, worin sie wie die Theile eines Fadens zusammenhängen.

Woher kommen nun aber solche Trabanten in das Wasser, wenn das Wasser bei eindringender Wärme verdampft?

11 a.

Schmelzpunkt des Eises und Siedepunkt des Wassers.

Wenn auch jedes ponderabele Molekül aus einem positiv elektrischen und einem negativ elektrischen Moleküle zusammengesetzt ist, so können doch grosse Verschiedenheiten sowohl der positiv als auch der negativ elektrischen Moleküle in verschiedenen ponderabelen Molekülen Statt finden, je nachdem die elektrischen Moleküle einfach oder vielfach sind, nur müssen letztere, die positiv elektrischen sowohl als auch die negativ elektrischen, nach Art. 5 *unscheidbar* sein, d. h. sie können aus einer beliebigen Anzahl gleichartig elektrischer Moleküle bestehen, von denen aber keines von einem der anderen in einer Entfernung $> \varrho$ sich befindet. Hiernach kann ein ponderabeles Molekül gebildet werden aus einem nfachen aber unscheidbaren positiv elektrischen Moleküle und einem nfachen ebenfalls unscheidbaren negativ elektrischen Moleküle, welche, indem sie sich um einander drehen, durch ihre wechselseitige Anziehungskraft zusammengehalten werden. Solche Moleküle heissen *ponderabele Körperelemente* oder *chemische Atome*, deren *Gewichte* den Zahlen n proportional sind.

Unter ihnen müssten nun alle bisher entdeckten chemischen Atome enthalten sein. Wäre z. B. der *Wasserstoff* ein solcher aus *ponderabelen Elementartheilchen* bestehender Körper, und zwar derjenige, für welchen $n = 1$ wäre, so würde sich daraus leicht ergeben, dass der *ponderabele Elementarkörper*, für welchen $n = 12$ sei, der *Kohlenstoff* sein müsse, derjenige, für welchen $n = 14$, der *Stickstoff*, derjenige, für welchen $n = 16$, der *Sauerstoff* sein müsse u. s. w. bis zum Gold, wofür $n = 197$, und *Silber*, wofür $n = 216$ sein müsste. Es würde sich hieraus also eine grosse Menge ponderabeler Elementarstoffe ergeben, die sich nicht noch

weiter in andere ponderabele Elementarstoffe auflösen lassen, möglicherweise aber in positiv elektrische und negativ elektrische Moleküle und zwar aus n einfachen *gleichartigen* und unscheidbar zusammengesetzten elektrischen Molekülen, wo n eine ganze Zahl bezeichnet, denen zwar kein *Gewicht* zukäme, aber eine *Masse,* die nicht immer als verschwindend zu betrachten sein dürfte.

Es fragt sich nun aber, worin die Aenderung eigentlich besteht, die mit dem *Eise beim Schmelzpunkte* vorgeht, sowie auch, worin die Aenderung besteht, die mit dem *Wasser beim Siedepunkte* vorgeht.

Wesentlich ist dabei, dass Wärme in den Körper einströmt ohne Temperaturveränderung desselben. Die einströmende Wärme vermehrt die lebendige Kraft im Körper; die ponderabelen Theilchen nehmen aber an dieser Vermehrung der lebendigen Kraft keinen Antheil; jene Vermehrung der lebendigen Kraft muss also in den zwischen den ponderabelen Theilchen befindlichen und unabhängig von ihnen beweglichen gleichartig elektrischen Theilchen Statt finden.

In *metallischen Leitern* wird angenommen, dass die positiv elektrischen Theilchen um die ponderabelen Moleküle, von denen sie angezogen werden, in Kreisbewegung sich befinden, und dass diese Kreisbewegung bei eindringender Wärme beschleunigt werde, und durch Wurfbewegung von der Umgebung eines ponderabelen Moleküls zu der eines anderen fortgepflanzt werden könne.

In *feuchten Leitern,* insbesondere im Wasser, wird dieselbe Annahme gemacht mit dem Unterschiede, dass die bei eindringender Wärme *beschleunigte* Kreisbewegung positiv elektrischer Theilchen um jedes ponderabele Molekül nicht in Wurfbewegung übergehe und dadurch *keineswegs* von der Umgebung eines ponderabelen Moleküls zu der eines benachbarten Moleküls fortgepflanzt werde, sondern beim ersteren Moleküle beharre, aber durch vergrösserte Centrifugalkräfte die feste Verbindung dieses und der benachbarten *Eismoleküle* nach Mossotti löse, wodurch die Verwandlung des Eises in Wasser bewirkt werde.

Die ponderabelen Wassermoleküle mit ihren von positiv elektrischen Molekülen gebildeten *Trabanten* stossen aber einander wie Luftmoleküle ab und würden sich in Folge hiervon in einem weiteren Raume ausbreiten, wenn nicht ein bestimmter *äusserer Druck* auf sie ausgeübt würde. Bleibt dieser *äussere Druck* aber konstant, während durch fortgesetzte Wärmezuströmung die Centrifugalkräfte der Trabanten immer wachsen, so wird dadurch der *äussere Druck* überwunden und das in Wasserdampf verwandelte Wasser breitet sich luftartig aus.

11b.

Krystallbildungen fester Körper.

Alle ponderabelen Moleküle mit ihren Trabanten üben aufeinander Anstossungs- und Richtungs- oder Drehungskräfte aus, welche von besonderer Bedeutung für die Krystallbildungen sind.

Die grosse Mannigfaltigkeit und Verschiedenheit dieser Krystallbildungen dürfte aber vorzugsweise in den Verschiedenheiten jener ponderabelen Moleküle selbst begründet sein, nämlich in den Verschiedenheiten der *Zahl* positiv und negativ elektrischer Moleküle, von denen sie gebildet werden. Ponderabele Moleküle, welche von je einem positiv und negativ elektrischen Moleküle gebildet werden, sind ganz verschieden von denen, welche von je 10 oder von je 100 positiv und negativ elektrischen Molekülen gebildet werden.

Es sollen nämlich sowohl alle positiv elektrischen wie alle negativ elektrischen Moleküle, welche ein ponderabeles Molekül bilden, im Raum einer Kugel von einem Durchmesser $< \varrho$ enthalten sein, damit die Entfernung je zweier stets kleiner als ϱ bleibe. Die Zahl der gleichartig elektrischen Moleküle, welche in einem solchen Raume enthalten sein können, hängt hiernach offenbar vom Verhältniss ihres Durchmessers zu ϱ ab. Ist dieses Verhältniss ein sehr kleiner Bruch, so kann die Zahl der gleich elektrischen Moleküle in einem solchen Raume sehr gross sein, woraus die Möglichkeit einleuchtet, dass diese Zahl 10 oder 100 übersteigt.

Zu dieser Verschiedenheit in der *Zahl*, sowohl von positiv als auch von negativ elektrischen Molekülen, von denen die ponderabelen Moleküle gebildet werden, kommt nun die Mannigfaltigkeit verschiedener Bahnen und Geschwindigkeiten aller dieser Moleküle in ihren Bahnen, welche sie in den auf den Durchmesser ϱ beschränkten Kugelraum ausführen können, was alles natürlich auf die Wechselwirkungen der ponderabelen Moleküle, denen sie angehören, und auf die davon abhängige Krystallbildung, grossen Einfluss haben muss, denn ein im Kreise herum sich bewegendes elektrisches Molekül in einem ponderabelen Moleküle vertritt in seiner Wirkung auf gleiche Moleküle einen Magneten, und diese Wirkung, wenn sie auch in messbarer Entfernung verschwindet, kann in Molekularentfernungen sehr gross sein, ganz in Uebereinstimmung mit den chemischen Kräften, die sie hier vertreten soll, da Beschränkung auf Molekulardistanzen für alle chemischen Kräfte charakteristisch ist.

12.

Der Lichtäther ist ein statisches von positiv elektrischen Molekülen gebildetes Medium.

Positiv elektrische Moleküle können in Ruhe sich befinden, wenn sie in einem *fest begrenzten* Raume eingeschlossen und so vertheilt sind, dass jedes Molekül, soweit es ringsum von anderen Molekülen umgeben ist, im Mittelpunkte von lauter Molekülenpaaren liegt, so dass also die beiden Moleküle jedes Paares symmetrisch in gleichen Abständen auf entgegengesetzten Seiten sich befinden.

Würde ein solches Molekül in irgend einer Richtung, z. B. von Nord nach Süd, ein klein wenig verschoben und dadurch den Molekülen auf der Südseite genähert, von den Molekülen der Nordseite aber entfernt, so würde es von Süd nach Nord zurückgetrieben werden, woraus einleuchtet, dass es ohne solche Verschiebung im *stabilen Gleichgewichte* war.

Dasselbe, was von Molekülen in einem *fest begrenzten* Raume gilt, gilt auch von unzähligen, einen unbegrenzten Raum auf gleiche Weise erfüllenden Molekülen, und jede Störung der Gleichgewichtslage dieser Moleküle würde, wie man hiernach leicht übersieht, durch Wellenbewegung fortgepflanzt werden.

Im Weltenraume werden nun aber blos Licht- und Wärmewellen fortgepflanzt, wenn also im Weltenraume nur positiv elektrische Moleküle auf die angegebene Weise vertheilt sein können, so müssen wohl, so scheint es, diese positiv elektrischen Moleküle im Weltenraume den *Lichtäther* bilden.

Die Geschwindigkeit, mit welcher in einem solchen elektrischen Medium die Lichtwellen fortgepflanzt werden, hängt bei gegebener Molekülenmasse von der Grösse der Kraft ab, welche bei gegebener Verschiebung auf das vorschobene Molekül wirkt. Diese Kraft ist desto grösser, je grösser die Molekülenzahl in der Volumeneinheit ist.

Jede solche Welle, auch wenn sie von einem einzigen Punkt ausgegangen ist, breitet sich zu einer Fläche aus und die Schwingungsrichtung der einzelnen Moleküle in dieser Fläche kann dann entweder senkrecht gegen die Fläche sein (Longitudinalwellen), oder mit der Fläche zusammenfallen (Transversalwellen.) Da die Länge aller Lichtwellen sehr klein ist, doch aber über eine grosse Zahl von Molekülenschichten sich erstrecken muss, so ergiebt sich daraus, dass die Zahl der Moleküle auch in kleinen Volumentheilen sehr gross sein müsse, woraus auf sehr kleinen Rauminhalt der Moleküle geschlossen werden muss, wenn nämlich zwischen Lichtäthermolekülen nur *Fernwirkungen* stattfinden sollen, bei denen die Dimensionen der auf einander wirkenden Körper gegen ihre Entfernungen von einander verschwinden.

Die bekannte grosse Geschwindigkeit der Fortpflanzung der Lichtwellen beweist dann ferner, dass der mittlere Abstand der Moleküle im Lichtäther nur wenig grösser als ϱ sein könne, wo nämlich die geringste Aenderung dieses Abstandes mit einer sehr grossen Aenderung der Abstossungskräfte verbunden ist, weil nämlich für den Abstand ϱ diese Abstossungskraft unendlich gross wird.

Bei der hieraus sich ergebenden sehr grossen Zahl von Molekülen auch in sehr kleinen Raumtheilen ergiebt sich, aus der verschwindend kleinen Masse aller dieser Moleküle zusammengenommen, die Masse *jedes einzelnen* positiv elektrischen Moleküls *verschwindend klein in noch viel höherem Grade.*

[Anmerkung. Das Manuskript WILHELM WEBER's zu vorstehender Abhandlung enthält in seiner ursprünglichen Anlage ausser den mitgetheilten Artikeln noch vier Artikel mit den Ueberschriften:

1. Die Theorie der Zurückwerfung und Zerstreuung elektrischer Strahlen findet keine Anwendung auf Begründung einer Theorie dynamischer Medien.
2. Theorie des Lichtäthers im Weltenraume als statischen Mediums.
3. Ueber Wellentheorien sogenannter dynamischer Medien.
4. Zurückwerfungs- und Zerstreuungsgesetze der nach der dynamischen Gastheorie in Wurfbewegung befindlichen Gasmoleküle bei ihren Begegnungen unter Voraussetzung, dass Gasmoleküle Verbindungen positiv und negativ elektrischer Moleküle sind.

welche bestimmt waren, zwischen Artikel 4 und 5 ihren Platz zu finden. WILHELM WEBER hat jedoch diese Artikel später aus der Abhandlung ausgeschlossen, weshalb von einer Veröffentlichung abgesehen werden musste. Es möge jedoch bemerkt werden, dass der gesammte Nachlass der Königlichen Bibliothek zu Göttingen zur Aufbewahrung übergeben worden ist, wodurch die Möglichkeit, Einsicht in den Inhalt dieser Artikel zu gewinnen, gewahrt bleibt.]

Zur Galvanometrie.

Von

Wilhelm Weber.[1])

(Aus dem 10. Bande der Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.)

Erster Theil.

Der erste Theil vorliegender Abhandlung hat zum Gegenstande, den Widerstand eines gegebenen *Widerstands-Etalons* nach absolutem Maasse genau zu bestimmen.

Die Bestimmung eines *Widerstands* nach absolutem Maasse beruht auf den Bestimmungen einer *elektromotorischen Kraft* und einer *Stromintensität* nach absoluten Maassen; denn es ist nach dem Ohm'schen Gesetze der Widerstand einer Kette dem Quotienten der elektromotorischen Kraft, welche auf die Kette wirkt, dividirt durch die Intensität des von dieser Kraft in der Kette hervorgebrachten Stroms gleichzusetzen.

Am genauesten nach absolutem Maasse kann nun aber diejenige *elektromotorische Kraft* bestimmt werden, welche von der erdmagnetischen Kraft T auf einen geschlossenen Leiter, während er sich bewegt, ausgeübt wird. Bezeichnet man nämlich mit S den Flächenraum, welchen die Projektion des geschlossenen Leiters auf der Normalebene von T umschliesst, und mit dS die Aenderung dieses Flächenraums im Zeitelemente dt in Folge der Bewegung, so ist die von T auf den geschlossenen Leiter ausgeübte elektromotorische Kraft nach absolutem Maasse

$$e = \frac{TdS}{dt}.$$

[1]) [Dieser Aufsatz ist ein Auszug der Abhandlung „Zur Galvanometrie", Wilhelm Weber's Werke, Bd. IV, p. 17, welcher wahrscheinlich bestimmt war, in Poggendorff's Annalen veröffentlicht zu werden.]

Es ist dabei nicht nöthig, dass alle Theile des geschlossenen Leiters an der Bewegung Theil nehmen; ein Theil des Leiters kann in Ruhe bleiben, wenn nur die Bewegung des übrigen Theils so beschaffen ist, dass die Werthe von S sich immer genau bestimmen lassen.

Ferner würde sich die *Intensität des von einer solchen elektromotorischen Kraft in dem geschlossenen Leiter hervorgebrachten Stroms* nach absolutem Maasse mit Hülfe einer *Tangentenboussole* leicht bestimmen lassen, wenn die Wirkung des Stroms auf die Boussole stark genug wäre, um genau gemessen werden zu können. Weil dies aber nicht der Fall ist, so muss die Tangentenboussole, bei welcher der Multiplikator einen weiten Kreis um eine sehr kleine Boussole bildet, mit einem *sehr empfindlichen Galvanometer,* wo der Multiplikator die Boussole sehr eng umschliesst, vertauscht werden.

Ein solches empfindliches Galvanometer lässt sich nun zwar so konstruiren, dass, wie bei der Tangentenboussole, die Tangente der Ablenkung der Boussole vom Meridian *beim Gleichgewicht* der Stromintensität proportional ist; der *Faktor* aber, mit welchem jene Tangente multiplicirt werden muss, um die Stromintensität nach absolutem Maasse zu geben, welcher bei der Tangentenboussole den bekannten Werth $rT/2\pi$ hat, wenn r der Halbmesser des Multiplikatorkreises ist, ist bei einem empfindlichen Galvanometer, wo die Multiplikatorwindungen der Boussole sehr nahe liegen, *unbekannt.*

Sollte aber auch dieser Faktor bestimmt worden sein, was durch Messung der bei geschlossener Kette vom Multiplikator auf die bewegte Boussole ausgeübten *Dämpfung* möglich ist;[1]) so würde sich doch von

[1]) Bezeichnet man nämlich mit e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen und mit $e^{\lambda}:1$ das Verhältniss zweier auf einander folgenden Schwingungsbögen der Boussole unter dem Einflusse der bei geschlossener Kette vom Multiplikator auf die Boussole ausgeübten *Dämpfung,* wo λ das logarithmische Dekrement genannt und aus den Beobachtungen der schwingenden Boussole bestimmt wird; so ist, wenn t die Schwingungsdauer der Boussole ohne Dämpfung, und k ihr Trägheitsmoment bezeichnet, der gesuchte Faktor $=\pi\sqrt{\frac{k\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{2w\lambda t^3}}$. Hierin hat nun w die Bedeutung des Widerstands der Kette, zu welcher der Multiplikator gehört, nach absolutem Maasse, dessen Werthbestimmung eben die Aufgabe der Widerstandsmessung ist, wozu die Bestimmung der Stromintensität nach absolutem Maasse verlangt wird. Kann aber auch diese Stromintensität i mit Hülfe jenes Faktors nur abhängig von w dargestellt werden, so führt doch die Gleichsetzung des Quotienten e/i nach dem Ohm'schen Gesetze mit dem Widerstande w zu einer Gleichung, in welcher w die einzige unbekannte Grösse ist, deren Werth dadurch bestimmt wird. Nachdem aber w auf diese Weise gefunden, ist auch obiger Faktor bestimmt und lässt sich dann zur Messung aller Stromintensitäten in der nämlichen Kette gebrauchen.

dieser Bestimmung kein Gebrauch machen lassen, weil die Boussole unter dem Einflusse des von der elektromotorischen Kraft $e = T dS/dt$ hervorgebrachten Stroms niemals zu dem vorausgesetzten *Gleichgewicht* gelangt, sondern wegen der Veränderlichkeit von *e stets schwingt.*

Die *Regelmässigkeit* dieser Schwingungen hängt aber davon ab, dass die Einwirkung des von der elektromotorischen Kraft $e = T dS/dt$ hervorgebrachten Stroms auf die Boussole auf einen Zeitraum in der Mitte der Schwingung, der nur einen sehr kleinen Theil der Schwingungsdauer beträgt, koncentrirt wird. Um diese momentane Einwirkung möglichst zu verstärken, wird in dem kurzen Zeitraume der geschlossene Leiter so bewegt, dass der Werth von S entweder vom Minimum S_0 zum Maximum S^0 übergeht oder umgekehrt. Eine solche Bewegung des geschlossenen Leiters heisst ein *Induktionsstoss,* und die von demselben ausgeübte elektromotorische Kraftsumme ist $\int e dt = \pm (S^0 - S_0) T$; nach dem Ohm'schen Gesetze folglich, wenn w den unbekannten konstanten Widerstand des geschlossenen Leiters bezeichnet, ist die dadurch hervorgebrachte Stromsumme

$$\int i dt = \frac{1}{w} \int e dt = \pm \frac{S^0 - S_0}{w} T,$$

wonach der unbekannte Widerstand

$$w = \frac{e}{i} = \frac{\int e dt}{\int i dt} = \pm \frac{(S^0 - S_0) T}{\int i dt}$$

gefunden wird.

Bezeichnet man nun die durch einen solchen Induktionsstoss hervorgebrachte Aenderung der Drehungsgeschwindigkeit der Boussole mit γ, so würde zwar, bei einem empfindlichen zweckmässig konstruirten Galvanometer ebenso wie bei der Tangentenboussole, γ der vom Induktionsstosse hervorgebrachten Stromsumme $\int i dt$ proportional sein; der *Faktor* aber, mit welchem γ multiplicirt werden muss, um $\int i dt$ nach absolutem Maasse zu geben, welcher bei der Tangentenboussole den bekannten Werth $[r/2\pi] . [k/m]$ hat, ist bei einem solchen empfindlichen Galvanometer, wo die Multiplikatorwindungen der Boussole sehr nahe liegen, *unbekannt;* doch lässt sich auch dieser Faktor durch Messung der vom Multiplikator bei geschlossener Kette auf die bewegte Boussole ausgeübten *Dämpfung* bestimmen. Wird nämlich, wie in obiger Note, das von dieser Dämpfung herrührende logarithmische Dekrement mit λ bezeichnet, so ist dieser Faktor

$$= \sqrt{\frac{k\tau}{2w\lambda}},$$

wenn τ die Schwingungsdauer der Boussole unter dem Einfluss der

Dämpfung bezeichnet, oder, wenn t die Schwingungsdauer bei gelöster Kette bezeichnet,

$$= \sqrt{\frac{kt\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}}{2w\lambda}}.$$

Es ist aber bei einem so empfindlichen Galvanometer, wie zu diesen Versuchen erfordert wird, von grosser Wichtigkeit, dass dieser Faktor genau für dieselbe Zeit gelte, wo die übrigen zur Widerstandsmessung nöthigen Galvanometerbeobachtungen gemacht werden. Es kommt daher besonders auf eine solche *Anordnung der Induktionsstösse* an, dass aus den beobachteten Schwingungen der Boussole die beiden Grössen γ und λ zugleich bestimmt werden können.

Die einfachste Methode, welche dieses leistet, ist die von Gauss angegebene *Zurückwerfungsmethode,* welche in den „Abhandlungen über elektrodynamische Maassbestimmungen, Widerstandsmessungen, Beilage C" beschrieben worden ist.[1]) Nach derselben wird die Boussole in solche Schwingungen gesetzt, dass eine grössere Elongation a mit einer kleineren b immer abwechselt, wo a und b sehr genau beobachtet werden können. Es ergiebt sich dann

$$\lambda = \log\frac{a}{b},$$

$$\gamma = \frac{\pi}{t}\left(\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\right)\cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{\lambda}{\pi}},$$

oder genauer, wenn man nämlich den Werth des logarithmischen Dekrements λ_0 berücksichtigt, welches auch bei gelöster Kette übrig bleibt, und $\lambda_0+\lambda=\lambda_1$, $t_0=t\sqrt{1+\lambda_0^2/\pi^2}$ setzt, wo t_0 die bei dem logarithmischen Dekremente λ_0 beobachtete Schwingungsdauer bezeichnet,

$$\lambda_1 = \log\frac{a}{b},$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi^2+\lambda_0{}^2}}{t_0}\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\right)\cdot e^{-\frac{\lambda_1}{\pi}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{\lambda_1}{\pi}}.$$

Fügt man die oben gefundenen Gleichungen, nämlich, wenn man λ_0 berücksichtigt,

$$\int i\,dt = \gamma\cdot\sqrt{\frac{kt\sqrt{1+\frac{\lambda_1^2}{\pi^2}}}{2w(\lambda_1-\lambda_0)}}$$

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 441.]

$$w = \frac{(S^0 - S_0)T}{\int i\,dt}$$

hinzu, so ergiebt sich hieraus leicht die Berechnung des Widerstands w aus den beobachteten Grössen:

$$a,\ b,\ \lambda_0,\ t_0,\ k,\ \tfrac{1}{2}(S^0 - S_0),\ T.$$

Die Sicherheit und Genauigkeit der Resultate aus den nach diesen Vorschriften gemachten Beobachtungen hängt aber, wie von selbst einleuchtet, hauptsächlich von der *Einrichtung* des dazu gebrauchten Galvanometers und des übrigen zum Zweck der Induktionsstösse bewegbaren Theils der geschlossenen Kette ab. Die Lösung dieser subtileren, die zweckmässigste Einrichtung eines solchen Messapparats betreffenden, Aufgabe der Galvanometrie bildet daher den Hauptgegenstand dieses Theiles.

Es leuchtet leicht ein, dass es hierbei nicht blos auf sehr grosse *Empfindlichkeit* des Galvanometers ankommt, die so gross sein soll, dass a einer sehr grossen Zahl von Skalentheilen entspreche, damit der Werth von a aus den an der Skale gemachten Beobachtungen bis auf einen sehr kleinen Bruchtheil desselben sicher erhalten werde; sondern es kommt ausserdem darauf an, dass b zu a in einem schicklichen Verhältniss stehe, damit auch der Werth von λ bis auf einen sehr kleinen Bruchtheil desselben sicher erhalten werde. Ferner kommt in Betracht, dass die Genauigkeit der Beobachtung nach der Zurückwerfungsmethode erfordert, dass, weil die Dauer eines Induktionsstosses füglich nicht unter 1 Sekunde gebracht werden kann, die Schwingungsdauer der Boussole etwa 20 bis 30 Sekunden betrage, und endlich, dass die Boussole mit virga transversalis und passenden Gewichten versehen sei, um ihr Trägheitsmoment mit aller Feinheit und Genauigkeit bestimmen zu können.

Käme blos die Empfindlichkeit des Galvanometers in Betracht, so würde es darauf ankommen, die kleinste und dabei doch genau zu beobachtende Boussole darzustellen, die sich recht eng vom Multiplikator umschliessen liesse, und sodann die Stärke des Drahts und den Querschnitt des Multiplikators zweckmässig zu bestimmen; es würde dann aber die *Dämpfung* nicht gross genug werden, um λ genau zu bestimmen.

Da $\lambda = \log(a/b)$ ist, und a durch den an die Empfindlichkeit des Galvanometers gemachten Anspruch als bestimmt betrachtet werden kann, so leuchtet ein, dass um den Werth von λ auf den kleinsten

Bruchtheil desselben sicher zu erhalten, folgende Bedingung zu erfüllen ist, nämlich

$$\left(\frac{\lambda db}{d\lambda}\right)^2 = b^2 \left(\log \frac{a}{b}\right)^2 = \text{Maximum},$$

folglich $\lambda = 1$ oder $\frac{a}{b} = e = 2{,}718\ldots$

Die Forderung einer so starken Dämpfung kann aber nur bei *stärkerem Magnetismus der Boussole* erfüllt werden, wie er sich leicht, ohne erhebliche Minderung der Empfindlichkeit, durch proportional nach Länge und Dicke vergrösserte Dimensionen der Boussole herstellen lässt.

Da aber, mit Rücksicht auf die Empfindlichkeit, diese Vergrösserung der Boussole doch nicht weiter gehen soll, als der Dämpfung wegen nöthig ist; so würde eine solche stark magnetische Boussole doch noch eine viel zu kleine Schwingungsdauer haben. Um nun diese Schwingungsdauer auf 20 bis 30 Sekunden zu bringen, ist es am zweckmässigsten, durch feste Verbindung eines ganz gleichen Magnets mit entgegengesetzt gerichteter Axe über dem Multiplikator mit der Boussole im Multiplikator ein *astatisches System* zu bilden, und dasselbe an einem elastischen Metalldrahte aufzuhängen, der so stark ist, dass die Schwingungsdauer des Systems dadurch in vorgeschriebener Weise hergestellt werde.

Hiernach kommt es wesentlich nur noch auf zweckmässige Vorschriften für die *Drahtstärke* und für den *Querschnitt des Multiplikators* an.

Es ergiebt sich leicht, dass es am vortheilhaftesten ist, wenn der Widerstand des Multiplikators dem Widerstande des übrigen Theils der geschlossenen Kette gleich gemacht wird, wonach also den Ohm'schen Gesetzen gemäss das *Verhältniss* l/s der Multiplikatordrahtlänge l zu seinem Querschnitt s als gegeben betrachtet werden darf.

Ferner darf, mit Rücksicht auf die regelmässige Aufwickelung des Drahts, eine *rektanguläre Form des Multiplikatorquerschnitts* als die zweckmässigste angenommen werden, welche durch die beiden Rechteckseiten a und b bestimmt wird, wovon die letztere die horizontale sei, welche vom Meridian der Boussole halbirt wird.

Die Werthe von a und b sollen nun ferner aber der Bedingung genügen, dass bei gegebenem Flächenraume ab jede Veränderung des Verhältnisses von a zu b die Empfindlichkeit schwächen würde, wobei vorausgesetzt wird, dass die Lage der inneren, der Boussole zugekehrten, Rechteckseite unverändert bleibt und nur die äusseren Rechteckseiten verschoben werden dürfen. Diese Bedingung führt zur Gleichheit des

mittleren Werths des von allen Stromelementen an der äusseren, der horizontalen Rechteckseite entsprechenden, Oberfläche des Multiplikators auf die Boussole ausgeübten Moments mit dem mittleren Werthe des von allen Stromelementen an den, der vertikalen Rechteckseite entsprechenden, Seitenflächen des Multiplikators auf die Boussole ausgeübten Moments.

Hält man sich zur Vereinfachung der aus dieser Bedingung sich ergebenden Gleichung zwischen a und b an den Fall, wo die Boussole nur einen sehr kleinen Raum in der Mitte des Multiplikators einnimmt und die äussere und innere Oberfläche des Multiplikators koncentrische Cylinder um dieselbe bilden; so ergiebt sich, wenn man den als gegeben zu betrachtenden Halbmesser des kleineren Cylinders $= 1$ setzt, folgende Gleichung zwischen a und b, nämlich:

$$\log \frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}} = \frac{3(1+a)^2-1}{2(1+a)\sqrt{(1+a)^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}.$$

Endlich erhält man noch eine Bedingung, wenn man, unter Erfüllung der angegebenen Relation zwischen a und b, und bei unveränderter Lage der inneren, der Boussole zugekehrten, Rechteckseite, a und b zugleich wachsen lässt und das damit verbundene Wachsthum des Multiplikatorvolumens $ls = v$ berechnet. Bezeichnet man alsdann das oben als konstant gegebene Verhältniss l/s mit c, wonach also der Drahtquerschnitt $s = \sqrt{v/c}$ gefunden wird; so ergiebt sich die wachsende *Zahl der Multiplikatorumwindungen* $2ab/s = 2ab\sqrt{c/v}$. Hiernach lässt sich nun die Grösse des von einem bestimmten durch den Multiplikator gehenden Strom auf die Boussole ausgeübten Moments in ihrer Abhängigkeit vom Werthe a oder b berechnen, und es ergiebt sich daraus, dass mit wachsendem a oder b dieses Moment anfangs ebenfalls wächst, sodann aber ein Maximum wird, und wenn dann a oder b noch ferner wüchse, sogar wieder abnehmen würde. Hieraus ergiebt sich also noch die Bedingung, für a oder b denjenigen Werth zu nehmen, für welchen jenes Moment ein Maximum ist.

Hält man sich auch hier zur Vereinfachung der daraus sich ergebenden Gleichung an den oben bezeichneten Fall eines kreisförmigen Multiplikators, so ergiebt sich für a folgende Gleichung:

$$\log \frac{(1+a)\sqrt{(1+a)^2-1}+(1+a)^2+1}{\sqrt{(1+a)^2-1}+2(1+a)} = \frac{[(1+a)^2-1]^{\frac{3}{2}}}{(1+a)[(1+a)^2+1]},$$

woraus $a = 2{,}0951$ folgt, und dann, den vorhergehenden Relationen gemäss,

$$b = 1{,}86178$$
$$v = 100{,}364$$
$$l = 10{,}0182 \,.\, \sqrt{c}$$

gefunden wird. Wird der Halbmesser des kleineren Cylinders, welcher $= 1$ gesetzt worden war, mit ε bezeichnet, so erhält man

$$a = 2{,}0951 \,.\, \varepsilon,$$
$$b = 1{,}86178 \,.\, \varepsilon,$$
$$v = 100{,}364 \,.\, \varepsilon^3,$$
$$l = 10{,}0182 \,.\, \sqrt{c\varepsilon^3}.$$

Die in der Abhandlung noch beispielshalber mitgetheilten Beobachtungen beweisen endlich, welche grosse Genauigkeit der Resultate mit Instrumenten erreicht werden könne, deren Einrichtung, wenn auch nur näherungsweise, den gegebenen Vorschriften entspricht. Um alle Vorschriften genau zu erfüllen, hätten alle Instrumente ganz neu dargestellt werden müssen. Es schien genügend, dargethan zu haben, dass der *galvanometrische* Theil der Beobachtungen sich nach diesen Vorschriften so genau ausführen lasse, dass er dem *magnetischen* Theile der Beobachtungen, zur Bestimmung des Erdmagnetismus *T*, in keiner Weise nachstehe, dass vielmehr die von jenem Theile der Beobachtungen herrührende unvermeidliche Unsicherheit der absoluten Widerstandsbestimmung sogar kleiner sich ergebe, als die von letzterem Theile herrührende.

Der ganze zur absoluten Widerstandsbestimmung hiernach erforderliche *Messapparat* würde aber verdienen, für die Dauer in vollständigster und vollkommenster Weise hergestellt zu werden, wenn es sich um definitive Feststellung eines *Normaletalons des Widerstandes*, mit allgemein verbreiteten und gebrauchten *Etalonkopien*, handelte, von denen die genaueste Kenntniss ihres Werths nach *absolutem Maasse* verlangt würde, um diese Kenntniss auf alle anderen damit verglichenen Widerstände übertragen zu können. Es würde dann am zweckmässigsten sein, den *Messapparat* selbst so einzurichten, dass die geschlossene Kette desselben den *Normaletalon* bildete, weil nur durch die von Zeit zu Zeit zu wiederholende *absolute Messung* volle Sicherheit gewonnen werden kann, dass der Normaletalon wirklich unverändert geblieben sei. — Die Erreichung des Hauptzwecks einer solchen Feststellung würde aber von den *Etalonkopien* abhängen, insbesondere von der allgemeinen Verbreitung und Anwendung, welche sie fänden, sowie von ihrer mit dem

Normaletalon verbürgten Gleichheit. Zu letzterem Zwecke ist noch die Feinheit der Kopirungsmethoden und die danach zweckmässigste Ergänzung des Messapparats erörtert worden.

Zweiter Theil.

Der zweite Theil der Abhandlung erörtert die Möglichkeit, ob nicht absolute Widerstandsmessungen *auf verschiedene Weise,* nach ganz verschiedenen Prinzipien, ausgeführt werden könnten.

Der *Widerstand* ist eine Eigenschaft des ponderabelen Körpers, durch welchen der Strom hindurch geht. Diese Eigenschaft muss ihren Grund in der eigenthümlichen Beschaffenheit des Körpers selbst haben, und sollte daher, bei vollständiger Kenntniss dieser Beschaffenheit, unmittelbar daraus bestimmbar sein, ganz unabhängig von der Betrachtung aller die Beschaffenheit des Körpers unmittelbar nicht betreffenden Umstände, also unabhängig *erstens* von der Betrachtung der veränderlichen Kräfte, welche auf die im Körper enthaltenen elektrischen Fluida wirken, *zweitens* von der Betrachtung der Bewegungen, in welche diese Fluida von jenen Kräften gesetzt werden, *drittens* von der Betrachtung der von diesen Bewegungen hervorgebrachten Wirkungen.

Nur weil eine solche *unmittelbare* Bestimmung des Widerstands aus ihrem in der Beschaffenheit des Körpers selbst liegenden Grunde, wegen mangelnder Kenntniss dieser Beschaffenheit, nicht möglich ist, lernt man diesen Widerstand nur *mittelbar aus der Erfahrung* kennen, durch aufmerksame Beobachtung des Verhaltens der Körper (zur Elektricität) unter verschiedenen Verhältnissen, und durch Bestimmung dessen, was ihm dabei *konstant* zukommt.

Bildet der Körper einen Ring oder überhaupt eine geschlossene Kette, in welchem ein Strom i *erzeugt* wird, — wirkt nämlich auf die in ihm enthaltenen elektrischen Fluida eine elektromotorische Kraft e, und entsteht dadurch im Körper der Strom i, — so ergiebt die genaue Beobachtung jener elektromotorischen Kraft e und dieser Stromintensität i auch in solchen Fällen, wo beide sehr verschiedene Werthe haben, dass jedem Körper ein bestimmter und konstanter Werth des *Verhältnisses* e/i zukommt. — Die Eigenschaft des Körpers, vermöge deren ihm dieser konstante Werth von e/i zukommt, nennt man seinen *Widerstand.*

Bildet nun ferner aber der Körper eine geschlossene Kette, in welcher der Strom i *vorhanden* ist, so ist die Fortdauer des Stromes mit gewissen Wirkungen verbunden, welche man mit dem Namen der *Stromarbeit* A bezeichnen kann, und die genaue Beobachtung der Stromintensitäten i und der Stromarbeiten A ergiebt, dass jedem Körper ein

bestimmter und konstanter Werth des Verhältnisses A/i^2 zukommt. Die Eigenschaft des Körpers, vermöge deren ihm dieser konstante Werth zukommt, könnte nun mit gleichem Rechte sein *Widerstand* genannt werden; nur fragt es sich, ob dieser konstante Werth mit dem vorigen *identisch* ist.

Wäre dies der Fall, — was voraussetzt, dass die beiden gleichbenannten Eigenschaften gleichen Grund in der Beschaffenheit des Körpers hätten, — so wäre die Möglichkeit gegeben, Widerstandsmessungen auf zwei verschiedene Weisen, nach zwei ganz verschiedenen Prinzipien, auszuführen, deren Uebereinstimmung unter einander dann zur Bestätigung dienen würde, dass beide Eigenschaften im Grunde wirklich identisch wären. Die letztere Methode bedürfte jedoch zuvor noch einer genaueren Erörterung *der mit der Fortdauer des Stroms verbundenen Wirkungen,* welche mit dem Namen *Stromarbeit* belegt werden.

Denn diese Wirkungen des fortdauernden Stroms können theils *unmittelbare,* theils *mittelbare* sein, die zwar beide für den Zweck der Widerstandsmessung brauchbar sein können, doch aber nicht mit einander verwechselt werden dürfen.

Durch aufmerksame Beobachtung lernt man nun die *Wärmeentwickelung* im Körper als eine mit der Fortdauer des Stroms verbundene Wirkung kennen. Nach der mechanischen Wärmetheorie wird aber Wärmeentwickelung als *Arbeit* betrachtet und es liegt daher nahe, in dieser Wärmeentwickelung die *Stromarbeit A* zu erkennen. Es fragt sich aber, ob diese Wärmewirkung des fortdauernden Stroms eine *unmittelbare* oder *mittelbare* ist. Denn wäre dieselbe eine mittelbare, so könnte es ausser ihr zugleich noch andere mittelbare Wirkungen geben, welche zusammen genommen werden müssten, um die *ganze Stromarbeit A* zu erhalten.

Befände sich z. B. ein beweglicher Magnet in der Nähe, so wäre die Bewegung des Magnets auch eine mit der Fortdauer des Stroms verbundene Wirkung, welche mit gleichem Rechte als Stromarbeit bezeichnet werden zu können scheint.

Es ist daher versucht worden, *erstens* die mit der Stromdauer *unmittelbar* und also nothwendig verbundene Wirkung, welche, weil sie die ursprüngliche, die *Stromarbeit schlechtweg* zu heissen verdient, genau zu definiren, und sodann *zweitens* das Verhältniss jeder aus der Erfahrung uns bekannt gewordenen Wirkung des fortdauernden Stroms zu jener Stromarbeit besonders zu erforschen.

Es wird dabei von der *Molekularkonstitution des ponderabelen Körpers* ausgegangen, und von der *Existenz zweier elektrischen Fluida* zwischen den Körpermolekülen; dagegen wird von dem Vorhandensein

zweier magnetischen Fluida abgesehen und statt dessen, wie bekannt, eine solche Beschaffenheit der ponderabelen Moleküle vorausgesetzt, vermöge deren die elektrischen Fluida *beharrliche Molekularströme* um dieselben bilden können, aus denen alle *magnetischen* und *diamagnetischen* Erscheinungen des Körpers erklärt werden.

Hiernach besteht der Prozess eines fortdauernden Stroms darin, dass elektrisches Fluidum aus dem Molekularstrom eines Körpermoleküls herausgezogen, zu dem nächsten Körpermoleküle hingetrieben und in den dortigen Molekularstrom hineingezogen wird.

Das Herausziehen elektrischen Fluidums aus einem Molekularstrome geschieht aber durch *elektromotorische Kraft*. Ist eine solche elektromotorische Kraft vorhanden, so wirkt sie auch auf das herausgezogene elektrische Fluidum fort und *vergrössert dessen Geschwindigkeit* bis zu dessen Wiedereintritt in den nächsten Molekularstrom, woraus folgt, dass bei einem fortdauernden Strome in alle Molekularströme gleichzeitig das aus den vorhergehenden Molekularströmen herausgezogene elektrische Fluidum *mit grösserer Geschwindigkeit* eintritt, als es aus jenen ausgetreten war.

Es besteht hiernach die mit der Fortdauer des Stroms i unmittelbar und nothwendig verbundene Arbeit in *Verstärkung der Molekularströme,* und bezeichnet man diese nach absolutem Maasse bestimmbare Arbeit mit A, so ergiebt sich $A/i^2 = e/i$ für jeden Körper konstant, d. h. die beiden Principien, nach denen man den Widerstand entweder dem Verhältniss der elektromotorischen Kraft e zu der dadurch hervorgebrachten Stromintensität i, oder dem Verhältniss der vom Strome verrichteten Arbeit A zum Quadrat der Intensität des Stroms i, von welchem sie verrichtet wird, gleichsetzt, sind im Grunde vollkommen *identisch.*

Es bleibt also nur noch übrig, das Verhältniss der *Wärmeentwickelung,* als Wirkung des fortdauernden Stroms, zu jener *unmittelbaren Stromarbeit* zu bestimmen.

Die Erfahrung hat nun ergeben, dass das Arbeitsäquivalent der mit der Fortdauer des Stroms verbundenen Wärmeentwickelung der unmittelbaren Stromarbeit gleich ist; denn es hat sich ergeben, dass das Arbeitsäquivalent der mit der Fortdauer des Stroms verbundenen Wärmeentwickelung, nach absolutem Maasse, dividirt durch das Quadrat der nach absolutem Maasse bestimmten Stromintensität, dem nach absolutem Maasse durch das Verhältniss e/i bestimmten Widerstande des Körpers gleich ist.

Hieraus ergiebt sich aber die Alternative, dass entweder die Wärmeentwickelung selbst nichts anderes als die unmittelbare Stromarbeit, d. h.

Verstärkung der Molekularströme im Körper ist, oder dass alle unmittelbare Stromarbeit verschwindet und durch Wärmeentwickelung ersetzt wird, indem vielleicht durch eine noch unbekannte Wechselwirkung zwischen elektrischen und Wärme-Fluidis jede Verstärkung der Molekularströme in eine der Arbeit nach äquivalente Wärmeentwickelung umgesetzt wird.

Nach der vorausgesetzten Molekularkonstitution der ponderabelen Körper und der darin begründeten *Beharrlichkeit* der elektrischen Fluida in ihren Molekularstrombewegungen ist nun aber die *letztere Alternative* unzulässig, weil danach alle unmittelbare, *in Verstärkung der Molekularströme bestehende,* Stromarbeit *verschwinden* und durch Wärmeentwickelung ersetzt werden soll, d. h. weil danach die verstärkten Molekularströme *nicht beharrlich* wären, wie doch vorausgesetzt wurde.

Es ergiebt sich also das interessante Resultat, dass mit den erwähnten Voraussetzungen von der *Molekularkonstitution* ponderabeler Körper und von der *Beharrlichkeit der Molekularströme,* wie sie als Grundlage der Lehre vom *Magnetismus* und *Diamagnetismus* dient, nur die *erstere Alternative* vereinbar ist, nämlich dass *die mit der Stromdauer verbundene Wärmeentwickelung selbst nichts anderes ist als die unmittelbare Stromarbeit,* was nur denkbar ist, wenn überhaupt *alle Wärmeentwickelung in ponderabelen Körpern in der Verstärkung der Molekularströme der elektrischen Fluida in diesen Körpern bestände,* wonach also ein besonderes *Wärmefluidum* in den ponderabelen Körpern ebenso in Wegfall käme, wie dies mit den *magnetischen Fluidis* nach der Voraussetzung von beharrlichen Molekularströmen der Fall gewesen ist.

Die Voraussetzung eines in allen leeren Räumen verbreiteten Aethers (auch zwischen den ponderabelen Körpermolekülen) würde davon unabhängig bleiben; nur würde dann die Vermittelung der Wärmemittheilung von einem ponderabelen Körper zu einem anderen davon entfernten durch diesen Aether, nach den Gesetzen der *Strahlung* und *Absorption,* einer *Wechselwirkung der elektrischen Fluide mit diesem Aether* zuzuschreiben sein, wie sie C. Neumann schon zum Zweck seiner Theorie der Drehung der Polarisationsebene des Lichts durch galvanisch-magnetische Kräfte zu begründen versucht hat.

Alle anderen Wirkungen endlich, die mit der Stromdauer in einem ponderabelen Körper der Erfahrung nach verbunden zu sein scheinen, namentlich alle *elektromagnetischen, elektrodynamischen* und *Induktionswirkungen* auf entfernte Körper, ergeben sich genauer betrachtet nicht als Wirkungen der *Stromdauer,* sondern als Wirkungen der *Stromabnahme*

im Körper; denn auch in den Fällen, wo die Stromstärke während solcher Wirkungen unverändert erhalten wird, findet doch in Ansehung dieser Wirkungen eine *Stromabnahme* statt, die nur nicht beobachtet wird, weil in diesen Fällen ausser der zur Stromerhaltung im Körper *an sich nothwendigen* elektromotorischen Kraft noch eine andere elektromotorische Kraft vorhanden ist, welche sonst eine *Stromzunahme* hervorbringen würde, die aber in diesen Fällen nur zur Ausgleichung mit jener *Stromabnahme* dient.

Ueber Maassbestimmungen.[1]

Im Verkehr und Zusammenleben der Menschen sind Maassbestimmungen für die Grössen physischer Gegenstände immer von grosser Bedeutung und in vielen Beziehungen nothwendig und unentbehrlich gewesen. Die Ansprüche an Sicherheit, Genauigkeit und Uebereinstimmung solcher Maassbestimmungen sind mit der Zeit, mit Handel und Wandel, mit der inneren Ordnung der Staaten und ihrer äusseren Beziehungen, so wie mit der Ausbildung von Kunst und Wissenschaft immer mehr gewachsen, und es ist die allgemeine Aufmerksamkeit mehr und mehr auf die Mittel und Wege gewandt worden, diesen stets dringender werdenden Bedürfnissen in genügender Weise zu entsprechen.

Die mannigfaltigen Erörterungen hierüber lassen sich scheiden und ordnen in Erörterungen:

1. über Maasssysteme,
2. über Etalonsysteme,
3. über das Rechnungswesen nach festgesetzten Maassen oder Maass-Etalons, und
4. über Methoden und Hülfsmittel zu feineren Maassbestimmungen mancher Grössen, insbesondere solcher von bleibender Bedeutung, wie die Konstanten der Naturgesetze.

Alle Erörterungen über Maasssysteme beruhen, wie man leicht einsieht, wesentlich auf rein wissenschaftlicher Grundlage; bestimmte Etalonsysteme dagegen sind Gegenstand der Gesetzgebung; das Rechnungswesen nach festgesetzten Maassen oder Maass-Etalons beruht wesentlich auf Fertigkeiten, die nur durch zweckmässigen Unterricht und gutes Beispiel, namentlich von Seiten der Staatsbehörden, allgemein verbreitet werden können; die feinsten Maassbestimmungen der Konstanten der

[1] [Diese Abhandlung ist jedenfalls nach dem Jahre 1868 niedergeschrieben worden. (Siehe das Citat S. 572.) In nachgelassenen Notizen W. Weber's aus dem Jahre 1834 findet sich bereits die Bemerkung, dass sich alle in der Physik betrachteten Grössenarten auf die Grundmaasse für Länge, Zeit und Masse reduciren lassen, auch sind daselbst folgende Grössen auf die Grundmaasse zurückgeführt, d. h. ihre Dimensionen gegeben worden: Fläche, Volumen, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Dichte, Kraft, Druck, Arbeit, Effekt, freier Magnetismus, magnetisches Moment, Intensität des Erdmagnetismus, Stromintensität, Widerstand, Magnetinduktion.]

Naturgesetze endlich bilden den Gegenstand der wichtigsten physikalischen Forschungen. Bei so verschiedenen Grundlagen der verschiedenen das Messen betreffenden Erörterungen kann es nur zweckmässig erscheinen, diese verschiedenen Erörterungen gehörig von einander getrennt zu halten.

Ueber Maasssysteme.

Das *Messen* ist eine Aufgabe, zu deren Lösung Fertigkeit mit Einsicht, und, bei höherer Ausbildung, Kunst und Wissenschaft mit einander verbunden werden müssen.

Das Messen bildet den wesentlichsten Theil der Naturforschung, namentlich der Physik, und die Menge aller vorhandenen Erörterungen über die einzelnen Aufgaben, Instrumente und Methoden, welche das Messen und die Maassbestimmungen betreffen, ist fast ganz unübersehbar gross geworden.

Die Gegenstände aller dieser Erörterungen stehen unter einander in Zusammenhang, theils in weiterem, theils in engerem; man findet aber dieselben nur sehr zerstreut, so dass ihr Zusammenhang in manchen Beziehungen nicht leicht zu übersehen ist. In der Physik zum Beispiel, wo die Lehre vom Messen von der höchsten Bedeutung für alle Forschungen ist, wird dieselbe nicht für sich selbstständig entwickelt, sondern ihre Ausbildung ist eng verbunden mit den einzelnen Forschungen der Experimentalphysik, mit denen sie Hand in Hand fortschreitet, so dass im Laufe aller physikalischen Forschungen diese Lehre immer aufmerksam verfolgt wird. Nur einige Grundlehren räumlicher Messung, welche in der Geometrie entwickelt werden, werden in der Physik als bekannt vorausgesetzt; alle weitere Entwickelung aber findet sich zerstreut in den verschiedensten physikalischen Forschungen, von denen manche auch in das Gebiet der Astronomie gezogen worden sind.

Bei dieser aphoristischen Darstellung der Lehre vom Messen, wie sie sich durch Zusammensuchen aus den verschiedensten Einzelforschungen ergiebt, wird eine gehörige Entwickelung der Grundbegriffe in strengem Zusammenhange mit den daraus folgenden Regeln und Vorschriften oft vermisst, was nicht selten Irrthümer veranlasst, noch viel häufiger Unklarheiten verursacht hat. Schon Gauss ist dadurch bewogen worden, seinen Vorschriften zu magnetischen Maassbestimmungen einen besonderen, die Grundbegriffe des Messens betreffenden Artikel beizufügen, und ebenso Poisson am Schlusse der Einleitung zur zweiten Ausgabe der Mechanik.

Wenn nun auch eine selbstständige Entwickelung der Lehre vom Messen und von Maassbestimmungen der Physik nicht vorausgeschickt werden kann, weil ihre Entwickelung mit den Entwickelungen physi-

kalischer Forschungen auf's Innigste verwachsen ist; so scheint es doch sehr zweckmässig, eine solche Entwickelung jener Lehre der Physik folgen zu lassen, die das zerstreute Material zusammenfasst und hauptsächlich durch Entwickelung der Grundbegriffe den Zusammenhang herstellt und klare Einsicht gewährt.

Die Maassbestimmungen im Allgemeinen beziehen sich auf Grössen aller Arten, die in der Physik betrachtet werden, von denen die *Längen* das einfachste Beispiel sind.

Wie wir dazu kommen, Längen als Grössen zu betrachten, und zwar als mathematische Grössen, theilbar in Theile, mit deren Summen sie identisch sind, mag, wenn es einer näheren Erörterung bedarf, der Geometrie überlassen bleiben. Wie aber über Gleichheit und Ungleichheit zweier wirklich vorhandenen Längen entschieden wird, wie gleich erkannte Längen zu einer ihrer Summe gleichen Länge zusammengesetzt und dadurch eine Längenskala gebildet wird, wie zwei andere Längen mit zwei Abtheilungen einer solchen Skala verglichen und dadurch ihr Verhältniss in bestimmten *Zahlen* angegeben werden kann, gehört in die Physik und bildet die Lehre von der Längenmessung, in welcher eine Menge von Einzelheiten über Messinstrumente und Messungsmethoden von der grössten Wichtigkeit sind, wie zum Beispiel die Unterscheidung der Maassstäbe à bout und der Messung durch Kontakt von Maassstäben à trait und optischer Messung, ferner die Kenntniss und Wahl des Stoffs, der Gestalt, der Aufstellung und der Umgebung der Längenskale, so wie auch Einrichtung und Gebrauch einzelner Instrumente, wie Komparateure und Kathetometer, Fühlhebel, Fühlniveau, Schraubenmikrometer, Theilmaschine, Visiere, Mikroskopmikrometer, Vernier u. s. w. Alle diese Gegenstände haben in vielen einzelnen physikalischen Forschungen und in manchen besonderen Werken, wie über Pendelmessungen, Basismessung und über Feststellung der Längenmaasse verschiedener Länder, ausführliche Erörterungen gefunden, die kaum etwas zu wünschen übrig lassen. Wollte man sie aus dem Zusammenhang jener Forschungen reissen, um sie sämmtlich nur unter dem allgemeinen Gesichtspunkte der Längenmessung wieder zu verbinden und zu vereinigen, so würde auch bei grösster Ausführlichkeit an klarer Einsicht mehr verloren als gewonnen werden. Dasselbe gilt für die durch die Astronomie auf's Beste begründeten Zeitmessungen, so wie für die Wägungen.

Wird nun also auch *Längenmessung, Zeitmessung* und *Wägung* als hinreichend begründet vorausgesetzt, so darf doch diese Voraussetzung nicht auf alle anderen Grössenarten, die in der Physik betrachtet werden, erstreckt werden; denn es sind darunter viele für uns *direkt unmessbare Grössenarten,* für welche eine allgemeinere Darstellung und

Entwickelung der Grundbegriffe zu gehöriger Begründung *indirekter Messungen* grössere Wichtigkeit und Bedeutung hat.

Lassen wir hier auch unerörtert, in wie fern *Zeiträume* und *Gewichte* dahin gehören, so giebt uns doch jede *Geschwindigkeit* ein Beispiel von einer *direkt,* d. h. ohne Hülfe der Messung von Grössen anderer Art, unmessbaren Grössenart, wie von selbst daraus einleuchtet, dass eine Geschwindigkeit von uns gar nicht anders als in Abhängigkeit von Grössen anderer Art definirt werden kann. Wir können keine Geschwindigkeitsskale darstellen, so dass zwei andere Geschwindigkeiten mit zwei Abtheilungen der Skale verglichen und dadurch ihr Verhältniss in bestimmten Zahlen angegeben werden könnte. Dasselbe findet bei vielen anderen Grössenarten statt und man muss bei ihnen nach dem Grunde der in ihrer Definition festgesetzten Abhängigkeit von Grössen anderer Art fragen.

Wie können verschiedenartige Grössen von einander abhängig sein?

Verschiedenartige Grössen können nur das mit einander gemein haben, dass sie an einem und demselben Gegenstande zugleich betrachtet werden. Solche Gegenstände, an denen verschiedenartige Grössen zugleich betrachtet werden, bietet die Geometrie, die allgemeine Mechanik und die Physik dar.

Die Geometrie bietet zum Beispiel in den Quadraten Gegenstände dar, an denen die *Quadratseiten* und *Quadratflächen* zugleich betrachtet werden; ferner in den Würfeln Gegenstände, an denen die Länge der Würfelkanten, die Flächen der Würfelseiten und der *Würfelraum* zugleich betrachtet werden; ebenso in Kreisausschnitten Gegenstände, an denen *Winkel* und Längen der Kreisbögen und Radien zugleich betrachtet werden.

Aus der Natur dieser Gegenstände ergeben sich nun Gesetze der Abhängigkeit der verschiedenartigen an ihnen betrachteten Grössen von einander.

Und zwar ergiebt sich aus der Natur des Quadrats für die Quadrate das Gesetz, dass, wenn ihre Seiten mit rR und $r'R$, und ihre Flächen mit fF und $f'F$ bezeichnet werden, wo R und F das Längen- und Flächenmaass bezeichnen und r, r', f, f' diejenigen Zahlen sind, welche das Verhältniss der Längen der Quadratseiten zum Längenmaasse und das Verhältniss der Flächen der Quadrate zum Flächenmaass bestimmen, zwischen den Zahlen r, r', f, f' folgende Proportion stattfindet:

$$f : f' = rr : r'r',$$

oder, dass für alle Quadrate der Quotient

$$\frac{f}{rr} = \frac{f'}{r'r'}$$

einen konstanten Werth hat. Ist für irgend ein Quadrat dieser Werth bekannt, so kann für jedes andere Quadrat die Zahl f aus der Zahl r berechnet werden. Dieser konstante Werth ist aber für das *Normalquadrat,* wenn ein solches festgestellt ist, d. i. ein bestimmtes Quadrat, dessen Seite zum Längenmaass und dessen Fläche zugleich zum Flächenmaass genommen wird, was zu thun gestattet ist, bekannt, nämlich $= 1$. Ein solches *Normalquadrat* vorausgesetzt, ist für jedes andere Quadrat

$$\frac{f}{rr} = 1 \quad \text{oder} \quad f = rr,$$

wonach die zur Flächenmessung dienende Zahl f berechnet werden kann, wenn die Zahl r durch Längenmessung der Quadratseite bestimmt ist. Es bedarf also zur Messung der Quadratflächen nur der Längenmessung der Quadratseiten. Auf diese Weise wird also neben den direkten Messungen einiger Grössenarten das Feld der indirekten Messungen anderer Grössenarten eröffnet.

Für je zwei Würfel ergiebt sich das Gesetz, dass, wenn ihre Würfelkanten mit rR und $r'R$, und die Würfelräume mit vV und $v'V$ bezeichnet werden, wo V das Raummaass darstellt, zwischen den Zahlen r, r', v, v' folgende Proportion stattfindet:

$$v : v' = r^3 : r'^3,$$

oder, dass für alle Würfel der Quotient

$$\frac{v}{r^3} = \frac{v'}{r'^3}$$

einen konstanten Werth hat. Dieser konstante Werth ist aber für den *Normalwürfel,* wenn ein solcher festgestellt ist, d. i. ein bestimmter Würfel, dessen Kante zum Längenmaass und dessen Rauminhalt zum Raummaass genommen wird, was zu thun gestattet ist, bekannt, nämlich $= 1$. Einen solchen *Normalwürfel* vorausgesetzt, ist also für jeden Würfel

$$\frac{v}{r^3} = 1 \quad \text{oder} \quad v = r^3,$$

wonach die zur Raummessung dienende Zahl v berechnet werden kann, wenn die Zahl r durch Längenmessung der Würfelkante bestimmt worden ist. Es bedarf also zur Messung der Würfelräume nur der Längenmessung der Würfelkanten.

Für je zwei Kreisausschnitte ergiebt sich das Gesetz, dass, wenn ihre Radien mit rR und $r'R$, ihre Kreisbögen mit r_0R und r'_0R, und

ihre Winkel mit $\varphi\Phi$ und $\varphi'\Phi$ bezeichnet werden, wo Φ das Winkelmaass ist, zwischen den Zahlen r, r', r_0, r'_0, φ und φ' folgende Proportion stattfindet:

$$\varphi:\varphi' = \frac{r_0}{r} : \frac{r'_0}{r'},$$

oder, dass für alle Kreisausschnitte der Quotient

$$\frac{\varphi r}{r_0} = \frac{\varphi' r'}{r'_0}$$

einen konstanten Werth hat. Dieser konstante Werth ist aber für den *Normalkreisausschnitt,* wenn ein solcher festgestellt ist, d. i. ein bestimmter Kreisausschnitt mit einem seinem Radius gleichen Halbbogen, dessen Winkel zum Winkelmaass genommen wird, was zu thun gestattet ist, bekannt, nämlich $= 1$. Einen solchen Normalkreisausschnitt vorausgesetzt, ist für jeden beliebigen Kreisausschnitt

$$\frac{\varphi r}{r_0} = 1 \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{r_0}{r},$$

wonach die zur Winkelmessung dienende Zahl φ berechnet werden kann, wenn die Zahlen r und r_0 durch Längenmessung des Radius und Kreisbogens bestimmt worden sind. Es bedarf also zur Messung der Winkel von Kreisausschnitten nur der Längenmessung der Radien und Kreisbögen dieser Kreisausschnitte.

Ausser diesen von der Geometrie dargebotenen Gegenständen, an denen verschiedenartige Grössen zugleich betrachtet werden, und aus deren Natur sich ein Gesetz der Abhängigkeit dieser verschiedenartigen Grössen von einander ergiebt, bietet die allgemeine Mechanik noch andere solche Gegenstände dar, zum Beispiel gleichförmig bewegte Körper und gleichförmig beschleunigte Körper.

An gleichförmig bewegten Körpern kann nämlich ihre Geschwindigkeit und zugleich irgend ein Stück ihrer Bahn und die Zeit, in welcher dieses Bahnstück durchlaufen wird, betrachtet werden. Aus der Natur der gleichförmigen Bewegung ergiebt sich für je zwei gleichförmig bewegte Körper, dass, wenn ihre Geschwindigkeiten mit cC und $c'C$, irgend ein Stück von jeder Bahn mit rR und $r'R$, und die Zeiträume, in welchen diese Bahnstücke durchlaufen werden, mit tT und $t'T$ bezeichnet werden, wo C das Geschwindigkeitsmaass und T das Zeitmaass bezeichnen, zwischen den Zahlen c, c', r, r', t, t' folgende Proportion stattfindet:

$$c:c' = \frac{r}{t} : \frac{r'}{t'},$$

oder, dass für alle gleichförmig bewegten Körper der Quotient

$$\frac{ct}{r} = \frac{c't'}{r'}$$

einen konstanten Werth hat. Dieser konstante Werth ist für den *normal bewegten Körper,* wenn ein solcher festgestellt ist, d. i. ein bestimmter gleichförmig bewegter Körper, dessen Geschwindigkeit zum Geschwindigkeitsmaasse und zugleich der von ihm zum Durchlaufen eines dem Längenmaasse gleichen Bahnstücks gebrauchte Zeitraum zum Zeitmaasse genommen wird, was zu thun gestattet ist, bekannt, nämlich $= 1$. Einen solchen *normal bewegten Körper* vorausgesetzt, ist also für jeden gleichförmig bewegten Körper

$$\frac{ct}{r} = 1 \quad \text{oder} \quad c = \frac{r}{t},$$

wonach die zur Geschwindigkeitsmessung dienende Zahl c berechnet werden kann, wenn die Zahl r durch Längenmessung eines Bahnstücks, und die Zahl t durch Messung der Zeit, in welcher dieses Bahnstück durchlaufen ward, bestimmt worden sind. Es bedarf also zu Geschwindigkeitsmessungen gleichförmig bewegter Körper nur der Längenmessung gewisser Bahnstücke und der Zeitmessung der Zeiträume, in welchen diese Bahnstücke durchlaufen worden sind.

An gleichförmig beschleunigten Körpern kann ihre Beschleunigung und der Unterschied ihrer Geschwindigkeiten in zwei beliebigen Augenblicken nebst dem zwischenliegenden Zeitraume betrachtet werden. Für je zwei gleichförmig beschleunigte Körper ergiebt sich das Gesetz, dass, wenn ihre Beschleunigungen mit aA und $a'A$, die Unterschiede ihrer Geschwindigkeiten in zwei beliebigen Augenblicken mit cC und $c'C$, und die zwischenliegenden Zeiträume mit tT und $t'T$ bezeichnet werden, wo A das Beschleunigungsmaass bezeichnet, zwischen den Zahlen a, a', c, c', t, t' folgende Proportion stattfindet:

$$a : a' = \frac{c}{t} : \frac{c'}{t'},$$

oder, dass für alle gleichförmig beschleunigten Körper der Quotient

$$\frac{at}{c} = \frac{a't'}{c'}$$

einen konstanten Werth hat. Dieser konstante Werth ist für den *normal beschleunigten Körper,* wenn ein solcher festgestellt wird, d. i. ein bestimmter gleichförmig beschleunigter Körper, dessen Beschleunigung

zum Beschleunigungsmaasse, und zugleich der von ihm zu einem dem Geschwindigkeitsmaasse gleichen Geschwindigkeitsunterschied gebrauchte Zeitraum zum Zeitmaasse genommen wird, was zu thun gestattet ist, bekannt, nämlich $=1$. Einen solchen *normal beschleunigten Körper* vorausgesetzt, ist also für jeden gleichförmig beschleunigten Körper

$$\frac{at}{c}=1 \quad \text{oder} \quad a=\frac{c}{t},$$

wonach die zur Beschleunigungsmessung dienende Zahl a berechnet werden kann, wenn die Zahl c durch Geschwindigkeitsmessungen in zwei Augenblicken, und die Zahl t durch Messung des zwischen beiden Augenblicken liegenden Zeitraums bestimmt worden sind. Es bedarf also zu Beschleunigungsmessungen gleichförmig beschleunigter Körper nur der Geschwindigkeitsmessungen und der Zeitmessungen.

Ist nun aber ferner durch die Mechanik die Messung der Masse, die einem Körper zukommt, und die Messung der Kraft, die auf einen Körper wirkt, begründet worden, so kann man an jedem Körper in jedem Augenblicke auch die Grössen seiner Beschleunigung, seiner Masse und der auf ihn wirkenden Kraft betrachten. Für je zwei Körper ergiebt sich das Gesetz, dass, wenn ihre Beschleunigungen mit aA und $a'A$, ihre Massen mit mM und $m'M$, und die auf sie wirkenden Kräfte mit pP und $p'P$ bezeichnet werden, wo P das Kraftmaass bezeichnet, zwischen den Zahlen a, a', m, m', p, p' folgende Proportion stattfindet:

$$p:p'=am:a'm',$$

oder, dass für alle Körper der Quotient

$$\frac{p}{am}=\frac{p'}{a'm'}$$

einen konstanten Werth hat. Dieser konstante Werth ist für den *Normalkörper zu einer Normalzeit*, wenn ein solcher festgestellt wird, d. i. ein bestimmter Körper in einem bestimmten Augenblicke, dessen Beschleunigung zum Beschleunigungsmaasse, und dessen Masse zugleich zum Massenmaasse, sowie die auf ihn wirkende Kraft zum Kraftmaasse genommen wird, was zu thun gestattet ist, bekannt, nämlich $=1$.

Einen solchen *Normalkörper zu einer Normalzeit* vorausgesetzt, ist also für jeden Körper in jedem Augenblicke

$$\frac{p}{am}=1 \quad \text{oder} \quad p=am,$$

wonach die zur Kraftmessung dienende Zahl p berechnet werden kann, wenn die zur Beschleunigungsmessung dienende Zahl a bekannt, und die Zahl m durch Massenmessung bestimmt ist.

Da nun z. B. alle bekannten wahrnehmbaren Körper, in Betracht ihres Gewichts gleich beschleunigte Körper sind, so ist für alle diese sogenannten ponderabelen Körper, wenn man ihr Gewicht mit qP bezeichnet und ihre gleiche Beschleunigung (durch ihr Gewicht) mit gA,

$$\frac{q}{gm} = 1 \quad \text{oder} \quad m = \frac{q}{g},$$

wonach die zur Massenmessung solcher Körper dienende Zahl m berechnet werden kann, wenn die zur Gewichtsbestimmung dienende Zahl q durch Wägung bestimmt und die zur Beschleunigungsmessung dienende Zahl g bekannt ist.

An dem Oberflächenelemente eines gedrückten Körpers kann dieser Druck, ferner die durch den Druck dieses Elements auf den Körper ausgeübte Kraft und die Grösse dieses Flächenelements selbst betrachtet werden. Für je zwei solche gedrückte Flächenelemente ergiebt sich das Gesetz, dass, wenn ihr Druck mit qQ und $q'Q$, wo Q das Druckmaass bezeichnet, ferner die durch den Druck jedes Elements auf den zugehörigen Körper ausgeübte Kraft mit pP und $p'P$ und die Flächen beider Elemente mit fF und $f'F$ bezeichnet werden, zwischen den Zahlen q, q', p, p', f, f' folgende Proportion stattfindet:

$$q : q' = \frac{p}{f} : \frac{p_{\prime}}{f'},$$

oder, dass für alle solche gedrückten Flächenelemente der Quotient

$$\frac{qf}{p} = \frac{q'f'}{p'}$$

einen konstanten Werth hat. Dieser konstante Werth ist für die *normale Druckfläche,* wenn eine solche festgestellt wird, d. i. eine gleichförmig gedrückte ebene Begrenzungsfläche eines Körpers, deren Druck zum Druckmaass, die auf den Körper dadurch ausgeübte Kraft zum Kraftmaass und die selbst zum Flächenmaass genommen wird, was zu thun gestattet ist, bekannt, nämlich $= 1$.

Eine solche *normale Druckfläche* vorausgesetzt, ist für jedes gedrückte Flächenelement, oder für jede gleichförmig gedrückte ebene Begrenzungsfläche eines Körpers,

$$\frac{qf}{p} = 1 \quad \text{oder} \quad q = \frac{p}{f},$$

wonach die zur Druckmessung dienende Zahl q berechnet werden kann, wenn die Zahl p durch Kraftmessung und die Zahl f durch Flächenmessung bestimmt worden sind. Es bedarf also zu Druckmessungen

an Körperoberflächen nur der Messung einer auf den Körper ausgeübten Kraft und der Flächenmessung eines Oberflächenstücks.

Wir haben beispielsweise verschiedene Klassen von Gegenständen angeführt, welche von der *Geometrie* und *allgemeinen Mechanik* dargeboten werden, wo an jedem mehrere verschiedenartige Grössen zugleich betrachtet werden können und wo aus der Natur des Gegenstands die Abhängigkeit einer dieser Grössen von den andern sich ergiebt, so dass sie vollständig bestimmt ist, wenn die andern bekannt oder gegeben sind. Die aus der Natur dieser Gegenstände sich ergebende Abhängigkeit der an ihnen betrachteten verschiedenartigen Grössen von einander dient nun dem Zwecke der *Messung,* insofern als dadurch die *direkte* Messung von Grössen mehrerer verschiedenen Arten ganz erspart werden kann, was für diejenigen Grössenarten, für welche es *gar keine Methode direkter Messung* giebt, von besonderer Wichtigkeit ist.

Zugleich wird auch für mehrere verschiedene Grössenarten die *willkührliche* Aufstellung von Maassen erspart, indem für jede Klasse von Gegenständen *einer derselben als Normalgegenstand* festgestellt wird, bei welchem die verschiedenen an ihm betrachteten Grössen jede das Maass ihrer Grössenart ist.

Die verschiedenen von der Geometrie und allgemeinen Mechanik dargebotenen Klassen von Gegenständen waren: *Quadrate, Würfel, Kreisausschnitte, gleichförmig bewegte Körper, gleichförmig beschleunigte Körper* und *gleichförmig gedrückte ebene Begrenzungsflächen der Körper.* Die an diesen verschiedenen Klassen von Gegenständen betrachteten Grössenarten sind in folgender Uebersicht enthalten, wo jeder *Grössenart* die Bezeichnung ihres *Maasses* und der zur Messung einer Grösse dieser Art dienenden *Zahl* beigefügt ist.

Grössenart	Maass	Zahl
Längen	R	r
Flächen	F	f
Räume	V	v
Winkel	Φ	φ
Zeiten	T	t
Geschwindigkeiten	C	c
Beschleunigungen	A	a
Massen	M	m
Kräfte	P	p
Drucke	Q	q.

Aus der Natur der angegebenen Klassen von Gegenständen werden in der Geometrie und allgemeinen Mechanik folgende Gesetze der Zahlen

abgeleitet, welche zur Messung der verschiedenartigen an jedem Gegenstande betrachteten Grössen dienen, nämlich:

> es haben für die verschiedenen Klassen von Gegenständen der Reihe nach folgende *Quotienten* konstante Werthe, jeder für alle zur Klasse gehörigen Gegenstände:

$$\frac{f}{rr},\ \frac{v}{r^3},\ \frac{\varphi r}{r_0},\ \frac{ct}{r},\ \frac{at}{c},\ \frac{p}{am},\ \frac{qf}{p}.$$

Jeder dieser konstanten Werthe ist, *nach festgestelltem Normalgegenstande für jede Klasse,* $= 1$.

Es ergiebt sich hiernach, dass durch diese *Normalgegenstände* die willkührliche Feststellung der *Maasse* für sieben Grössenarten erspart wird, und dass die zur Messung jeder einzelnen Grösse dienende *Zahl* für diese sieben Grössenarten der Reihe nach aus folgenden sieben Gleichungen berechnet werden kann:

$$\frac{f}{rr}=1,\ \frac{v}{r^3}=1,\ \frac{\varphi r}{r_0}=1,\ \frac{ct}{r}=1,\ \frac{at}{c}=1,\ \frac{p}{am}=1,\ \frac{qf}{p}=1.$$

Von den oben angeführten zehn Grössenarten bleiben also nur drei übrig, deren *Maasse* festzustellen der Willkühr überlassen bleibt, und ebenso bleiben von jenen zehn Grössenarten drei übrig, für welche die zur Messung jeder einzelnen Grösse dienende *Zahl* nicht berechnet werden kann, sondern auf dem Wege *direkter Messung* gefunden werden muss.

Fügt man nun zu den angeführten zehn Klassen von Gegenständen noch eine neue hinzu, welche eine neue Art von Grössen darbietet, und aus deren Natur in der Geometrie oder allgemeinen Mechanik ein neues Gesetz der *Zahlen* abgeleitet wird, welche zur Messung der verschiedenartigen an diesen neuen Gegenständen betrachteten Grössen dienen, so übersieht man leicht, dass die Zahl der übrig bleibenden Grössenarten, deren *Maasse* festzustellen der Willkühr überlassen bleibt, so wie derer, für welche die zur Messung jeder einzelnen Grösse dienende *Zahl* nicht berechnet werden kann, sondern auf dem Wege *direkter Messung* gefunden werden muss, ganz unverändert bleibt.

Eine solche neue Klasse von Gegenständen sind z. B. die Hebel, d. i. feste, um eine Axe drehbare Körper, auf die in irgend einem Punkte eine Kraft wirkt. Die dadurch dargebotene neue Grössenart ist das *Moment der Kraft,* mit dem Maasse *L,* und aus der Natur der Hebel wird in der allgemeinen Mechanik das Gesetz der Zahlen abgeleitet, welche zur Messung der Länge des Hebelarms (d. i. des Abstands der Axe von der mit ihr parallel durch die Richtung der Kraft

gelegten Ebene), $= r$, ferner zur Messung der Kraft, $= p$, zur Messung des Winkels der Axe mit der Kraft, $= \varphi$, und endlich zur Messung des *Moments der Kraft*, $= l$, dienen, dass nämlich $l/[rp \sin \varphi]$ einen für alle Hebel konstanten Werth hat, der nach Feststellung des *Normalhebels* $= 1$ ist.

Ein anderes Beispiel von einer neuen Klasse von Gegenständen bieten die arbeitenden Körper dar, d. i. Körper, die sich in einer Bahn vorwärts bewegen, während sie von einer auf sie ausgeübten Kraft in dieser Bahn rückwärts getrieben werden. Die *Arbeitsintensität*, mit dem Maasse W, ist die von diesen Gegenständen dargebotene neue Grössenart. Aus der Natur solcher arbeitenden Körper ergiebt sich aber das Gesetz der Zahlen, welche zur Messung der Geschwindigkeit des Körpers in seiner Bahn, $= c$, und zur Messung der Kraft, die den Körper in seiner Bahn rückwärts treibt, $= p$, und zur Messung der Arbeitsintensität, $= w$, dienen, dass nämlich w/pc einen für alle arbeitenden Körper konstanten Werth hat, der, in Folge festgestellten *normal* arbeitenden Körpers, $= 1$ ist.

Noch ein Beispiel von einer neuen Klasse von Gegenständen bieten die homogenen Körper dar, d. i. Körper, die, wenn sie ihrem Rauminhalte nach getheilt werden, zugleich ihrer Masse nach proportional damit getheilt sind. Die Dichtigkeit der Körpermasse, mit dem Maasse D, ist die von diesen Gegenständen dargebotene neue Grössenart. Aus der Natur solcher homogener Körper ergiebt sich das Gesetz der Zahlen, welche zur Messung der Masse, des Rauminhalts und der Dichtigkeit eines solchen Körpers dienen m, v, d, dass nämlich m/vd einen für alle Körper gleichen Werth hat, der in Folge festgestellten *normalen homogenen Körpers* $= 1$ ist.

Fügt man diese Beispiele hinzu, so hat man zusammen zwölf verschiedene Grössenarten, auch von diesen zwölf bleiben aber, wie von den früheren zehn, nur drei übrig, deren *Maasse* festzustellen der Willkühr überlassen bleibt, und ebenfalls nur drei solche, für die Wege *direkter Messung* gefunden werden müssen, um die zur Bestimmung jeder einzelnen Grösse dienende Zahl zu ermitteln. Hierauf beruht, dass für das ganze Gebiet physikalischer Forschung drei willkührlich festzustellende Grundmaasse für drei verschiedene Grössenarten, und drei direkte Messungsmethoden ebenfalls für drei verschiedene Grössenarten *nöthig sind* und *genügen*.

Alle betrachteten Grössenarten haben Beziehung theils auf *Raum*, theils auf *Zeit*, theils auf *Körper*. Da nun *Geometrie* und *Mechanik* kein Prinzip eines Zusammenhangs von Raum, Zeit und Körper enthalten, so sieht man leicht ein, dass die drei unabhängigen Elemente,

auf die sich alle Grössenarten beziehen, drei unabhängige Grundmaasse für die Messung aller Grössen nöthig machen.

Diese Unabhängigkeit der drei Elemente, auf welche sich alle Grössenarten beziehen, findet aber in der *Physik* nicht statt, sondern Körper und deren Raumverhältnisse bedingen Bewegungen, *nach physikalischen Prinzipien*, wodurch ein Zusammenhang der drei Elemente, Raum, Zeit und Körper, gegeben ist.

Handelt es sich nun aber um *allgemeine* Maasse, so kann deren Feststellung nur auf ein solches physikalisches Prinzip gebaut werden, welches, wie die Prinzipien der Geometrie und Mechanik, für das ganze Messungsbereich, für den ganzen Raum, alle Zeiten und alle Körper, Geltung hat. Gäbe es ein solches Prinzip, so würde dadurch die Zahl der unabhängigen Elemente, auf welche alle Grössenarten sich beziehen, auf zwei zurückgeführt werden können, z. B. auf Raum und Zeit, und ebenso die Zahl der nothwendigen Grundmaasse, was von grosser wissenschaftlicher Bedeutung wäre.

Dürfte z. B. das allgemeine Gravitationsgesetz als ein solches physikalisches Prinzip angenommen werden, so würde diese Reduktion folgendermaassen praktisch ausgeführt werden.

Wir hätten eine neue Klasse von Gegenständen in den gravitirenden Körperpaaren. Für je zwei solche Körperpaare gilt das Gesetz, dass, wenn die Beschleunigung des *einen* Körpers jedes Paares mit aA und $a'A$, die Entfernung der Körper jedes Paares mit rR und $r'R$, und die Masse des *anderen* Körpers jedes Paares mit mM und $m'M$ bezeichnet werden, zwischen den Zahlen a, a', r, r', m, m' folgende Proportion stattfindet:

$$a : a' = \frac{m}{rr} : \frac{m'}{r'r'},$$

oder, dass für alle gravitirenden Körperpaare der Quotient

$$\frac{arr}{m} = \frac{a'r'r'}{m'}$$

einen konstanten Werth hat. Dieser konstante Werth für *normale gravitirende Körperpaare*, wenn ein solches festgestellt wird, d. i. ein Körperpaar in einem bestimmten Augenblicke, wo die Beschleunigung des *einen* Körpers des Paares zum Beschleunigungsmaass, die Entfernung beider Körper zum Längenmaass, und die Masse des *anderen* Körpers des Paares zum Massenmaass genommen wird, was zu thun gestattet ist, bekannt, nämlich $= 1$.

Ein solches *normales gravitirendes Körperpaar* vorausgesetzt ist für jedes gravitirende Körperpaar

$$\frac{arr}{m} = 1 \text{ oder } m = arr.$$

Wendet man dies auf die Erde und einen fallenden Körper an, wo für die Beschleunigung des fallenden Körpers, Millimeter und Sekunde zu Raum- und Zeitmaass genommen, die Zahl $a = 9811$, und für die Entfernung die Zahl $r = 6518 . 10^6$ gefunden wird, so erhält man

$$m = arr = 4168 . 10^{20},$$

also die Masse der Erde

$$mM = 4168 . 10^{20} M,$$

wo M das durch das *normale gravitirende Körperpaar* gegebene Massenmaass bezeichnet.

Nun ist die Erdmasse in Milligramm etwa $= 5954 . 10^{27}$, woraus

$$\text{die Masse eines Milligramms} = \frac{1}{14\,285\,000} M$$

folgt.

Welche Bedeutung auch diese Maassreduktion, von theoretischem Gesichtspunkte aus betrachtet, haben möge, so hat sie doch keine weitere praktische Bedeutung gewonnen, weil die wirkliche Ausführung indirekter Massenmessungen nach dem dadurch festgestellten Massenmaasse fast nur auf Weltkörper im Ganzen beschränkt ist, da sie bei kleineren Massen keine hinreichende Genauigkeit gestattet. Aber eine andere Benutzung *physikalischer Grundgesetze*, ausser den Prinzipien der Geometrie und Mechanik, wobei die der obigen Reduktion zu Grunde liegende als Muster gedient hat, hat für die Begründung eines allgemein anwendbaren Maasssystems desto grössere praktische Bedeutung gewonnen, nämlich die Benutzung des Grundgesetzes der *Wechselwirkung ruhender elektrischer Massen.*

Es leuchtet nämlich ein, dass, wenn auch physikalische Grundgesetze aus dem angegebenen Grunde zur Begründung eines Maasssystems im Allgemeinen nicht so wie die Prinzipien der Geometrie und Mechanik zugelassen werden sollen, dieselben doch keineswegs gänzlich auszuschliessen sind, da sie in manchen besonderen Fällen unentbehrlich sind und nothwendig zu Hülfe genommen werden müssen, nämlich in solchen, wo es sich um Grössenarten handelt, die der Geometrie und Mechanik ganz fremd sind, die der Physik eigenthümlich angehören, und für welche es doch keine Methode direkter Messung giebt. In diesen Fällen können der Natur der Sache nach Methoden indirekter Messung für solche Grössenarten nur auf physikalische Grundgesetze gebaut werden, die also hierzu unentbehrlich sind und, soweit dieser Zweck es fordert, zugelassen werden müssen.

Wir haben eine neue Klasse von Gegenständen in ruhenden elektrischen Massenpaaren. Für je zwei solche Massenpaare gilt das Gesetz, dass, wenn die Abstossungskräfte beider Paare mit pP und $p'P$, die Entfernungen der Massen in beiden Paaren mit rR und $r'R$, und die zwei Massen in beiden Paaren mit mM, μM, und $m'M$, $\mu' M$ bezeichnet werden, zwischen den Zahlen p, p', r, r', m, μ, m', μ' folgende Proportion stattfindet:

$$p:p'=\frac{m\mu}{rr}:\frac{m'\mu'}{r'r'},$$

oder, dass für alle ruhenden elektrischen Massenpaare der Quotient

$$\frac{prr}{m\mu}=\frac{p'r'r'}{m'\mu'}$$

einen konstanten Werth hat. Dieser konstante Werth ist für das *normale elektrische Massenpaar*, wenn ein solches festgestellt ist, d. i. ein Paar von zwei gleichen ruhenden elektrischen Massen, wovon die einzelne Masse zum Massenmaass, die Entfernung beider Massen von einander zum Längenmaass und zugleich die Abstossungskraft beider Massen zum Kraftmaass genommen wird, was zu thun gestattet ist, bekannt, nämlich $= 1$.

Ein solches normales elektrisches Massenpaar vorausgesetzt, ist für jedes ruhende Paar von gleichen elektrischen Massen

$$\frac{prr}{m^2}=1 \text{ oder } m^2=prr,$$

wonach die zur Messung einer elektrischen Masse dienende Zahl m berechnet werden kann, wenn die zur Messung einer Kraft dienende Zahl p und die zur Messung einer Länge dienende Zahl r durch Kraftmessung und Längenmessung bestimmt worden sind. Das dabei zu Grunde liegende elektrische Massenmaass ist das durch das *normale elektrische Massenpaar* festgestellte. Dieses auf Feststellung des *normalen elektrischen Massenpaares* begründete Massenmaass ist nun aber offenbar von allen anderen Massenmaassen M, die ohne Benutzung des obigen elektrischen Grundgesetzes festgestellt werden, ganz verschieden, und werde daher zur Unterscheidung mit E bezeichnet und die zur Bestimmung einer Grösse nach diesem Maasse dienende Zahl mit e.

Nun hat sich aber aus allen bisherigen Beobachtungen ergeben, dass alle anderen Massenmaasse, die ohne Benutzung des obigen elektrischen Grundgesetzes festgestellt werden können, auf Messung elektrischer Massen unter den Verhältnissen, unter denen sie sich bei allen unseren Beobachtungen befinden, keine praktische Anwendung finden

können, wodurch die Aufstellung eines besonderen Massenmaasses für alle elektrischen Massen nothwendig geworden ist.

Durch Benutzung des obigen elektrischen Grundgesetzes kann also ein solches Maass festgestellt werden, ohne die Zahl der willkührlich festzustellenden Maasse zu vermehren, und es ist dadurch der Weg gebahnt, die Anwendung des allgemeinen Maasssystems auf alle in der Elektricitätslehre betrachteten Grössenarten auszudehnen.

Eine neue Klasse von Gegenständen bieten elektrische Leiter mit gleichförmigen Strömen dar, d. i. Körper, welche von gleichen Massen positiver und negativer Elektricität mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung durchströmt werden. Für je zwei solche elektrische Leiter gilt das Gesetz, dass, wenn die in einem Stücke jedes Leiters enthaltene Masse positiver Elektricität (die der Masse der negativen gleich ist) mit eE und $e'E$ bezeichnet wird, wo E das für alle elektrische Massen besonders festgestellte Maass ist, wenn ferner die Länge der beiden Stücke mit rR und $r'R$, die Geschwindigkeiten, mit welchen sich diese elektrischen Massen in beiden Leitern bewegen, mit cC und $c'C$, und die Stromintensitäten in beiden Leitern mit iI und $i'I$ bezeichnet werden, wo I das Maass für Stromintensitäten bedeutet, zwischen den Zahlen $e, e', r, r', c, c', i, i'$ folgende Proportion stattfindet:

$$i : i' = \frac{ec}{r} : \frac{e'c'}{r'},$$

oder, dass für alle elektrischen Leiter mit gleichförmigen Strömen der Quotient

$$\frac{ri}{ec} = \frac{r'i'}{e'c'},$$

einen konstanten Werth hat. Dieser konstante Werth ist für das *normale Stromleiterstück,* wenn ein solches festgestellt ist, d. i. ein solches Leiterstück, dessen Länge zum Längenmaass, die Masse der positiven (oder negativen) Elektricität, die darin enthalten ist, zum Maass der elektrischen Masse, die Geschwindigkeit, mit der sich diese Masse bewegt, zum Geschwindigkeitsmaass, und die Stromintensität in demselben zum Stromintensitätsmaass genommen wird, was zu thun gestattet ist, bekannt, nämlich $= 1$.

Ein solches *normales Stromleiterstück* vorausgesetzt, ist für jedes Stromleiterstück

$$\frac{ri}{ec} = 1 \text{ oder } i = \frac{ec}{r},$$

wonach die zur Stromintensitätsmessung dienende Zahl i berechnet werden kann, wenn die Zahl e durch elektrische Massenmessung, die

Zahl c durch Geschwindigkeitsmessung und die Zahl r durch Längenmessung bestimmt worden sind.

Diese einfachste Messungsmethode von Stromintensitäten findet aber gar keine praktische Anwendung, weil bisher in keinem elektrischen Leiter die Zahl e durch Messung der darin enthaltenen positiven (oder negativen) elektrischen Masse hat bestimmt werden können, und ebensowenig die Zahl c durch Messung der Geschwindigkeit, mit welcher die elektrische Masse im Leiter sich bewegt, wodurch für alle praktischen Anwendungen eine andere Messungsmethode von Stromintensitäten nothwendig geworden ist, die zugleich mit Aufstellung eines anderen Stromintensitätsmaasses verbunden ist.

Eine neue Klasse von Gegenständen bieten nämlich geschlossene elektrische Leiter mit gleichförmigen Strömen dar. Für je zwei Paare solcher geschlossenen Stromleiter, die fern von einander in Ruhe sich befinden, gilt das Gesetz, dass, — wenn die Flächen, welche von den rechtwinkligen Projektionen der Stromleiter auf diejenigen Ebenen umschlossen sind, für welche diese Flächen am grössten sind, mit fF, gF und $f'F'$ $g'F'$, die Abstände der Mittelpunkte der Stromleiter in beiden Paaren mit rR und $r'R$, die Winkel, welche die Verbindungslinie in jedem Paare mit der Normale der Projektionsebene des ersten Stromleiters bildet, mit $\psi\Phi$ und $\psi'\Phi$, die Winkel, welche die Normalen der Projektionsebene der zweiten Stromleiter in beiden Paaren mit den in der Ebene der Verbindungslinie und der Normale der Projektionsebene des ersten Stromleiters in jedem Paare enthaltenen *Richtungen* bilden, *welche* mit den Verbindungslinien Winkel einschliessen, deren Sinusse sich verhalten zu $\sin\psi$ und $\sin\psi'$ wie 1 zu $\sqrt{1+3\cos\psi^2}$ und $\sqrt{1+3\cos\psi'^2}$, mit $\varphi\Phi$ und $\varphi'\Phi$, die Stromintensitäten in den beiden Leiterpaaren mit iI, kI und $i'I$, $k'I$, und endlich die Momente der in beiden Paaren vom ersten Leiter auf den zweiten ausgeübten Kraft mit lL und $l'L$ bezeichnet werden, — zwischen den Zahlen f, g, f', g', r, r', ψ, ψ', φ, φ', i, k, i', k', l, l' folgende Proportion stattfindet:

$$l:l' = \frac{fi.gk}{r^3}\sqrt{1+3\cos\psi^2}.\sin\varphi : \frac{f'i'.g'k'}{r'^3}\sqrt{1+3\cos\psi'^2}.\sin\varphi',$$

oder, dass für alle geschlossenen Stromleiterpaare, wo die Leiter fern von einander in Ruhe sich befinden, der Quotient

$$\frac{fi.gk}{lr^3}\sqrt{1+3\cos\psi^2}.\sin\varphi = \frac{f'i'.g'k'}{l'r'^3}\sqrt{1+3\cos\psi'^2}.\sin\varphi'$$

einen konstanten Werth hat. Dieser konstante Werth ist für das *normale geschlossene Stromleiterpaar*, wenn ein solches festgestellt ist, — d. i. ein solches, wo die daran betrachteten Flächen und Stromintensitäten

gleich sind und zu Flächenmaassen und Stromintensitätsmaassen genommen werden, wo ferner das daran betrachtete Moment und der daran betrachtete Abstand zwar nicht selbst zum Momentmaass und Längenmaass, doch aber diese beiden Maasse zu jenen beiden Grössen in solchen Verhältnissen stehend angenommen werden, dass das Produkt der zur Messung des Moments dienenden Zahl in den Kubus der zur Messung des Abstands dienende Zahl $= 1$ ist, wo endlich die Winkel φ und ψ rechte Winkel sind, — bekannt, nämlich $= 1$.

Ein solches *normales geschlossenes Stromleiterpaar* vorausgesetzt, ist für jedes geschlossene Stromleiterpaar, dessen Leiter fern von einander in Ruhe sich befinden, wenn durch beide derselbe Strom geht,

$$\frac{fi \,.\, gi}{lr^3} \sqrt{1 + 3\cos\psi^2} \,.\, \sin\varphi = 1 \quad \text{oder}$$

$$ii = \frac{lr^3}{fg \sin\varphi \sqrt{1 + 3\cos\psi^2}},$$

wonach die zur Stromintensitätsmessung dienende Zahl i berechnet werden kann, wenn die Zahl l durch Momentmessung, die Zahl r durch Längenmessung, die Zahlen f und g durch Flächenmessung und die Zahlen φ und ψ durch Winkelmessung bestimmt worden sind. Das dieser Stromintensitätsmessung zum Grunde liegende, durch das *normale geschlossene Stromleiterpaar* festgestellte Stromintensitätsmaass ist aber ganz verschieden von dem oben angegebenen, durch das *normale Stromleiterstück* festgestellten Stromintensitätsmaasse, welches keine praktische Anwendung bei Ausführung von Stromintensitätsmessungen fand.

Eine neue Klasse von Gegenständen bieten Magnete dar, d. i. Körper, in denen gleichförmige, beharrliche, geschlossene Ströme enthalten sind, oder etwas damit äquivalentes. Für je zwei Paare solcher fern von einander liegender Magnete gilt das Gesetz, dass, — wenn die Summe der Produkte der Stromintensitäten in die Flächen, welche von den rechtwinkligen Projektionen sämmtlicher Ströme auf diejenige Ebene umschlossen sind, für welche die Summe jener Produkte am grössten ist, der *Magnetismus* der Körper genannt und mit sS, σS und $s'S$, $\sigma' S$ bezeichnet wird, wenn die Abstände der Mittelpunkte beider Magnete von einander in jedem Paare mit rR und $r'R$ bezeichnet werden, wenn ferner die Normale der Projektionsebene bei jedem Magnet seine *magnetische Axe* genannt und der Winkel der magnetischen Axe des ersten Magnets in jedem Paare mit der Verbindungslinie mit $\psi\Phi$ und $\psi'\Phi$ bezeichnet wird, und ferner die Winkel, welche die magnetische Axe des zweiten Magnets in jedem Paare mit einer *Richtung* in der Ebene der Verbindungslinie und der magnetischen Axe des

ersten Magnets bildet, *die* mit der Verbindungslinie in jedem Paare einen Winkel bildet, dessen Sinus sich zu $\sin\psi$ und $\sin\psi'$, wie 1 zu $\sqrt{1+3\cos\psi^2}$ und $\sqrt{1+3\cos\psi'^2}$ verhält, mit $\varphi\,\Phi$ und $\varphi'\Phi$, und endlich die Momente der vom ersten Magnet auf den zweiten in jedem Paare ausgeübten Kraft mit lL und $l'L$ bezeichnet werden — zwischen den Zahlen $s, \sigma, s', \sigma', r, r', \psi, \psi', \varphi, \varphi', l, l'$ folgende Proportion stattfindet:

$$l:l'=\frac{s\sigma}{r^3}\sqrt{1+3\cos\psi^2}\,.\sin\varphi:\frac{s'\sigma'}{r'^3}\sqrt{1+3\cos\psi'^2}\,.\sin\varphi',$$

oder, dass für alle Paare fern von einander liegender Magnete der Quotient

$$\frac{s\sigma}{lr^3}\sqrt{1+3\cos\psi^2}\,.\sin\varphi=\frac{s'\sigma'}{lr'^3}\sqrt{1+3\cos\psi'^2}\,.\sin\varphi'$$

einen konstanten Werth hat. Dieser konstante Werth ist für das *normale Magnetenpaar*, wenn ein solches festgestellt ist, d. i. ein Paar, wo der Magnetismus beider Magnete gleich und zum Maass des Magnetismus, ihr Abstand und das vom ersten Magnet auf den zweiten ausgeübte Moment zwar nicht selbst zum Längenmaass und Momentmaass, doch aber diese beiden Maasse zu jenen beiden Grössen in solchen Verhältnissen stehend angenommen werden, dass das Produkt der zur Messung des Moments dienenden Zahl in den Kubus der zur Messung des Abstands dienenden Zahl $=1$ ist, und wo endlich die Winkel φ und ψ rechte Winkel sind, bekannt, nämlich $=1$.

Ein solches *normales Magnetenpaar* vorausgesetzt, ist für jedes Paar fern liegender Magnete von gleichem Magnetismus

$$\frac{s^2}{lr^3}\sqrt{1+3\cos\psi^2}\,.\sin\varphi=1 \quad \text{oder}$$

$$s^2=\frac{lr^3}{\sin\varphi\sqrt{1+3\cos\psi^2}},$$

wonach die zur Messung des Magnetismus dienende Zahl s berechnet werden kann, wenn die Zahl l durch Momentmessung, die Zahl r durch Längenmessung und die Zahlen φ und ψ durch Winkelmessung bestimmt worden sind.

Eine neue Klasse von Gegenständen sind Magnete unter dem Einfluss eines entfernten Magnets, dessen Ort, Magnetismus und magnetische Axe unbekannt ist, z. B. der Erde. Für je zwei solche Magnete gilt das Gesetz, dass es für jeden von beiden eine Richtung seiner magnetischen Axe giebt, wobei er in Ruhe verharren kann, die man die *Richtung des Erdmagnetismus* am Orte des Magnets nennt, und dass ferner, wenn man die Winkel, welche die magnetische Axe eines jeden von den beiden Magneten mit der Richtung des Erdmagnetismus an

seinem Orte bildet, mit $\varphi\Phi$ und $\varphi'\Phi$, ihren Magnetismus sS und $s'S$, das Moment der auf jeden Magnet wirkenden Kraft mit lL und $l'L$ und die Intensität des Erdmagnetismus am Orte jedes Magnets mit uU und $u'U$ bezeichnet, zwischen den Zahlen $\varphi, \varphi', s, s', l, l', u, u'$ folgende Proportion stattfindet:

$$u : u' = \frac{l}{s \sin\varphi} : \frac{l'}{s' \sin\varphi'},$$

oder dass für jeden solchen Magnet der Quotient

$$\frac{su \sin\varphi}{l} = \frac{s'u' \sin\varphi'}{l'}$$

einen konstanten Werth hat. Dieser konstante Werth ist für den *unter Einfluss eines fernen Magnets stehenden Normalmagnet,* wenn ein solcher festgestellt ist, d. i. ein solcher, dessen Magnetismus zum Maasse des Magnetismus, das Moment der auf ihn wirkenden Kraft zum Momentmaass, der Winkel seiner magnetischen Axe mit der Richtung des Erdmagnetismus an seinem Orte ein rechter Winkel ist, und die Intensität des Erdmagnetismus an seinem Orte zum Maass der Intensität des Erdmagnetismus genommen wird, bekannt, nämlich $= 1$.

Ein solcher *unter Einfluss eines fernen Magnets stehender Normalmagnet* vorausgesetzt, ist für jeden unter Einfluss eines fernen Magnets stehender Magnet

$$\frac{su \sin\varphi}{l} = 1 \quad \text{oder} \quad u = \frac{l}{s \sin\varphi},$$

wonach die zur Messung des Erdmagnetismus an einem bestimmten Orte dienende Zahl u berechnet werden kann, wenn die Zahl l durch Momentmessung, die Zahl s durch Messung von Magnetismus und die Zahl φ durch Winkelmessung bestimmt worden sind.

Eine neue Klasse von Gegenständen sind bewegte geschlossene Leiter unter Einfluss eines Erdmagnetismus. Für je zwei solche Leiter gilt das Gesetz, dass, wenn die Aenderung der Projektionsfläche jedes Leiters auf die Normalebene der erdmagnetischen Richtung an seiner Stelle mit fF und $f'F$, die Zeiträume, in welchen diese Aenderungen stattfinden, mit tT und $t'T$, die Intensitäten des Erdmagnetismus, unter deren Einfluss die beiden Leiter sich bewegen, mit uU und $u'U$ und die auf die beiden Leiter wirkenden elektromotorischen Kräfte mit bB und $b'B$ bezeichnet werden, zwischen den Zahlen

$$f, f', t, t', u, u', b, b'$$

folgende Proportion stattfindet:

$$b : b' = \frac{fu}{t} : \frac{f'u'}{t'}$$

oder dass für jeden solchen Leiter der Quotient

$$\frac{fu}{bt}=\frac{f'u'}{b't'}$$

einen konstanten Werth hat. Dieser konstante Werth ist für den *normalen unter Einfluss eines Erdmagnetismus sich bewegenden geschlossenen Leiters,* d. i. desjenigen Leiters, dessen Aenderung der Projektionsfläche zum Flächenmaass, der Zeitraum, in welchem diese Aenderung stattfindet, zum Zeitmaass, die Intensität des Erdmagnetismus an seinem Orte zum Intensitätsmaass des Erdmagnetismus, und die auf ihn wirkende elektromotorische Kraft zum Maass elektromotorischer Kräfte genommen wird, bekannt, nämlich $=1$.

Ein solcher *normaler unter Einfluss von Erdmagnetismus sich bewegender Leiter* vorausgesetzt, ist für jeden unter Einfluss von Erdmagnetismus sich bewegenden geschlossenen Leiter

$$\frac{fu}{bt}=1 \quad \text{oder} \quad b=\frac{fu}{t},$$

wonach die zur Messung einer elektromotorischen Kraft dienende Zahl b berechnet werden kann, wenn die Zahl f durch Flächenmessung, die Zahl t durch Zeitmessung und die Zahl u durch Intensitätsmessung des Erdmagnetismus bestimmt worden sind.

Eine neue Klasse von Gegenständen sind geschlossene Leiter mit konstanten Strömen. Für je zwei solche Leiter gilt das Gesetz, dass, wenn die auf sie wirkenden elektromotorischen Kräfte mit bB und $b'B$, die Stromintensitäten in beiden Leitern mit iI und $i'I$ und die Widerstände beider Leiter mit gG und $g'G$ bezeichnet werden, zwischen den Zahlen

$$b,\ b',\ i,\ i',\ g,\ g'$$

folgende Proportion stattfindet:

$$g:g'=\frac{b}{i}:\frac{b'}{i'}$$

oder dass für jeden solchen Leiter der Quotient

$$\frac{gi}{b}=\frac{g'i'}{b'}$$

einen konstanten Werth hat. Dieser konstante Werth ist für den *normalen Stromleiter,* wenn ein solcher festgesetzt ist, d. i. derjenige, auf welchen eine elektromotorische Kraft wirkt, die zum Maass elektromotorischer Kräfte genommen wird, und worin ein konstanter Strom enthalten ist, der zum Maass der Stromintensität genommen wird, und

der einen Widerstand besitzt, der zum Widerstandsmaass genommen wird, bekannt, nämlich $=1$.

Ein solcher *normaler Stromleiter* vorausgesetzt, ist für jeden geschlossenen Stromleiter

$$\frac{gi}{b}=1 \quad \text{oder} \quad g=\frac{b}{i},$$

wonach die zur Messung des Widerstands dienende Zahl g berechnet werden kann, wenn die Zahl b durch Messung einer elektromotorischen Kraft und die Zahl i durch Messung einer Stromintensität bestimmt worden sind.

Auf die angegebene Weise sind die Maasse von 16 in der Physik betrachteten Grössenarten auf drei Grundmaasse reduzirt worden, und auf dieselbe Weise können auch die Maasse aller anderen ausserdem noch in der Physik zu betrachtenden Grössenarten auf dieselben Grundmaasse reducirt werden.

Das allgemeine Schema, welches zur Begründung dieses allgemeinen Maasssystems diente, war wesentlich folgendes.

Aus dem Gebiete der Geometrie, der allgemeinen Mechanik oder Physik wird eine *Klasse von Gegenständen* entnommen, an welchen vollständige Systeme *zusammengehöriger Messungen* gemacht werden können, unter denen eine Messung sei, zu deren Ausführung es noch an einer bestimmten Methode und an einem bestimmten Maasse fehle. Die gesuchten Resultate dieser auf einen einzelnen Gegenstand sich beziehenden zusammengehörigen Messungen können auf folgende Weise dargestellt werden:

$$aA,\ bB,\ cC,\ \ldots\ xX,$$

wovon das letzte Resultat sich auf die Messung bezieht, zu deren Ausführung es noch an einer bestimmten Methode und an einem bestimmten Maasse fehlt.

Diese Messungen heissen *zusammengehörig,* wenn unter den gemessenen Grössen ein Zusammenhang existirt, durch welchen immer eine Grösse durch die übrigen bestimmt ist. Dieser Zusammenhang, welcher seinen Grund in der Natur der Gegenstände der betreffenden Klasse haben muss, sei nun, je nachdem diese Klasse dem Gebiete der Geometrie, der allgemeinen Mechanik oder Physik angehört, durch *ein aus geometrischen oder mechanischen Prinzipien abgeleitetes Gesetz,* oder durch ein *Naturgesetz* gegeben, welches immer in folgender Form darstellbar ist:

$$a^{\alpha}.\,b^{\beta}.\,c^{\gamma}\ldots x^{\xi}=\text{Konst.}$$

Es leuchtet ein, da die Zahl x kleiner oder grösser ist, je nachdem das

noch nicht bestimmte Maass X grösser oder kleiner ist, dass es ein bestimmtes Maass X giebt, für welches

$$a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots x^\xi = 1$$

ist. Dies angenommen, ist also das Maass X bestimmt, und die Zahl x kann berechnet werden, nämlich:

$$x = \sqrt[\xi]{\frac{1}{a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots}},$$

wodurch also *Maass* und *Methode der Messung* auch für diese letzte Art von Grössen gegeben und gefunden ist.

Es ist dadurch also ein allgemeines *Maasssystem* für alle in der Physik betrachteten Grössenarten *mit drei Grundmaassen* begründet worden. Zu vollständiger Feststellung dieses Maasssystems bedarf es nur noch der Wahl der drei Grundmaasse selbst, und zwar zunächst der Bestimmung der *drei Grössenarten*, für welche diese Grundmaasse gewählt werden sollen.

Zur besseren Uebersicht mögen alle Grössenarten, unter denen die gesuchten drei Grössenarten sich befinden müssen, nebst den Bezeichnungen ihrer Maasse und der Zahlen, welche zur Bestimmung einer einzelnen Grösse jeder Art dienen, nebst den angeführten Gesetzen, nach welchen einige dieser Zahlen aus anderen berechnet werden können, nach Festsetzung bestimmter *Normalgegenstände*, an denen die Grössen beobachtet werden, zu deren Bestimmung diese Zahlen dienen, nochmals hier zusammengestellt werden.

Grössenart	Maass	Zahl	Gesetz
Längen	R	r	
Flächen	F	f	$= rr$
Räume	V	v	$= r^3$
Winkel	Φ	φ	$= \frac{r_0}{r}$
Zeiten	T	t	
Geschwindigkeiten	C	c	$= \frac{r}{t}$
Beschleunigungen	A	a	$= \frac{c}{t}$
Massen	M	m	
Kräfte	P	p	$= am$
Drucke	Q	q	$= \frac{p}{f}$
Kraftmomente	L	l	$= rp \sin\varphi$
Arbeitsintensitäten	W	w	$= pc$

Grössenart	Maass	Zahl	Gesetz
Dichtigkeiten	D	d	$= \frac{m}{v}$
Elektrische Massen	E	e	$= \sqrt{prr}$
Stromintensitäten	I	i	$= \frac{1}{f}\sqrt{\frac{lr^3}{\sin\varphi\sqrt{1+3\cos\psi^2}}}$
Magnetismus	S	s	$= \sqrt{\frac{lr^3}{\sin\varphi\sqrt{1+3\cos\psi^2}}}$
Erdmagnetismus	U	u	$= \frac{l}{s\sin\varphi}$
Elektromotorische Kräfte	B	b	$= \frac{fu}{t}$
Galvanische Widerstände	G	g	$= \frac{b}{i}$

Nach dieser Uebersicht scheint es, als wären die Grössenarten, für welche Grundmaasse zu wählen seien, *Längen, Zeiten* und *Massen,* weil für diese drei Grössenarten kein Gesetz vorliegt, um die zur Bestimmung einer einzelnen Grösse dienende Zahl zu berechnen, was für alle anderen Grössenarten der Fall ist. Doch leuchtet ein, dass dies nur in der Ordnung seinen Grund hat, in welche in dieser Uebersicht die verschiedenen Grössenarten gebracht sind, da ein solches Gesetz nur bei denjenigen Grössenarten angeführt werden konnte, die bei dieser Ordnung der Grössenarten, die mit ihr zugleich an dem *Normalgegenstande,* auf welchen sich das Gesetz bezieht, betrachtet wurden, schon vorausgegangen waren. Bei veränderter Ordnung würden andere Grössenarten als diejenigen erscheinen, für welche Grundmaasse zu wählen seien.

Sind also die Grössenarten, für welche Grundmaasse zu wählen sind, durch die Natur der Sache nicht bestimmt, so bleibt nichts übrig, als sie nach Gründen der Zweckmässigkeit zu bestimmen. Alle angeführten Grössenarten sind in der Physik Gegenstand der Betrachtung sowohl bei den theoretischen Forschungen der mathematischen Physik, als auch bei den praktischen Forschungen der messenden Physik.

In allen theoretischen Forschungen der mathematischen Physik werden alle Grössen als Funktionen der Raumkoordinaten und der Zeit dargestellt, wonach es offenbar am zweckmässigsten ist, *Längen* und *Zeiten* dem Maasssystem als diejenigen Grössenarten, für welche Grundmaasse zu wählen sind, zu Grunde zu legen. Die davon unabhängige Beschaffenheit der Körper im Raume, welche dann ausserdem noch in Rechnung zu bringen ist, ist aber die *Massendichtigkeit,* die daher am zweckmässigsten als dritte Grössenart genommen wird, für die ein Grundmaass zu wählen ist.

In den praktischen Forschungen der messenden Physik dagegen ist es offenbar zweckmässig, Grundmaasse nur für solche Grössenarten zuzulassen, für welche eine Methode direkter Messung praktisch begründet werden kann, und darunter verdienen diejenigen den Vorzug, bei denen die Methode der direkten Messung den höheren Grad der Genauigkeit gestattet, nämlich *Längen* und *Gewichte,* weil die direkten Methoden der Längenmessung und Wägung die grösste Genauigkeit gewähren. Fügt man hinzu, dass in der Physik die praktisch feinste Methode der Zeitmessung durch die praktische Astronomie als gegeben vorausgesetzt werden darf, nebst der getroffenen Wahl der *Sekunde als Grundmaass für alle Zeiträume;* so bleibt hier nur die Wahl der Grundmaasse für Länge und Gewichte übrig, um ein vollständiges und allgemeines Maasssystem, wie es für die praktischen Forschungen der messenden Physik am zweckmässigsten ist, darzustellen. Doch kommt dabei noch ein wesentlicher Umstand in Betracht. Da nämlich die Annahme der Gewichte als Grössenart, für welche ein Grundmaass zu wählen sei, nur auf der Feinheit der Wägung beruht, wodurch eine direkte Methode zu genauester Messung der Grössen dieser Art gegeben ist, so kommt wesentlich in Betracht, dass nach dieser Methode das Verhältniss zweier Gewichte in reinen Zahlen nur bestimmt wird, wenn diese Gewichte an demselben Orte sich befinden, wie von selbst einleuchtet, wenn die Wägungen mit Wagen ausgeführt werden nach der Borda'schen Methode der Tarirung. Es leuchtet aber dann zugleich ein, dass das für die *Gewichte* der Körper gefundene Zahlenverhältniss auch für die *Körpermassen* gilt, weil an diesem Orte die Beschleunigung aller Körper durch ihr Gewicht gleich ist, und dass folglich die Wägung überall auch eine direkte Methode der Massenmessung bietet, wo sie zur Gewichtsmessung gebraucht werden kann. Hieraus ergiebt sich für die messende Physik die Alternative, dass entweder *Gewichte* oder *Massen* als diejenige Grössenart zu nehmen sind, für welche ein Grundmaass zu wählen ist.

Findet nun diese Alternative in der messenden Physik keine Entscheidung, so ist eine solche in der mathematischen Physik zu suchen, nämlich darin, dass in allen Fällen, wo in der mathematischen Physik die Körper als physische Punkte betrachtet werden dürfen, wo also die Betrachtung von Dichtigkeit und Rauminhalt ganz wegfällt, offenbar die Betrachtung der *Massen* an die Stelle der Betrachtung von Dichtigkeit und Rauminhalt treten muss, als der dritten Grössenart, für welche ein Grundmaass zu wählen ist. Dazu kommt noch, dass auch in allen übrigen Forschungen der mathematischen Physik ohne Nachtheil, *statt der Dichtigkeit als Grundgrösse,* die in der Volumeneinheit enthaltene Masse eingeführt werden kann, *die Masse als Grundgrösse* genommen.

Ist auf diese Weise ein allgemeines Maasssystem mit *Längen, Zeiten* und *Massen,* als Grundgrössen, die allen Zwecken physikalischer Forschungen am besten entsprechen, begründet; so bleibt endlich nur noch die Wahl der zum *Längenmaass* und *Massenmaass* anzunehmenden Länge und Masse übrig, um das Maasssystem vollkommen abzuschliessen, da die Wahl des zum *Zeitmaass* anzunehmenden Zeitraums durch die Astronomie als schon entschieden in der Physik vorausgesetzt wird.

Die Entscheidung dieser beiden Wahlen würde nun nach Verschiedenheit des Standpunkts, z. B. von Weltbewohnern und Erdbewohnern, verschieden ausfallen; die Beschränkung auf den Standpunkt der Erdbewohner ist aber schon durch Zulassung von *drei* Grössenarten als Grundgrössen gegeben, denn für Weltbewohner würde, wie aus dem oben Angeführten erhellt, die Reduktion des Maasssystems auf *zwei* Arten von Grundgrössen, wie sie durch das allen Weltbewohnern dargebotene Gravitationsgesetz ermöglicht wird, offenbar den Vorzug verdienen. Für alle Bewohner der Erdoberfläche leuchtet aber ein, dass von allen Längenmessungen diejenigen, welche zur Orientirung auf der Erdoberfläche selbst dienen, die vielseitigste und grösste Bedeutung haben. Ebenso bieten sich allen Erdbewohnern von allen Körpern vorzugsweise die überall verbreiteten Wassermassen als Messungsgegenstand dar, wonach kein Zweifel ist, dass Längenmaass und Massenmaass so zu wählen sind, wie es für Messungen der Entfernungen auf der Erdoberfläche und für Messungen der Wassermassen am zweckmässigsten ist. Die Erdoberfläche als Kugel betrachtet, bietet nun aber keine andere bestimmte Länge zur Vergleichung mit den Entfernungen beliebiger Punkte auf der Erdoberfläche von einander dar, als die *Länge ihres grössten Kreises,* so wie *das Wasser seine in der Raumeinheit enthaltene Masse.*

Nach so getroffener Wahl des Längen- und Massenmaasses ist das allgemeine Maasssystem, wie es für die Physik gebraucht wird, vollkommen abgeschlossen.

Zur Erläuterung endlich der Bedeutung, welche ein solches Maasssystem in seiner Totalität für die Physik im Ganzen hat, dienen die mannigfaltigen grossen Vortheile, und die Erleichterungen, welche ein solches System bei der oft sehr schwierigen Erforschung der Naturgesetze und für die Darstellung derselben und ihres Zusammenhanges unter einander gewährt, worüber noch folgende Bemerkungen hier beigefügt werden mögen.

In der mathematischen Physik werden alle Naturgesetze in Gleichungen ausgesprochen. Diese Gleichungen enthalten theils reine Zahlen, wie die Zahl π oder Logarithmen oder Winkel und deren Funktionen, theils Zahlen, welche zur Bestimmung von Grössen verschiedener Art

durch Messung dienen, indem sie das Verhältniss jeder solchen Grösse zu dem für alle Grössen derselben Art festgesetztem Maasse ausdrücken. Für die Gleichung an sich ist es nun zwar gleichgültig, wie man zur Bestimmung der einzelnen Zahlen gelangt, oder zur Bestimmung welcher Grössen einzelne Zahlen dienen; nur für uns, die wir durch die Gleichung ein Naturgesetz aussprechen wollen, ist es nicht gleichgültig.

Von den letzteren Zahlen nämlich ändern alle diejenigen, welche sich auf dasselbe Maass beziehen, mit diesem Maasse ihren Werth. Soll eine Zahl zur Bestimmung einer gewissen Grösse dienen, so muss ihr Werth verdoppelt werden, wenn das Maass mit einem halb so grossen Maasse vertauscht wird, und umgekehrt. Die Wahl des Maasses für jede Grössenart ist aber an sich willkührlich; die Geltung wahrer Naturgesetze darf offenbar von einer solchen der Willkühr überlassenen Wahl der Maasse nicht abhängig sein; folglich müssen Gleichungen, in denen wahre Naturgesetze ausgesprochen sein sollen, so beschaffen sein, dass sie auch für die durch Einführung neuer Maasse geänderten Zahlenwerthe gelten. Jede Gleichung, welche diese Bedingung nicht erfüllt, muss als Ausspruch eines Naturgesetzes verworfen werden.

Man bezeichnet diese Bedingung der Zulässigkeit einer Gleichung als Ausspruch eines Naturgesetzes als die Bedingung der Homogenität der Gleichung.

Hiernach lässt sich nun leicht die allgemeine Form homogener Gleichungen angeben. Jede Gleichung von Zahlen, die sich auf die Maasse verschiedenartiger Grössen $A, B, C \ldots$ beziehen, ist darstellbar in der Form:

$$F(a, a' \ldots b, b' \ldots c, c' \ldots) = 0.$$

Kann diese Gleichung in die Form gebracht werden:

$$F(\alpha a, \alpha a' \ldots \beta b, \beta b' \ldots \gamma c, \gamma c' \ldots) = 0,$$

so ist sie homogen; letztere ist also die allgemeine Form homogener Gleichungen.

Die Zahl der Faktoren $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ giebt *die Zahl der Bedingungen der Homogenität.* Eine grössere Zahl von Bedingungen beengt das Gebiet der homogenen Gleichungen, eine kleinere Zahl erweitert dasselbe; daher die Aufgabe, die Zahl der Bedingungen der Homogenität auf ein Minimum zu bringen, deren Lösung den Vorzug der *absoluten Messungen* von den relativen begründet, so wie auch den Vorzug eines *Maasssystems mit der kleinsten Zahl von Grundmaassen.* Absolute Messungen einer Art von Grössen sind diejenigen, durch welche alle Grössen dieser Art durch ihre Verhältnisse zu *einer und der nämlichen Grösse* derselben Art, welche das Maass genannt wird, bestimmt werden.

Hiernach ist die allgemeine Form der Zahlengleichungen, worin die verschiedenen Zahlen sich auf die Maasse verschiedenartiger Grössen beziehen, nach Reduktion derselben auf die geringste Zahl von Homogenitätsbedingungen, nämlich auf drei Homogenitätsbedingungen, welche nach dem aufgestellten Maasssysteme, entsprechend den drei Arten von Grundgrössen, *Längen, Zeiten* und *Massen,* möglich ist, nach der in diesem Systeme angewandten Bezeichnung der Zahlen, welche zur Bestimmung einzelner Grössen der drei Grundgrössenarten dienen, folgende:

$$F(r, r' \ldots t, t' \ldots m, m') = 0.$$

Diese Form ergiebt sich durch die Reduktion aller übrigen Zahlen, welche zur Bestimmung einzelner Grössen der übrigen Grössenarten dienen, nämlich die Zahlen $f, f' \ldots v, v' \ldots \varphi, \varphi' \ldots c, c' \ldots a, a' \ldots p, p' \ldots q, q' \ldots l, l' \ldots w, w', \ldots d, d' \ldots e, e' \ldots i, i' \ldots s, s' \ldots u, u' \ldots b, b' \ldots g, g' \ldots$ durch die im obigen Maasssystem enthaltenen Reduktionsformeln auf die Zahlen $r, r' \ldots t, t' \ldots$ und $m, m' \ldots$, nämlich:

$$f = rr,\quad f' = r'r' \ldots$$

$$v = r^3,\quad v' = r'^3 \ldots$$

$$\varphi = \frac{r_0}{r},\quad \varphi' = \frac{r'_0}{r'} \ldots$$

$$c = \frac{r}{t},\quad c' = \frac{r'}{t'} \ldots$$

$$a = \frac{c}{t} = \frac{r}{tt},\quad a' = \frac{r'}{t't'} \ldots$$

$$p = am = \frac{rm}{tt},\quad p' = \frac{r'm'}{t't'} \ldots$$

$$q = \frac{p}{f} = \frac{m}{rtt},\quad q' = \frac{m'}{r't't'} \ldots$$

$$l = rp \sin\varphi = \frac{rrm}{tt} \sin\frac{r_0}{r},\quad l' = \frac{r'r'm'}{t't'} \sin\frac{r'_0}{r'} \ldots$$

$$w = pc = \frac{rrm}{t^3},\quad w' = \frac{r'r'm'}{t'^3} \ldots$$

$$d = \frac{m}{v} = \frac{m}{r^3},\quad d' = \frac{m'}{r'^3} \ldots$$

$$e = \sqrt{prr} = \frac{1}{t}\sqrt{r^3 m},\quad e' = \frac{1}{t'}\sqrt{r'^3 m'} \ldots$$

$$i = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{lr^3}{\sin\varphi\sqrt{1+3\cos\psi^2}}} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{rm}{\sqrt{1+3\left(\cos\frac{r_0}{r}\right)^2}}},$$

$$i' = \frac{1}{t'}\sqrt{\frac{r'm'}{\sqrt{1+3\left(\cos\frac{r'_0}{r'}\right)^2}}} \ldots$$

$$s = \sqrt{\frac{lr^3}{\sin\varphi\sqrt{1+3\cos\psi^2}}} = \frac{1}{rrt}\sqrt{\frac{rm}{\sqrt{1+3\left(\cos\frac{r_0}{r}\right)^2}}},$$

$$s' = \frac{1}{r'r't'}\sqrt{\frac{r'm'}{\sqrt{1+3\left(\cos\frac{r'_0}{r'}\right)^2}}}\cdots$$

$$u = \frac{l}{s\sin\varphi} = \frac{1}{t^3}\sqrt{\frac{m\sqrt{1+3\left(\cos\frac{r_0}{r}\right)^2}}{r}},$$

$$u' = \frac{1}{t'^3}\sqrt{\frac{m'\sqrt{1+3\left(\cos\frac{r'_0}{r'}\right)^2}}{r'}}\cdots$$

$$b = \frac{fu}{t} = \frac{r}{t^4}\sqrt{rm\sqrt{1+3\left(\cos\frac{r_0}{r}\right)^2}},$$

$$b' = \frac{r'}{t'^4}\sqrt{r'm'\sqrt{1+3\left(\cos\frac{r'_0}{r'}\right)^2}}\cdots$$

$$g = \frac{b}{i} = \frac{r}{t^3}\sqrt{1+3\left(\cos\frac{r_0}{r}\right)^2},\; g' = \frac{r'}{t'^3}\sqrt{1+3\left(\cos\frac{r'_0}{r'}\right)^2},$$

worin die reinen Zahlen

$$\frac{r_0}{r},\; \frac{r'_0}{r'}\cdots \sin\frac{r_0}{r},\; \sin\frac{r'_0}{r'}\cdots\sqrt{1+3\left(\cos\frac{r_0}{r}\right)^2},\; \sqrt{1+3\left(\cos\frac{r'_0}{r'}\right)^2}\cdots$$

weggelassen werden können.

Zu bemerken ist hierbei, wie diese Reduktionen in der analytischen Mechanik überall Verwendung finden. In der analytischen Mechanik bezeichnen

x, y, z	die Koordinaten,
t	die Zeiten,
$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$	die Geschwindigkeiten in den Richtungen der Koordinaten,
$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$	die Beschleunigungen in den Richtungen der Koordinaten,
$\int dx\,dy\,dz$	die Räume,
ϱ	die Dichtigkeiten,
$\int\varrho\,dx\,dy\,dz$	die Massen,

$\int\varrho\frac{d^2x}{dt^2}\cdot dx\,dy\,dz,\; \int\varrho\frac{d^2y}{dt^2}dx\,dy\,dz,\; \int\varrho\frac{d^2z}{dt^2}dx\,dy\,dz$ die Kräfte nach den Richtungen der Koordinaten u. s. w.,

wo x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z Zahlen sind, welche bei festgestelltem Längenmaasse zur Bestimmung von *Längen*, t, dt Zahlen, welche bei festgesetztem Zeitmaasse zur Bestimmung von *Zeiten*, und ϱ Zahlen, die bei festgesetztem Dichtigkeitsmaasse zur Bestimmung von *Dichtigkeiten* dienen. Es werden also nach der Bezeichnungsweise der analytischen Mechanik Grössen aller Art dargestellt als direkt oder indirekt bestimmt durch Messungen von *drei Grössenarten*, nämlich *Längen, Zeiten* und *Dichtigkeiten*, oder, $\varrho = dm/[dx\,dy\,dz]$ gesetzt, wo dm Zahlen sind, welche bei festgestelltem Massenmaasse zur Bestimmung von *Massen* dienen, durch Messungen von *Längen, Zeiten* und *Massen*, ganz entsprechend den Bestimmungen des oben aufgestellten Maasssystems.

Nachdem die allgemeine Zahlengleichung, welche zum Ausspruch eines Naturgesetzes dienen soll, in die Form gebracht ist

$$F(r, r' \ldots t, t' \ldots m, m' \ldots) = 0,$$

so leuchtet ein, dass sie den Bedingungen der Homogenität nur dann genügt, wenn sie in die Form gebracht werden kann

$$F(\varrho r, \varrho r' \ldots \tau t, \tau t' \ldots \mu m, \mu m' \ldots) = 0$$

wo ϱ, τ, μ beliebige Koëffizienten bezeichnen. Hieraus ergiebt sich leicht die Bedeutung dieser Bedingungen. Zum Beispiel ergiebt sich, dass der Fall gar nicht vorkommen kann, dass in obiger Zahlengleichung für eine der drei Grössenarten nur *eine* einzige Zahl vorkommt, z. B.

$$F(r, t, t' \ldots m, m' \ldots) = 0.$$

Um der Bedingung der Homogenität zu genügen, muss in der Gleichung von der ersten Grössenart ausser der Zahl r nothwendig wenigstens noch eine Zahl r' vorkommen, die aber $= 1$ und daher als Faktor in der Zahlengleichung weggelassen sein könnte. Es würde sich das daran zeigen, dass die Gleichung in die Form gebracht werden könnte,

$$F(\varrho r, \varrho, t, t' \ldots m, m' \ldots) = 0.$$

Ferner ergiebt sich für den Fall, wo in obiger Zahlengleichung für eine der drei Grössenarten nur *zwei* Zahlen vorkommen, z. B.

$$F(r, r' \ldots t, t' \ldots m, m' \ldots) = 0,$$

das Verhältniss dieser beiden Zahlen r'/r eine Funktion blos von den Grössen der übrigen Arten sein müsse (blos eine Funktion von $t, t' \ldots m, m' \ldots$), wodurch man oft, bei Aufsuchung von Naturgesetzen einen wichtigen Leitfaden erhält

Schlussbemerkung über Maasssysteme mit einem Grundmaasse.

Nach den Gesetzen der Geometrie und Mechanik gab es keinen Zusammenhang zwischen *Raum, Zeit* und *Körper,* und es waren daher, der Zahl dieser von einander unabhängigen Elemente entsprechend, in einem blos auf die Gesetze der Geometrie und Mechanik begründeten Maasssysteme *drei Grundmaasse* nothwendig.

Eine so gänzliche Unabhängigkeit jener drei Elemente von einander findet nach den Gesetzen der Physik nicht statt; denn nach dem *Gravitationsgesetze* bedingen ponderabele Körper und deren Raumverhältnisse gewisse Kräfte, die nicht unabhängig von der Zeit gedacht werden können, wodurch ein Zusammenhang von *Raum, Zeit* und *Körper* gegeben ist. Ebenso bedingen nach *elektrischem Grundgesetze* elektrische Massen nebst deren Raumverhältnisse und Bewegungen gewisse Kräfte, wodurch ebenfalls ein Zusammenhang zwischen *Raum, Zeit* und *Körper* gegeben ist. Mit Zuziehung dieser Gesetze ergiebt sich, dass in einem auf die Gesetze der *Geometrie, Mechanik* und *Physik* begründeten Maasssysteme nur *ein einziges Grundmaass* nothwendig ist.

Mit Zuziehung des *ersten* dieser beiden Gesetze, nämlich des *Gravitationsgesetzes,* ergab sich, wie oben angeführt worden, dass für alle ponderabelen Körperpaare der Quotient

$$\frac{arr}{m} = \frac{a'r'r'}{m'} = \text{etc.}$$

einen konstanten Werth hatte, und dass, wenn ein solches gravitirendes Körperpaar als *normales* festgestellt ward,

$$\frac{arr}{m} = 1 \quad \text{oder} \quad m = arr$$

erhalten wurde.

Mit Zuziehung des *zweiten* von diesen beiden Gesetzen, nämlich des *elektrischen Grundgesetzes,* gelangt man auf gleiche Weise noch zu einem andern Resultate.

Das elektrische Grundgesetz.

Durch die allgemeine Mechanik sind die Gesetze der Ruhe und Bewegung für jedes Massentheilchen gegeben, wenn die Kraft bekannt ist, welche in jedem Augenblicke auf das Massentheilchen wirkt. Resultirt nun diese Kraft aus *Wechselwirkungen* zwischen diesem Massentheilchen und jedem der anderen Massentheilchen, und ist *jede dieser Wechselwirkungen unabhängig von der anderen;* so wird die Kraft

bekannt sein, welche in jedem Augenblicke auf das Massentheilchen wirkt, sobald *das Gesetz der Wechselwirkung je zweier Massentheilchen für sich,* ganz abgesehen von der Existenz aller übrigen Massentheilchen, gegeben ist. Es werden auf diese Weise die *einzelne Massentheilchen* betreffenden Principien von denjenigen Principien, welche *Paare von Massentheilchen* betreffen, vollkommen geschieden.

Existiren aber zwei Massentheilchen für sich ganz allein im Raume, so giebt es in jedem Augenblicke nur *eine bestimmbare Entfernung,* nämlich die Entfernung der beiden Massentheilchen von einander, und nur *eine bestimmbare Geschwindigkeit,* nämlich die Geschwindigkeit, mit welcher die beiden Massen entweder sich einander nähern oder von einander entfernen.

Soll nun einem solchen ganz allein vorhandenen *Paare* von Massentheilchen eine ihrer Grösse nach *bestimmbare Arbeit* zugeschrieben werden, so muss unter Arbeit eine dem Quadrate dieser *relativen* Geschwindigkeit beider Theilchen proportionale Grösse verstanden werden. Das Quadrat dieser relativen Geschwindigkeit, mit einem von den beiden Massentheilchen abhängigen Faktor[1]) multiplicirt, möge daher die *Arbeit des Paares* genannt werden. Das Quadrat dieser relativen Geschwindigkeit selbst, d. i. der Quotient der *Arbeit des Paares* dividirt durch den von beiden Massentheilchen abhängigen Faktor, könnte die *specifische Arbeit des Paares* heissen.

Der Ausspruch des *Gravitationsgesetzes,* wie er von Newton gegeben ist, ist von der *Arbeit des ponderabelen Massenpaares* unabhängig. Der Ausspruch des *Gesetzes der Wechselwirkung je zweier elektrischen Massentheilchen für sich,* ganz abgesehen von der Existenz aller übrigen Massentheilchen, lässt sich auf zwei Arten geben, die ihrer Einfachheit wegen beide hier angeführt werden mögen. Von diesen beiden Aussprüchen ist der eine von der *Arbeit des elektrischen Massenpaares* wesentlich abhängig, der andere nicht.

Erster Ausspruch.

Ist das Gesetz zur Bestimmung der *Kraft,* mit welcher zwei *elektrische Massentheilchen* e und ε, in der Entfernung r und bei der relativen Geschwindigkeit dr/dt und bei der relativen Beschleunigung d^2r/dt^2, einander wechselseitig abstossen, durch folgenden Ausdruck gegeben:

[1]) Wenn es auch einer näheren Bestimmung dieses Faktors hier nicht bedarf, so erkennt man doch leicht, dass dafür das halbe Produkt der beiden Massen dividirt durch ihre Summe zu setzen ist.

$$\frac{e\varepsilon}{rr}\left(1-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{2r}{c^2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}\right);$$

so folgt daraus das Gesetz zur Bestimmung des *Potentials,* wie es schon in POGGENDORFF's Annalen, 1848, Bd. 73, S. 229,[1]) angegeben worden ist, nämlich folgender Ausdruck des *Potentials:*

$$\frac{e\varepsilon}{r}\left(1-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}\right).$$

Es kann dieses Potential das *Potential des Paares* genannt werden, worunter diejenige Funktion des *Abstandes beider Theilchen* und der *Arbeit des Paares* (beide als Funktionen der Zeit betrachtet) verstanden wird, deren Differentialquotient in Beziehung auf den Abstand die wechselseitige Anziehungskraft beider Theilchen ausdrückt.

Es folgt daraus unmittelbar, dass, wenn die *Arbeit des Paares* $=0$ ist, das *Potential des Paares,* für den vorhandenen Abstand r der beiden Theilchen, ein Maximum ist, und dass, wenn umgekehrt das *Potential des Paares* $=0$ ist, die *Arbeit des Paares* einen vom Abstande beider Theilchen ganz unabhängigen *konstanten Werth* habe, nämlich denjenigen, welchen man für die *Arbeit des Paares* erhält, wenn man das Quadrat der relativen Geschwindigkeit der beiden Theilchen dem Werthe der in obigem Gesetze enthaltenen *Konstanten* c^2 gleich setzt.

Nennt man das Quadrat der relativen Geschwindigkeit beider Theilchen, wie oben angegeben, *die specifische Arbeit des Paares,* so kann für alle elektrischen Theilchen das Gesetz ausgesprochen werden, dass die *specifische Arbeit aller Paare,* deren Potentiale $=0$ sind, gleich sei, nämlich $=c^2$.

Hiernach kann endlich das allgemeine Gesetz zur Bestimmung des *Potentials jeden Paares* auf folgende Weise ausgesprochen werden:

> Drückt man die *specifische Arbeit des Paares,* in Theilen des Normalwerths c^2, durch mc^2 aus, so wird das *Potential des Paares,* in Theilen seines Maximums $e\varepsilon/r$, durch $(1-m)[e\varepsilon/r]$ ausgedrückt,

oder, mit anderen Worten, der am Normalwerth der specifischen Arbeit fehlende Theil wird immer durch einen gleichen Theil des Potential-Maximums ersetzt, oder der am Potential-Maximum fehlende Theil wird immer durch einen gleichen Theil des Normalwerths der specifischen Arbeit ersetzt.

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. III, p. 225.]

Zweiter Ausspruch.

Dasselbe Gesetz kann nun auch, wie NEUMANN bewiesen hat, auf folgende Weise ausgesprochen werden:

Von dem elektrischen Theilchen e zur Zeit t am Orte A resultirt für ein anderes elektrisches Theilchen ε, zur Zeit $t+\vartheta$ an einem um $c\vartheta$ von A entfernten Orte, das Potential $e\varepsilon/c\vartheta$ zur Zeit $t+\vartheta$.

> $e\varepsilon/r$ ist das *Potential*, mit welchem ein elektrisches Theilchen e, zur Zeit t am Orte A, auf ein anderes elektrisches Theilchen ε, zur Zeit $t+[r/c]$ an einem um r von A entfernten Orte, zur Zeit $t+[r/c]$ wirkt.

Siehe „Die Principien der Elektrodynamik. Eine mathematische Untersuchung von Dr. CARL NEUMANN". Tübingen 1868.

Mit Zuziehung dieses elektrischen Grundgesetzes bei dem auf die Gesetze der *Geometrie, Mechanik* und *Physik* zu begründenden Maasssysteme kann nun ebenfalls die Zahl der nothwendigen Grundmaasse noch um *eines* vermindert werden.

Es haben nämlich nach obigem Grundgesetze für alle elektrischen Massenpaare eE und εE, $e'E$ und $\varepsilon'E$, u. s. w., wenn man die Entfernungen der Massen der einzelnen Paare resp. mit rR, $r'R$ u. s. w., die relativen Geschwindigkeiten der Massen der einzelnen Paare resp. mit γC, $\gamma' C$ u. s. w., und die Potentiale der einzelnen Paare resp. mit vV, $v'V$ u. s. w. bezeichnet, die für die einzelnen Paare berechneten Quotienten, resp. aus den Zahlen e, ε, r, γ, v oder e', ε', r', γ', v' u. s. w., nämlich die Quotienten $e\varepsilon\gamma\gamma/(e\varepsilon-rv)$, $e'\varepsilon'\gamma'\gamma'/(e'\varepsilon'-r'v')$ u. s. w. einen konstanten Werth, oder es ist

$$\frac{e\varepsilon\gamma\gamma}{e\varepsilon-rv}=\frac{e'\varepsilon'\gamma'\gamma'}{e'\varepsilon'-r'v'}=\text{u. s. w.}$$

Wird nun als *normales elektrisches Massenpaar* ein solches festgestellt, dessen Potential $=0$ ist, und wird die relative Geschwindigkeit seiner beiden Massen gegen einander, $=c$, zum Geschwindigkeitsmaasse genommen, was zu thun gestattet ist, so erhält man für jedes elektrische Massenpaar

$$\frac{e\varepsilon\gamma\gamma}{e\varepsilon-rv}=1 \quad \text{oder} \quad v=\frac{e\varepsilon}{r}(1-\gamma\gamma).$$

Nach der Definition des Potentials vV ist, wenn pP die Kraft bezeichnet, welche aus der Wechselwirkung der beiden elektrischen Massen resultirt,

$$\frac{dv}{dr} = p, \text{ also } v = \int p\,dr.$$

Bezeichnet man den Mittelwerth von p für alle Elemente dr, auf welche sich das Integral erstreckt, mit p', und die Summe aller Elemente dr mit r, so ist

$$v = p'r \quad \text{und} \quad p' = \frac{e\varepsilon}{rr}(1 - \gamma\gamma),$$

oder, mit Rücksicht darauf, dass p, e und c ganz beliebige Zahlenwerthe erhalten können, also auch die Werthe p', ε, γ,

$$p = \frac{ee}{rr}(1 - cc).$$

Fügt man nun die beiden gefundenen neuen Gesetze zur Berechnung der Zahlen m und p, die zur Bestimmung einzelner Massen- und Gewichtsgrössen dienen, aus anderen Zahlen, die zur Bestimmung einzelner Grössen anderer Art dienen, in der oben gegebenen Uebersicht verschiedener Grössenarten und der Bezeichnungen ihrer Maasse und Zahlen, welche zur Bestimmung einzelner Grössen jeder Art dienen, den daselbst schon angeführten Gesetzen, nach welchen einige dieser Zahlen aus anderen berechnet werden können, noch hinzu, so erhält man folgende vervollständigte Tafel.

Grössenart	Maass	Zahl	Gesetz
Längen	R	r	
Flächen	F	f	$= rr$
Räume	V	v	$= r^3$
Winkel	Φ	φ	$= \frac{r_0}{r}$
Zeiten	T	t	
Geschwindigkeiten	C	c	$= \frac{r}{t}$
Beschleunigungen	A	a	$= \frac{c}{t}$
Massen	M	m	$= arr$
Kräfte	P	p	$= am = \frac{ee}{rr}(1 - cc)$
Drucke	Q	q	$= \frac{p}{f}$
Kraftmomente	L	l	$= rp \sin\varphi$
Arbeitsintensitäten	W	w	$= pc$
Dichtigkeiten	D	d	$= \frac{m}{v}$

Grössenart	Maass	Zahl	Gesetz
Elektrische Massen	E	e	$= r\sqrt{p}$
Stromintensitäten	I	i	$= \frac{1}{f}\sqrt{\frac{lr^3}{\sin\varphi\sqrt{1+3\cos\psi^2}}}$
Magnetismus	S	s	$= \sqrt{\frac{lr^3}{\sin\varphi\sqrt{1+3\cos\psi^2}}}$
Erdmagnetismus	U	u	$= \frac{l}{s\sin\varphi}$
Elektromotorische Kräfte	B	b	$= \frac{fu}{t}$
Galvanische Widerstände	G	g	$= \frac{b}{i}.$

Da in dieser Zusammenstellung zwei Grössenarten vorkommen, für welche kein Gesetz vorliegt, um die zur Bestimmung einer einzelnen Grösse dienende Zahl zu berechnen, nämlich Längen und Zeiten, dagegen eine Grössenart, für welche zwei solche Gesetze vorliegen, nämlich Kräfte, so leuchtet aus der bei der früheren Zusammenstellung schon gemachten Bemerkung leicht ein, dass jetzt nur noch *eine* Grössenart übrig bleibt, für welche ein Grundmaass zu wählen ist, dass aber die Grössenart selbst, für welche das Grundmaass zu wählen ist, durch die Natur der Sache nicht bestimmt werde, folglich nach Gründen praktischer Zweckmässigkeit zu bestimmen sei. Nach den schon oben angeführten Zweckmässigkeitsgründen würde dabei zwischen den Grössenarten der *Längen, Zeiten* und *Massen* zu entscheiden übrig bleiben. Wir wollen uns hier zunächst an die *Längen* halten, doch wird sich ergeben, dass die *Längen* auch mit den *Zeiten* oder *Massen* vertauscht werden können, ohne Einfluss auf die Resultate.

Wird also für die *Längen* ein Grundmaass R gewählt, so giebt die Reduktion aller übrigen Zahlen, welcher zur Bestimmung einzelner Grössen der übrigen Grössenarten dienen, nämlich der Zahlen f, f'.. v, v'.. φ, φ'.. t, t'.. c, c'.. a, a'.. m, m'.. p, p'.. q, q'... l, l'.. w, w'.. d, d'.. e, e'.. i, i'.. s, s'... b, b'.. g, g'.. nach obigen Formeln, mit Weglassung aller reinen von der Wahl des Grundmaasses unabhängigen Zahlen, folgende Gleichungen, denen die identischen Gleichungen $r = r$, $r' = r'$ vorausgeschickt ist:

$$\begin{array}{ll} r = r & r' = r' \\ f = rr & f' = r'r' \\ v = r^3 & v' = r'^3 \\ \varphi = 1 & \varphi' = 1 \\ t = r & t' = r' \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
c = 1 & c' = 1 \\
a = \frac{1}{r} & a' = \frac{1}{r'} \\
m = r & m' = r' \\
p = 1 & p' = 1 \\
q = \frac{1}{rr} & q' = \frac{1}{r'r'} \\
l = r & l' = r' \\
w = 1 & w' = 1 \\
d = \frac{1}{rr} & d' = \frac{1}{r'r'} \\
e = r & e' = r' \\
i = 1 & i' = 1 \\
s = rr & s' = r'r' \\
u = \frac{1}{r} & u' = \frac{1}{r'} \\
b = 1 & b' = 1 \\
g = 1 & g' = 1
\end{array}
$$

In den verschiedenen Gleichungen können r, r', wie sich von selbst versteht, verschiedene Werthe haben.

Dabei sind Zahlen, welche bei r mal kleinerem Längenmaasse

ihren Werth behalten	r mal grösser werden	rr mal grösser werden	r^3 mal grösser werden	r mal kleiner werden	rr mal kleiner werden
φ Winkel	r Längen	f Flächen	v Räume	a Beschleunigungen	q Drucke
c Geschwindigk.	t Zeiten	s Nadelmagnet.		u Erdmagnetismus	d Dichtigkeiten
p Kräfte	m Massen				
w Arbeitsintens.	l Kraftmoment				
i Stromintens.	e elektr. Masse				
b elektrom. Kraft					
g galv. Widerst.					

Hieraus ergiebt sich bei Anwendung des Maasssystems mit einem Grundmaasse die Regel, dass alle Gleichungen, deren Glieder Produkte von Potenzen von *Längen-*, *Zeit-* und *Massengrössen* sind, homogen sind, wenn die Summe der Exponenten aller dieser Potenzen in jedem Gliede dieselbe ist.

Wird, statt eines Grundmaasses R für die Längen, ein Grundmaass T für die Zeiten, oder ein Grundmaass M für die Massen gewählt, so giebt die Reduktion aller übrigen Zahlen ein System von Gleichungen, welches aus obigem erhalten wird blos durch Vertauschung von r mit t,

r' mit t' etc., oder welches aus obigem erhalten wird durch Vertauschung von r mit m, r' mit m' etc.

Jede als Ausspruch eines Naturgesetzes aufgestellte Gleichung wird nun, nachdem alle auf Maasse verschiedenartiger Grössen sich beziehende Zahlen, mit Hülfe der durch das eben betrachtete Maasssystem gegebenen Formeln, auf Zahlen, die sich entweder auf gar kein Maass oder blos auf das Längenmaass beziehen, reducirt worden sind, in folgender Form dargestellt werden:

$$F(r, r' \ldots) = 0,$$

welche der Bedingung der Homogenität entspricht, wenn sie in die Form gebracht werden kann:

$$F(\varrho r, \varrho r' \ldots) = 0$$

worin $r . r' \ldots$ von der Wahl des Maasses unabhängige Zahlen, ϱ dagegen ein von der Wahl des Maasses abhängiger Koëfficient ist. Soll nun die letztere Gleichung für jeden beliebigen Werth von ϱ gelten, so ergiebt sich leicht, dass

$$F(\varrho r, \varrho r') = \varrho^{\mu} F(r, r' \ldots)$$

sein müsse; es muss nämlich, wenn man $F(r, r' \ldots)$ nach Potenzen von $r, r' \ldots$ entwickelt, das allgemeine Glied die Form

$$N . r^{\alpha} . r'^{\beta} \ldots .$$

haben, und darin muss die Summe der Exponenten

$$\alpha + \beta + \ldots = \mu$$

in allen Gliedern gleich sein. Durch Division mit ϱ^{μ} geht also

$$F(\varrho r, \varrho r' \ldots) = 0$$

in eine reine, von der Wahl des Maasses ganz unabhängige Zahlengleichung über, nämlich in die Gleichung

$$F(r, r' \ldots) = 0,$$

worin $r, r' \ldots$ von der Wahl des Maasses unabhängige Zahlen sind.

Die theoretische Bedeutung des betrachteten Maasssystems mit einem einzigen Grundmaasse liegt demnach darin, dass wenn alle verschiedenartigen Grössen nach diesem Maasssystem dargestellt werden, alle Naturgesetze in Zahlengleichungen dargestellt werden können, worin der Werth keiner Zahl von der willkührlichen Wahl des Maasses irgend einer Grössenart abhängt.

Wenn nun auch dieses auf ein einziges Grundmaass reducirte Maasssystem ausserdem von keiner praktischen Bedeutung ist, aus dem schon angeführten Grunde, weil nämlich die dabei vorausgesetzten Methoden indirekter Messung keine hinreichende Genauigkeit gestatten; so ist es doch von Interesse, die Werthe der drei Grundmaasse des praktisch angenommenen französischen Maasssystems, also des *Millimeters*, der *Sekunde* und des *Milligramms* in den Maassen jenes Systems so genau zu bestimmen, als die vorhandenen, durch die erwähnten indirekten Messungen erhaltenen Bestimmungen es gestatten. Man findet danach

$$\text{die Länge eines Millimeters} = n \,.\, R,$$
$$\text{die Zeit einer Sekunde} = 43945 \,.\, 10^7 .\, n \,.\, T,$$
$$\text{die Masse eines Milligramms} = \frac{1}{2759 \,.\, 10^{27}} \cdot n \,.\, M,$$

wonach die Erdmasse $= 5954 \,.\, 10^{27}$ Milligramm etwas mehr als das Doppelte von nM beträgt. n kann einen beliebigen Werth erhalten, wodurch es möglich wird, dem gewählten Grundmaasse, sei es für *Längen, Zeiten* oder *Massen,* jede beliebige Grösse zu geben.

Wählt man zum einzigen nothwendigen Grundmaass *das Millimeter für Längen,* so ist $n = 1$; wählt man die *Sekunde für Zeiten,* so ist $43945 \,.\, 10^7 .\, n = 1$; wählt man das *Milligramm für Massen,* so ist $2759 \,.\, 10^{27} = n$.

Bemerkungen zu der Abhandlung: „Untersuchung über den galvanischen Lichtbogen“ von Prof. E. Edlund.[1])

Herr Professor Edlund in Stockholm hat im 131. Bande von Poggendorff's Annalen interessante Versuche und Messungen, welche den *galvanischen Lichtbogen* betreffen, mitgetheilt. Durch einen für diese Versuche besonders eingerichteten Rheostaten konnte er nämlich die durch eine Tangentenboussole gemessene Stromstärke einer Bunsen'schen Säule von 70 bis 80 Elementen konstant erhalten, auch wenn die zur Schliessung der Kette dienenden Kohlenspitzen ausser Kontakt und in verschiedene Entfernungen von einander gebracht wurden, wobei zwischen ihnen der galvanische Lichtbogen entstand. Bei jeder Vergrösserung der Entfernung musste eine Verminderung des Rheostatenwiderstands, bei jeder Verminderung der Entfernung eine Vergrösserung des Rheostatenwiderstands erfolgen; abgesehn vom Vorzeichen ergab sich aber aus den Messungen die Grösse der Entfernungsänderung der Grösse der Widerstandsänderung des Rheostaten sehr nahe proportional. Hiernach setzt Herr Edlund den wirklichen Widerstand in dem einer Entfernungsänderung der beiden Kohlenspitzen zugehörigen Stromstücke der entsprechenden Widerstandsänderung des Rheostaten gleich.

Bei allmähliger Annäherung der beiden Kohlenspitzen bis zum Kontakt ergab sich aber im Augenblicke, wo der Kontakt eintrat, ausserdem noch eine plötzliche Widerstandsverminderung, welche durch eine erhebliche Vergrösserung des Rheostatenwiderstands kompensirt werden musste, welche Herr Edlund von jenem *wirklichen* Widerstande des Stromstückes zwischen den beiden Kohlenspitzen unterscheidet, weil er mit der Länge dieses Stromstückes in keiner Beziehung steht. Herr Edlund betrachtet dieselbe nur als eine *scheinbare* Widerstandsänderung, welche in einer *für die gemessene Stromstärke äquivalenten Aenderung der elektromotorischen Kraft* ihren Grund habe. Es leuchtet ein, dass

[1]) [Dieser Aufsatz, welchen W. Weber nach dem Lesen von Edlund's Abhandlung niedergeschrieben hat, fand sich im Nachlass ohne Ueberschrift.]

diese Aenderung der elektromotorischen Kraft in den Kohlenspitzen eintreten muss, in dem Augenblicke, wo der Kontakt aufgehoben wird.

Die Erforschung dieser in den Kohlenspitzen in dem Augenblick der Aufhebung des Kontakts eintretenden elektromotorischen Kraft bildet nun das Hauptziel der weiteren von Herrn Edlund ausgeführten Untersuchung, wobei ihm als Leitfaden dient, dass, wenn E die elektromotorische Kraft der Bunsen'schen Säule und L den Widerstand der ganzen Kette bezeichnet, die Stromarbeit oder ihr Aequivalent durch $E.[E/L]$ dargestellt werde. Kommt nun in dem Augenblicke, wo der Kontakt aufgehoben wird, die der elektromotorischen Kraft E entgegengesetzte Kraft D, welche in den Kohlenspitzen ihren Sitz hat, hinzu, so würde der Strom, der bei dem Kontakt $= E/L$ war, um D/L vermindert werden, und auf gleiche Weise würde die eigentliche Stromarbeit von $E.[E/L]$ auf $(E-D).[(E-D)/L]$ heruntersinken.

Mit Recht führt dagegen Herr Edlund Thatsachen und Gesetze an, wonach eine solche Verminderung der Stromarbeit bei fortdauerndem Strome nach Aufhebung des Kontaktes nicht stattfinde und vergleicht daher diese Erscheinung mit den Erscheinungen der Dämpfung, wo der Dämpfer durch die von ihm auf die geschlossene Kette des ursprünglichen Stroms ausgeübte elektromotorische Kraft zwar die Arbeit des ursprünglichen Stroms vermindert, wofür aber die Arbeit des im Dämpfer selbst inducirten Stroms ein Aequivalent giebt. Ein solches Aequivalent, meint Herr Edlund, biete hier die zum Abreissen von Kohlentheilchen erforderliche Arbeit dar, von denen der Lichtbogen herrührt.

Indem ich nun Herrn Edlund in den beiden Hauptpunkten vollkommen beistimme, nämlich *erstens*, dass im Augenblicke der Aufhebung des Kontaktes eine der elektromotorischen Kraft der Säule E entgegengesetzte Scheidungskraft D an den Kohlenspitzen hinzukomme, und *zweitens*, dass die Summe der im Lichtbogen verrichteten Arbeit und der Stromarbeit der übrigen Kette der Stromarbeit $E.[E/L]$ gleich sei, welche die Bunsen'sche Säule während des Kontaktes leistet, so scheint doch zur Vermeidung jeden Widerspruchs ein dritter Punkt noch nähere Erwägung zu verdienen.

Ist nämlich die elektromotorische Kraft der Bunsen'schen Säule die einzige, welche in der *geschlossenen* Kette vom Widerstande L bisher gewirkt hat, kommt aber im Augenblicke der Aufhebung des Kontaktes die elektromotorische Kraft $= -D$ hinzu, so würde, wenn die Kette bei unverändertem Widerstande L auch nach Aufhebung des Kontaktes als *geschlossen* zu betrachten wäre, der Werth der bisherigen Stromarbeit $E.[E/L]$ von nun an nothwendig auf $(E-D).[(E-D)/L]$ herabsinken müssen, ohne irgend ein Aequivalent für diesen Verlust, gerade so, wie wenn man in die frühere Kette von der Kraft E noch

einen Becher mit verschwindend kleinem Widerstande von der Kraft D *verkehrt* eingeschaltet hätte.

Da nun aber, wenn man die Arbeit in der Kette und im Lichtbogen zusammenfasst, eine solche Arbeitsverminderung in der That nicht eintritt, so leuchtet ein, dass zur Beseitigung des Widerspruchs näher erörtert werden muss, ob die Kette nach Aufhebung des Kontakts wirklich noch *geschlossen* sei und ob daher dem zwischen beiden Kohlenspitzen liegenden Stromstücke ein *wirklicher* Widerstaud zukomme, wie Herr Edlund ihn bestimmt hat, indem unter *wirklichen Widerstand eines Leiters* das konstante Verhältniss der in diesem Leiter wirkenden elektromotorischen Kraft zu der Stärke des dadurch im Leiter hervorgebrachten Stroms verstanden wird.

Meines Erachtens existirt nach aufgehobenem Kontakte keine geschlossene Kette und kein wirklicher Widerstand für das Stromstück zwischen den ausser Kontakt getretenen Kohlenspitzen, weil ein solcher Widerstand nur einem wirklichen Leiter zukommt, der zwischen den Kohlenspitzen nicht vorhanden ist.

Ich unterscheide nämlich zwischen einem *geschlossenen elektrischen Strome* und einer *geschlossenen galvanischen Kette,* indem zwar jede geschlossene galvanische Kette auch einen geschlossenen Strom bildet, aber nicht umgekehrt jeder geschlossene Strom eine geschlossene galvanische Kette. Das Ohm'sche Gesetz nämlich, wonach die Stromstärke durch den Quotienten E/L (wenn E die elektromotorische Kraft, L den Widerstand bezeichnet) dargestellt wird, gilt blos für *geschlossene galvanische Ketten* (d. i. für elektrische Ströme in geschlossenen Leitern) aber keineswegs für geschlossene Ströme *ohne geschlossenen Leiter.*

Dies vorausgesetzt handelt es sich wesentlich darum, was die von Herrn Edlund als *wirklicher* Widerstand des Stromstücks zwischen den Kohlenspitzen bezeichnete und gemessene Grösse sei. Ich betrachte sie ebenfalls nur als einen *scheinbaren* Widerstand, der seinen Grund in einer *für die gemessene Stromintensität äquivalenten elektromotorischen Kraft* habe.

Herr Edlund bezeichnet den *wirklichen* (der Entfernung der Kohlenspitzen proportionalen) Widerstand für die Einheit der Entfernung mit b, den *scheinbaren* Widerstand mit a und setzt, weil a seinen Grund in einer elektromotorischen Kraft $= -D$ habe, die Stromintensität $= (E-D)/(M+nb)$, wenn n die Entfernung der Kohlenspitzen bezeichnet, statt sie $= E/(a+nb)$ zu setzen, wie es sein müsste, wenn a ein wirklicher Widerstand, wie nb, wäre. Statt dessen setze ich die Stromintensität $= (E-D)/M$, weil ich den Grund des ganzen *scheinbaren* Widerstands $a+nb$ in der elektromotorischen Kraft $-D$ suche.

Herr Edlund findet nach seiner Rechnung die elektromotorische

Kraft D, ausgedrückt in Theilen der elektromotorischen Kraft der Säule, nahezu konstant, nämlich

$$D = 0,3239;$$

ich finde dieselbe dagegen nach meiner Rechnung nahezu mit der Länge des Lichtbogens proportional wachsend, nämlich

Länge des Lichtbogens in Skalentheilen	D
5	0,377
4	0,371
3	0,362
2	0,355
1	0,349.

Der wesentliche Punkt, der bei dieser verschiedenen Rechnung in Betracht kommt, ist der, dass Herr Edlund nach seiner Rechnung für die elektromotorische Kraft D eine neue unbekannte Quelle suchen muss; nach meiner Rechnung ergiebt sich die Quelle dieser elektromotorischen Kraft von selbst und mit Nothwendigkeit aus den Gesetzen der Vertheilung der Elektricität in einer ungeschlossenen galvanischen Kette.

Denn bei einer geschlossenen galvanischen Kette ist die Strombahn von einer Oberfläche umhüllt, auf welcher eine solche Vertheilung freier Elektricität stattfindet, dass dadurch in allen Stromelementen das Verhältniss der elektromotorischen Kraft zum Widerstand ausgeglichen wird; bei einer ungeschlossenen galvanischen Kette umhüllt dagegen die mit freier Elektricität geladene Oberfläche auch die beiden Enden der Kette, welche ausser Kontakt gebracht worden sind, gerade so wie bei einer Selbstentladungsflasche die positive und negative Ladung auch über die einander zugewendeten, durch einen kleinen Zwischenraum getrennten Oberflächen der beiden Knöpfe des Funkenmikrometers sich erstreckt.

Diese auf der Oberfläche vertheilte Elektricität spielt aber bei ungeschlossener Kette eine ganz andere Rolle als bei geschlossener Kette, bei letzterer hat sie auf den Werth der ganzen elektromotorischen Kraft E gar keinen Einfluss, weil der Integralwerth der von jedem Theilchen auf alle Elemente einer *geschlossenen* Linie nach der Richtung derselben ausgeübten elektromotorischen Kräfte bekanntlich gleich Null ist. Der Intregralwerth der von jedem Theilchen auf alle Elemente einer *nicht geschlossenen* Linie (die die ungeschlossene Kette bildet) nach der Richtung derselben ausgeübten elektromotorischen Kräfte ist aber von Null verschieden und hat daher auf den Werth der ganzen elektromotorischen Kraft E sehr grossen Einfluss, so dass bei dem

elektrischen Gleichgewichte (wenn die ungeschlossene galvanische Kette von einem vollkommenen Isolator umgeben ist), der Werth von E ganz aufgehoben wird.

Wie bei einer Selbstentladungsflasche die Ladungen der Knöpfe zwar im Augenblicke einer Selbstentladung verschwinden können, aber bei fortdauernder Verbindung der Flasche mit der Elektrisirmaschine immer neu entstehen, so auch bei der galvanischen Kette, wenn zwischen den ausser Kontakt gebrachten Enden Funken überschlagen und den Lichtbogen bilden. Auch wenn eine *kontinuirliche* Entziehung von Elektricität von beiden Enden auf irgend eine andere Weise als durch einen *die Kette schliessenden Leiter* stattfände, würden diese Ladungen und ihr Einfluss auf den Werth der ganzen elektromotorischen Kraft E nicht verschwinden.

Würde den beiden Enden kontinuirlich (auf irgend eine andere Weise als durch eine die Kette schliessenden Leiter) eine solche Menge Elektricität entzogen, die sich zu der bei hergestelltem Kontakte durch den Querschnitt der Kette gehenden Menge verhielte wie $n:1$, so würde auf der Oberfläche der ungeschlossenen Kette eine solche Vertheilung der Elektricität sich bilden, dass in allen Elementen der Kette das Verhältniss der elektromotorischen Kraft zum Widerstand wie $nE:L$ wäre, so dass die ganze elektromotorische Kraft in der ganzen Länge der Kette L gleich nE nur ein Bruchtheil der elektromotorischen Kraft der Säule wäre, während der Rest der letzteren, nämlich $(1-n)E$, durch Einfluss der elektrischen Vertheilung auf der Oberfläche des ungeschlossenen Leiters ganz aufgehoben wäre. Die elektrische Ladung der Oberfläche der galvanischen Kette nach aufgehobenem Kontakt übt also die elektromotorische Kraft $-(1-n)E$ aus, dieselbe, welche oben mit $-D$ bezeichnet worden ist.

Von dem Process im Lichtbogen, durch welchen den beiden ausser Kontakt gebrachten Enden der galvanischen Kette fortwährend Elektricität entzogen wird, ist nur so viel bekannt, dass er durch keinen die Kette schliessenden Leiter vermittelt wird. Man denke sich nun diesen Process darin bestehend, dass ein kleiner Konduktor zwischen den ausser Kontakt gebrachten Enden pendulire. Vorausgesetzt, dass auf diesen Konduktor keine andere Kraft wirke, als die aus der Wechselwirkung seiner elektrischen Ladung und den Ladungen der beiden Enden resultirende, und dass beim Anstoss an die unbeweglich festgehaltenen Enden dieser Konduktor nach elastischen Gesetzen so zurückgeworfen werde, dass er von seiner lebendigen Kraft nichts verliert, so würde seine Geschwindigkeit in's Unendliche wachsen, und die Stelle eines die Kette schliessenden Leiters immer vollkommener von ihm vertreten werden.

Fände aber die Zurückwerfung des Konduktors nicht nach elastischem Gesetze statt, oder würde dem pendulirenden Konduktor auf andere Weise lebendige Kraft entzogen, und zwar bei jeder Wiederholung seiner Bewegung immer derselbe Bruchtheil von der ganzen lebendigen Kraft, die er besässe, so würde seine Geschwindigkeit sich bald einer Grenze nähern, wo sie konstant bliebe. Die Erneuerung der bei dieser Geschwindigkeit dem pendulierenden Konduktor entzogenen lebendigen Kraft bildet die von der Elektricität zwischen den beiden Enden (im Lichtbogen) geleistete Arbeit A und zur Bestimmung dieses Grenzzustandes dient die Gleichung:

$$A + nE \cdot \frac{nE}{L} = E \cdot \frac{E}{L} \cdot$$

Man sieht leicht, dass, wenn mit den Bestimmungen von $(1-n)E = D$, wie sie Herr Edlund gegeben hat, auch noch Bestimmungen über die Periodicität der Entladungen durch den Lichtbogen, in der Art, wie Herr Feddersen sie für den Entladungsfunken einer leidener Flasche gegeben hat, verbunden werden könnten, so würde dadurch wesentlich mehr Einsicht in den noch wenig bekannten Process im Lichtbogen gewonnen werden.

Wenn die beiden Kohlenspitzen mit der Aufhebung des Kontakts plötzlich ganz von einander isolirt würden, so würde der Werth von $-D$ plötzlich von Null auf $-E$ überspringen. Durch den unbekannten Process zwischen den Kohlenspitzen, durch welchen auch nach Aufhebung des Kontakts noch Elektricität von der einen Kohlenspitze zur anderen transportirt wird, wird dieser plötzliche Sprung im Werthe von $-D$ etwas verkleinert, nämlich von o auf $-(1-n)E$. Es leuchtet aber ein, dass durch allmählige Vergrösserung der Entfernung der Kohlenspitzen von einander der Werth von $-D$ ebenfalls allmählig von $-(1-n)E$ zu $-E$ übergehen müsse, also D mit der Entfernung der Kohlenspitzen wachsen muss, wie es sich nach meiner oben angeführten Rechnung auch aus den Edlund'schen Messungen ergeben hat.

Ueber die Einrichtung des Bifilargalvanometers.[1]

Mit den galvanischen Hülfsmitteln, die man jetzt besitzt, ist es nur selten möglich, in einem so kleinen Raume, wie ihn ein starker Magnet einnimmt, eine galvanische Kraft zu koncentriren, welche der magnetischen Kraft des letzteren entspräche. Da nun bei einem Bifilargalvanometer noch hinzukommt, dass der Strom durch die feinen Aufhängungsdrähte geleitet werden muss, wodurch die Stromintensität in der Regel sehr geschwächt wird, so leuchtet hieraus um so mehr die Wichtigkeit ein, die es hat, dass das Bifilargalvanometer möglichst zweckmässig eingerichtet sei, um durch die Zweckmässigkeit seiner Einrichtung die galvanischen Kräfte möglichst zu benutzen.

Ich nehme aus praktischen Gründen an, dass das Bifilargalvanometer aus kreisförmigen, parallelen Elementarringen bestehe, deren Mittelpunkte in einer auf die Ebene der Ringe senkrechten Axe liegen. Diese Axe soll ferner aus gleichen Gründen wie die magnetische Axe eines Magnetometers, eine horizontale Lage erhalten, so dass die Ebene jener Ringe vertikal ist. Endlich wird noch aus praktischen Gründen angenommen, dass alle Elementarringe zusammen einen stärkeren Ring von cylindrischer Form bilden, dessen innerer Durchmesser mit $2a$, der äussere Durchmesser mit $2b$ und die Höhe mit $2c$ bezeichnet werden sollen. Wenn a, b, c und ausserdem die Stärke des Drahts bestimmt sind, aus welchen das Bifilargalvanometer gebildet werden soll, so ist dadurch die Einrichtung des Bifilargalvanometers gegeben.

Die Beobachtungen, welche mit dem Bifilargalvanometer gemacht werden, sind theils *Schwingungsversuche,* theils *Ablenkungsversuche* und die Feinheit oder Empfindlichkeit des Instruments bestimmt sich nach der Abänderung der Schwingungsdauer oder nach der Grösse der An-

[1] [Diese Abhandlung stammt aus einer früheren Lebensperiode des Verfassers, dagegen wurde der Zusatz zu dieser Abhandlung (S. 597) derselben im Jahre 1864 zugefügt. Der letztere handelt über *„Die gleichzeitige Messung des Erdmagnetismus und der Stromintensität nach absolutem Maasse durch korrespondirende Beobachtungen an der Tangentenbussole und dem Bifilargalvanometer“* und über *„Die Einrichtung eines vollständigen Messapparates für alle absoluten Maassbestimmungen in der Galvanometrie“*.]

gularablenkung, welche eine äussere galvanische oder magnetische Kraft hervorbringt.

Hierbei kommen nun zunächst in Betracht das Gewicht und das Trägheitsmoment des Bifilargalvanometers in Beziehung auf seine vertikale Drehungsaxe und die Länge und der Abstand seiner beiden Aufhängungsdrähte, von denen die Direktionskraft und die Schwingungsdauer desselben, so lange keine äusseren galvanischen oder magnetischen Kräfte darauf wirken, abhängt. Bezeichnet man mit D die Direktionskraft, mit S das reciproke Quadrat der Schwingungsdauer, mit mg das Gewicht, mit K das Trägheitsmoment des Bifilargalvanometers und endlich mit l die Länge und mit d den Abstand seiner Aufhängungsdrähte, so ist nach bekannten mechanischen Principien

$$D = \frac{d^2}{l} mg$$

und

$$S = \frac{D}{\pi^2 K}.$$

Ist die Form des Bifilargalvanometers durch die Werthe a, b, c gegeben und wird die Dichtigkeit der Drähte mit ϱ bezeichnet, so ist

$$m = 2\pi\varrho c(b^2 - a^2) + q$$

und

$$K = m(\tfrac{1}{3}c^2 + \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2)) + r,$$

wo q das Gewicht des Galvanometers nach Abzug des Drahtgewichts, r das Trägheitsmoment des Gewichts q bezeichnet.

Wird nun durch das Bifilargalvanometer ein bestimmter galvanischer Strom geleitet, so kommt ferner in Betracht, welche Abänderung der Schwingungsdauer, oder welche Ablenkung eine bestimmte äussere galvanische oder magnetische Kraft hervorbringt, oder welche Abänderung der Direktionskraft, oder welches ablenkende Moment daraus hervorgeht. Hierbei kommt es zunächst auf die Grösse und Richtung dieser äusseren Kraft in den verschiedenen Theilen des Bifilargalvanometers an, ob sie für alle Theile gleiche Grösse und Richtung oder ungleiche Grösse und Richtung hat. Ist z. B. diese äussere Kraft der Erdmagnetismus, so hat sie für alle Theile gleiche Grösse und gleiche Richtung; geht die äussere Kraft dagegen von einem Multiplikator aus, welcher das Bifilargalvanometer eng umschliesst, so wird dieselbe im Allgemeinen für die verschiedenen Theile des Galvanometers eine verschiedene Grösse und Richtung haben. Der grösseren Einfachheit wegen soll hier vorausgesetzt werden, dass die Grösse und Richtung der äusseren Kraft für alle Theile des Galvanometers dieselbe sei, wie

es der Fall ist, wenn der Erdmagnetismus diese äussere Kraft ist, und zwar der horizontale Theil derselben, da der vertikale Theil nicht in Betracht kommt, weil das Bifilargalvanometer blos um eine vertikale Axe drehbar ist.

Bezeichnet man die äussere Kraft mit ψ, die Intensität des Stroms mit i und mit f die Summe der Kreisflächen aller parallelen Elementarringe, aus denen das Bifilargalvanometer besteht, so ist $i\psi f$ die Aenderung der Direktionskraft oder die ablenkende Kraft, welche auf das Bifilargalvanometer wirkt, je nachdem seine Axe der äusseren Kraft parallel oder darauf senkrecht ist. Es geht dies aus dem Grundgesetze des Elektromagnetismus hervor, wie dasselbe von Gauss in den „Allgemeinen Lehrsätzen in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte“ (Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839, S. 2)[1]) ausgesprochen worden ist, wonach die *Richtung* der Kraft, welches jedes Längenelement eines Ringes ds von einem Theilchen Süd- oder Nordmagnetismus μ, welches sich in irgend einem Punkte O befindet, erleidet, senkrecht ist auf der Ebene, in welcher jenes Längenelement und dieser Punkt liegt, und wonach die Grösse dieser Kraft durch

$$\frac{\sin\vartheta\,.\,\mu ds}{r^2}$$

gemessen wird, wenn r den Abstand des Punktes O von der Mitte des Elements ds, ferner ϑ den Winkel bezeichnet, welcher die Linie r mit der Richtung von ds macht, und endlich μ das in O befindliche Theilchen magnetischen Fluidums bezeichnet. Um dieses Gesetz leichter in Anwendung zu bringen, denke man sich das Theilchen μ in grosser Entfernung r, so dass die Richtung und Grösse seiner Kraft in allen Theilen des Bifilargalvanometers als gleich angenommen werden darf. Die Grösse dieser Kraft wird dann nach bekannten Principien $= \mu/r^2$ gefunden, d. i.

$$\psi = \frac{\mu}{r^2}.$$

Betrachten wir nun einen Elementarring, dessen Halbmesser $= y$ und dessen Ebene senkrecht auf die Richtung r ist, so ergiebt sich aus obigem Gesetze für die Richtung der Kraft, welche auf das Ringelement ds wirkt, dass sie mit dem zugehörigen Radius des Rings zusammenfällt und entweder das Element ds nach dem Mittelpunkt des Rings treibt oder in entgegengesetzter Richtung, je nachdem der Strom den Ring durchläuft, ferner je nachdem das Theilchen μ vor oder hinter

[1]) [Gauss' Werke, Bd. V, pag. 198.]

der Ringebene liegt und endlich je nachdem μ selbst ein Theilchen südmagnetischen oder nordmagnetischen Fluidums ist. Ferner was die Grösse der Kraft betrifft, so ergiebt sich der Werth von ϑ für alle Ringelemente $= \frac{1}{2}\pi$, folglich $\sin\vartheta = 1$. Die Grösse der Kraft also, welche auf das Längenelement ds wirkt, ist also für die Einheit der Stromintensität (auf welche sich obiger Ausdruck bezieht) $= \mu ds/r^2$, folglich für die Stromintensität i

$$= \frac{i\mu ds}{r^2}.$$

Rechnet man nun s von dem untersten Punkte des Rings an und zerlegt die auf das Längenelement ds, welches dem Werthe s entspricht, wirkende Kraft, deren Richtung also mit der Vertikale den Winkel s/y bildet, in einen vertikalen und horizontalen Theil, so ist die horizontale Kraft

$$= \frac{i\mu ds}{r^2} \cdot \sin\frac{s}{y}.$$

Die vertikale Kraft, welche keinen Einfluss hat, weil der Ring nur um eine vertikale Axe drehbar ist, braucht hier nicht weiter betrachtet zu werden. Dem Längenelemente ds des betrachteten Elementarrings entspricht ein anderes gleiches Längenelement auf der anderen Seite des Rings, für welches $-s$ an die Stelle von s tritt. Für dieses zweite Element ergiebt sich dieselbe horizontale Kraft, deren Richtung aber entgegengesetzt ist. Beide Kräfte bilden ein Kräftepaar, welche dem Ringe eine Direktionskraft geben, die durch das Produkt des Abstands der beiden Elemente nach der Richtung der Kräfte in die Grösse jener Kräfte gemessen wird. Nun ist der Abstand jener beiden Elemente in der Richtung jener Kräfte $= 2y \sin s/y$, folglich die hieraus hervorgehende Direktionskraft

$$= 2\frac{i\mu y}{r^2}\left(\sin\frac{s}{y}\right)^2 ds.$$

Integrirt man diesen Ausdruck zwischen den Grenzen $s = 0$ bis $s = \pi y$, so erhält man die ganze Direktionskraft, welche auf diesem Ring wirkt

$$= \frac{i\mu}{r^2} \cdot \pi y^2.$$

Dasselbe gilt nun für alle Ringe, die sich blos durch andere Werthe von y unterscheiden. Die Direktionskraft aller Ringe zusammengenommen ist daher die Summe der Direktionskräfte aller einzelnen Ringe, welche $i\mu/r^2$

und die Summe der Ringflächen πy^2 zu Faktoren hat. Bezeichnet man also die Summe aller Ringflächen πy^2 mit f und setzt für μ/r^2 seinen Werth ψ, so erhält man für die durch die äussere Einwirkung hervorgebrachte Direktionskraft den Ausdruck

$$i\psi f,$$

wie oben angegeben worden ist.

Der Mittelwerth von πy^2 für alle Elementarringe ergiebt sich nun für ein Bifilargalvanometer, dessen Form durch die Werthe a, b, c bestimmt ist, wenn man πy^2 mit $2cdy$ multiplicirt und das Integral davon zwischen den Grenzen $y=a$ bis $y=b$ nimmt und mit dem Querschnitt des Galvanometerrings $2c(b-a)$ dividirt, d. i.

$$=\tfrac{1}{3}\pi\frac{b^3-a^3}{b-a}.$$

Multiplicirt man diesen Mittelwerth mit der Zahl der Ringe oder mit dem Verhältniss des Querschnitts des Galvanometerrings $2c(b-a)$ zum Querschnitt σ eines seiner Elementarringe, so erhält man den Werth von f

$$f=\frac{2c}{3\sigma}\pi(b^3-a^3),$$

folglich, wenn man diesen Werth von f substituirt, so erhält man für die Abänderung der Direktionskraft des Galvanometers

$$\frac{2i\psi}{3\sigma}\pi c(b^3-a^3)=\Delta.$$

Denselben Ausdruck findet man als Werth des *Ablenkungsmoments* des Bifilargalvanometers, wenn man annimmt, dass die Ebene der Elementarringe der Richtung r parallel sei.

Aus dieser Aenderung Δ der Direktionskraft D ergiebt sich nun durch Division mit dem Trägheitsmomente K das Maass der Aenderung der *bewegenden* Kraft bei der Schwingung

$$=\frac{\Delta}{K}.$$

Ferner ergiebt sich aus Δ, wenn es mit der Direktionskraft D selbst dividirt wird, das Maass der Ablenkung (die Tangente des Ablenkungswinkels), da aber diese Ablenkung nach Maassgabe der Empfindlichkeit, die man beim Galvanometer durch angemessene Anordnung der Aufhängungsdrähte nach Belieben regeln kann, verschieden ist, so kann

man die Ablenkung allein nicht als Maass der durch die äussere Kraft hervorgebrachten Einwirkung auf das Galvanometer betrachten, sondern muss dazu das Verhältniss der Ablenkung zu dem Maass der dem Galvanometer ertheilten Empfindlichkeit nehmen. Die dem Galvanometer ertheilte Empfindlichkeit ist aber der Direktionskraft D umgekehrt proportional und dem Trägheitsmoment desselben K direkt proportional, wonach ebenfalls Δ/K als Maass der Einwirkung der äusseren Kraft auf das Galvanometer erhalten wird. Diese Einwirkung ist also am grössten, wenn

$$\frac{\Delta}{K} = \text{Maximum},$$

oder, wenn für Δ und K die gefundenen Werthe gesetzt werden,

$$\frac{8 i \psi \pi c (b^3 - a^3)}{m (4 c^2 + 3 (b^2 + a^2)) \cdot \sigma} = \text{Maximum}.$$

Man sieht hieraus, dass, wenn die Intensität des Stroms i unabhängig von der Länge und Dicke des Galvanometerdrahts wäre, jener Ausdruck einen desto grösseren Werth hätte, je kleiner der Werth des Querschnitts σ wäre, d. h. je grösser die Zahl der Elementarringe im gleichen Raume wäre. In der Regel ist aber die Stromstärke i verschieden, je nachdem der Galvanometerdraht kurz und dick oder lang und dünn ist, weil nämlich der Galvanometerdraht in der Regel einen bedeutenden Theil der galvanischen Leitungskette bildet, durch dessen Verlängerung und Verfeinerung der Widerstand der ganzen Kette beträchtlich zunimmt, und diesem Widerstande der ganzen Kette ist die Stromstärke umgekehrt proportional. Soll nun aber die Stromstärke unverändert bleiben, so muss nach den Ohm'schen Gesetzen der galvanischen Kette die Länge des Drahts mit seinem Querschnitte proportional wachsen oder abnehmen, d. i., wenn L die Länge des Galvanometerdrahts und $\varkappa$ eine Konstante bezeichnet, soll

$$\frac{L}{\sigma} = \varkappa$$

sein. Nun ist aber $L\sigma$ der ganze vom Galvanometerdrahte eingenommene Raum, folglich ist

$$L\sigma = 2\pi c (b^2 - a^2).$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich durch Elimination von L der Werth von σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa}} \cdot \sqrt{c (b^2 - a^2)}.$$

Durch Substitution dieses Werthes von σ und des oben angegebenen Werthes von m

$$m = 2\pi\varrho c(b^2 - a^2)$$

erhält man mit Berücksichtigung, dass der Faktor

$$\frac{8i\psi\pi}{2\pi\varrho\sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa}}}$$

unabhängig von den gesuchten Werthen a, b, c ist und daher weggelassen werden kann,

$$\frac{b^3 - a^3}{(4c^2 + 3(b^2 + a^2))(b^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}.\sqrt{c}} = \text{Maximum},$$

oder

$$\frac{b^2 + ab + a^2}{(4c^2 + 3(b^2 + a^2))(b + a)\sqrt{c(b^2 - a^2)}} = \text{Maximum}.$$

Man sieht aber unmittelbar, dass der Werth dieses Ausdrucks sowohl für $c = 0$ als auch für $b = a$ unendlich wird: in beiden Fällen reducirt sich aber der Rauminhalt des Galvanometers $2\pi c(b^2 - a^2)$ auf Null. In der Wirklichkeit lässt sich nun aber der Rauminhalt des Galvanometers nur bis auf eine gewisse Grenze verkleinern; bezeichnet α eine Konstante, so sei diese Grenze

$$2\pi c(b^2 - a^2) = \pi\alpha\sqrt{3}$$

und eliminirt man mit Hülfe dieser Gleichung c, so hat man mit Weglassung des konstanten Faktors $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\alpha\sqrt{3}}}$,

$$\frac{(b^2 - a^2)(b^3 - a^3)}{\alpha\alpha + (b^2 + a^2)(b^2 - a^2)^2} = \text{Maximum},$$

woraus sich $a = 0$ und $b/c = 2\sqrt{5/3}$ ergiebt, welches letztere Verhältniss auch für kleine Werthe von a sehr nahe unverändert bleibt.

Wenn also das Bifilargalvanometer blos aus einem Drahtringe und einer Fassung besteht, deren Trägheitsmoment dem Trägheitsmomente des Drahtrings proportional zu setzen ist, wie dies nahe der Fall ist, wenn es mit keinem Spiegel belastet, sondern blos mit einem äusserst feinen Zeiger zur Beobachtung versehen wird, dessen Trägheitsmoment als verschwindend betrachtet werden darf; so geht aus obigem hervor, dass die Wirksamkeit desselben desto grösser sein werde, je kleiner es

ist und dass es am vortheilhaftesten dabei ist, den Draht auf einer möglichst dünnen Axe aufzuwinden, und zwar so, dass der Halbmesser des Rings zu seiner Höhe sich verhält wie $b : 2c = \sqrt{5} . \sqrt{3}$.

Wird aber das Galvanometer zum Zwecke feinerer Beobachtungen mit einem Spiegel belastet, dem nebst dem Spiegelhalter ein von der Grösse des Galvanometers unabhängiges Trägheitsmoment zukommt, so muss dieses Trägheitsmoment besonders in Rechnung gezogen werden. Auch dann bleibt es vortheilhaft, den Galvanometerdraht auf einen möglichst dünnen Zapfen aufzuwinden. Setzt man daher auch hier $a = 0$, und bezeichnet das konstante Trägheitsmoment des Spiegels nebst seinem Zapfen mit

$$k = \frac{\pi \varrho \beta}{6},$$

so erhält man die Bedingung

$$\frac{b^2 \sqrt{c}}{\beta + (4c^2 + 3b^2) cb^2} = \text{Maximum},$$

woraus

$$\beta = 3b^4 c \quad \text{folglich} \quad \frac{bb}{4} = \frac{k}{m}$$

sich ergiebt. Uebrigens nähert sich obiger Ausdruck einer Grenze, je kleiner c wird. Es ist nämlich jener Werth [1])

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta} + 4\sqrt{\frac{c^5}{3}}},$$

folglich für $c = 0$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\beta}},$$

für $c = 0$ wird aber b unendlich und dabei der Rauminhalt des Rings $= 2\pi c b^2 = 2\pi\beta/3b^2 = 0$.

Die Wirkung des Galvanometers ist dann nur halb so gross, wenn man $\sqrt{\beta} = 4\sqrt{c^5}/3$ setzt, d. i. wenn der Rauminhalt des Rings

$$2\pi c b^2 = \frac{2\pi}{6^{\frac{2}{5}}} \cdot \beta^{\frac{3}{5}} = 2 \,.\, 6^{\frac{1}{5}} . \pi^{\frac{2}{5}} \left(\frac{k}{\varrho}\right)^{\frac{3}{5}},$$

$$b = (6\beta)^{\frac{1}{5}} . \sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$2c = (6\beta)^{\frac{1}{5}}.$$

[1]) [Bei Ableitung des nachfolgenden Ausdruckes scheint ein Schreibfehler vorzuliegen. Derselbe ist durch $[1/2\sqrt{3}] . [1/(\sqrt{\beta} + 2\sqrt{c^5/3}]$ zu ersetzen, und dementsprechend sind die folgenden Formeln abzuändern.]

Das Trägheitsmoment des Drahtcylinders ergiebt sich daraus

$$2\pi\varrho c b^2\left(\frac{1}{3}c^2+\frac{1}{4}b^2\right)=2\,.\,6^{\frac{1}{5}}.\,(\pi\varrho)^{\frac{2}{5}}\,k^{\frac{3}{5}}.\left[\frac{1}{6}\left(\frac{36k}{\pi\varrho}\right)^{\frac{2}{5}}\right]=2k,$$

d. i. das Trägheitsmoment des Drahtcylinders doppelt so gross als das Trägheitsmoment des Spiegels nebst Spiegelhalter und Zapfen. Hieraus ergiebt sich die einfache Regel, dass der Halbmesser des Drahtcylinders ($=b$) zu seiner Höhe ($=2c$) wie $1:\sqrt{3}$ sich verhalte und das Trägheitsmoment desselben doppelt so gross sei wie das gegebene Trägheitsmoment des Spiegels nebst Zubehör.

Zur wirklichen Anwendung wird endlich noch eine Vorschrift über die zu wählende Drahtstärke erfordert, wofür oben nur das Gesetz angegeben ist, in welchem Verhältniss sie mit den Dimensionen des Drahtcylinders wachse oder abnehme. Es bleibt also noch die absolute Bestimmung dieser Drahtstärke für gegebene Dimensionen des Drahtcylinders übrig.

Wir müssen hierbei zwei Fälle unterscheiden, *erstens* den Fall, wo das Instrument entweder mit gar keinen Multiplikator versehen wird, sondern die Einwirkung des Erdmagnetismus oder eines anderen Magnets auf dasselbe beobachtet werden soll, oder wo es zwar mit Multiplikator versehen wird, durch den Multiplikatordraht aber ein ganz anderer galvanischer Strom geleitet wird, als durch den Draht des Instruments; *zweitens* den Fall, wo das Instrument mit Multiplikator versehen und derselbe galvanische Strom durch den Draht des Instruments sowohl als des Multiplikators geleitet wird.

Betrachten wir also *zuerst* jenen Fall, wo der galvanische Strom des Instruments nicht zugleich auch durch einen Multiplikatordraht geleitet wird, wo also die äussere (galvanische oder magnetische) Kraft, welche auf den Draht wirkt, ganz unabhängig ist von der Intensität des galvanischen Stroms im Drahte des Instruments und beschränken ferner die Aufgabe darauf, dass wir für diesen Fall den Querschnitt des Drahtes so zu bestimmen suchen, wie er für einen bestimmten einzelnen Versuch am angemessensten ist, wo also der Widerstand der galvanischen Kette, die man gebraucht (mit Ausschluss des Widerstands, welchen der Draht des Instruments selbst besitzt), als bekannt und gegeben betrachtet werden darf. Es sei dieser Widerstand ausgedrückt durch die Länge eines Drahts $=\lambda$, dessen Querschnitt der Flächeneinheit gleich ist, welcher diesen Widerstand besitzt. Nach den Ohm'schen Gesetzen der galvanischen Kette wird dann der Widerstand des Drahts des Instruments (vorausgesetzt, dass er von gleichem Metalle ist) durch das Verhältniss seiner Länge zu seinem Querschnitt $=\sigma$ ausgedrückt. Da die Länge des Drahts gleich dem Volumen des ganzen

Drahtcylinders ($= 2\pi c b^2$) dividirt durch seinen Querschnitt ist, so ergiebt sich hieraus der Widerstand des Drahts des Instruments

$$= \frac{2\pi c b^2}{\sigma^2}$$

und also der Widerstand der ganzen Kette

$$= \lambda + \frac{2\pi c b^2}{\sigma^2}.$$

Bezeichnet nun A die galvanomotorische Kraft, so wird die Intensität des galvanischen Stroms ausgedrückt durch

$$i = \frac{A}{\lambda + \frac{2\pi c b^2}{\sigma^2}}.$$

Setzt man diesen Werth für i in das Maass der Einwirkung, welche das Instrument von einer gegebenen äusseren Kraft ψ erleidet

$$= \frac{8 i \psi \pi c b^3}{(\beta + m(4c^2 + 3b^2))\sigma},$$

worin $a = o$ gesetzt und das Trägheitsmoment des Spiegels nebst Zubehör $= \beta$ mit in Rechnung gebracht ist, so erhält man für gegebene Werthe ψ, b, c, β, m die vortheilhafteste Bestimmung von σ, wenn man denjenigen Werth von σ sucht, wodurch

$$\frac{1}{\lambda\sigma + \frac{2\pi c b^2}{\sigma}} = \text{Maximum}$$

wird. Es ergiebt sich hieraus

$$\lambda = \frac{2\pi c b^2}{\sigma^2}$$

d. i. der Draht des Instruments soll so gewählt werden, dass sein Widerstand dem gegebenen Widerstande der übrigen Kette gleich ist, also

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\pi c b^2}{\lambda}}.$$

Hierdurch in Verbindung mit den früheren Bestimmungen sind also die Dimensionen des Drahts und die Gestalt des Cylinders, in die er gebracht werden soll, vollständig bestimmt, so wie es für das anzustellende Experiment am vortheilhaftesten ist.

In den meisten Fällen hat aber ein solches Instrument die Bestimmung, nicht blos zu einem bestimmten einzelnen Experimente, son-

dern zu sehr mannigfaltigen Versuchen gebraucht zu werden. Es bleibt dann nichts übrig, als sich bei der Konstruktion desselben an einen dieser Versuche vorzugsweise zu halten, und zwar an denjenigen, zu welchem die grösste Empfindlichkeit des Instruments erfordert wird, wodurch also die obigen Regeln keine Aenderung erleiden.

Anders verhält es sich dagegen in dem *zweiten* von uns zu betrachtenden Falle, wo derselbe galvanische Strom, welcher durch den Draht des Instruments geht, auch durch den Draht eines Multiplikators geleitet wird, welcher oben bestimmt ist, die äussere, auf das Instrument wirkende Kraft, welche oben mit ψ bezeichnet wurde, darzustellen. Diese äussere Kraft ψ ist dann nämlich der Intensität i jenes Stroms proportional und die Intensität i ist nicht bloss von der gegebenen galvanomotorischen Kraft A und dem Widerstande λ und dem Widerstande des Drahts des Instruments $= 2\pi c b^2/\sigma^2$, sondern auch von dem Widerstande des Multiplikatordrahts $= \lambda'$ abhängig, und zwar ist

$$i = \frac{A}{\lambda + \lambda' + \frac{2\pi c b^2}{\sigma^2}}$$

und da ψ hiermit proportional ist, so kann es, wenn f einen konstanten Faktor bezeichnet, durch

$$\psi = \frac{fA}{\lambda + \lambda' + \frac{2\pi c b^2}{\sigma^2}}$$

dargestellt werden. Substituirt man diese Werthe für i und ψ in dem Maass der Einwirkung, welche das Instrument durch die äussere Kraft ψ erleidet, nämlich

$$\frac{8 i \psi \pi c b^3}{(\beta + m(4c^2 + 3b^2))\sigma}$$

so erhält man für gegebene Werthe von b, c, β, m die vortheilhafteste Bestimmung von σ, wenn man denjenigen Werth von σ sucht, wodurch

$$\frac{1}{\left(\lambda + \lambda' + \frac{2\pi c b^2}{\sigma^2}\right)^2 \sigma} = \text{Maximum}$$

wird. Es ergiebt sich hieraus $\lambda + \lambda' = 3 \,.\, 2\pi c b^2/\sigma^2$, d. i. während es also ohne Multiplikator am vortheilhaftesten war, den Widerstand des Drahts des Instruments dem Widerstande der übrigen Kette gleich zu machen, so ist es dagegen, wenn das Instrument mit Multiplikator gebraucht wird, am vortheilhaftesten, den Widerstand des Drahts des

Instruments so abzumessen, dass er nur $\frac{1}{3}$ von dem Widerstande der übrigen Kette (zu der auch der Multiplikator gehört), beträgt.

Aehnliche Betrachtungen, wie hier in Betreff der zweckmässigen Einrichtung des Bifilargalvanometers gemacht worden sind, sind auch leicht für die *Magnetnadel* eines gewöhnlichen Galvanometers anzustellen, womit ich diesen Aufsatz beschliessen will.

Gebraucht man eine einfache unifilar aufgehangene Magnetnadel, so möge erstens eine cylindrische Form der Nadel, zweitens ein bestimmtes Verhältniss der Länge zum Durchmesser vorausgesetzt werden. Unter letzterer Voraussetzung wächst das magnetische Moment dem Kubus der Lineardimensionen, das Trägheitsmoment der Nadel der fünften Potenz der Lineardimensionen der Nadel proportional. Das ablenkende Moment einer gegebenen äusseren Kraft ist nun dem magnetischen Moment der Nadel, d. i. dem Kubus ihrer Lineardimensionen proportional, folglich wenn man die Einwirkung einer gegebenen äusseren Kraft auf die Nadel aus den nämlichen Gründen wie beim Bifilarmagnetometer nach dem Verhältniss des ablenkenden Moments zum Trägheitsmoment schätzt, so ergiebt sich das Maass dieser Einwirkung dem Quadrat der Lineardimensionen umgekehrt proportional, d. i. die Einwirkung ist desto grösser, je kleiner die Nadel ist. Es geht hieraus der Vortheil, den kleine Nadeln bei Galvanometern gewähren, hervor; jedoch ist zu beachten, dass dieser Vortheil nicht auf grösserer Ablenkung der Nadel, sondern auf Beschleunigung der Angularbewegung durch Verminderung der Schwingungsdauer beruht und dadurch in der wirklichen Anwendung der Verkleinerung der Nadel eine Grenze gesetzt wird, nämlich diejenige Grösse der Schwingungsdauer, die nöthig ist, um Zeit zu genauer Beobachtung zu gewinnen.

Zieht man dabei noch den Multiplikator in Betracht, so ersieht man leicht, dass je kleiner die Nadel ist, desto kleiner kann der innere Halbmesser des Multiplikators werden, und desto mehr wächst die äussere Kraft und ihre Einwirkung auf die Nadel.

Hierbei ist vorausgesetzt worden, dass die Nadel allein schwinge und daher blos ihr eigenes Trägheitsmoment in Betracht komme. Anders verhält es sich, wenn ein Spiegel nebst Zubehör mit der Nadel fest verbunden ist und an ihrer Schwingung Theil nimmt. Bezeichnet man mit k das Trägheitsmoment des Spiegels nebst Zubehör, mit br^5 das Trägheitsmoment der Nadel und mit ar^3 das magnetische Moment, so ist das Maass der Einwirkung

$$= \frac{ar^3}{k + br^5}$$

für eine der Einheit gleichgesetzte gegebene äussere magnetische Kraft,

wo r die Lineardimensionen des Stabs misst. Hieraus ergiebt sich das Maass jener Einwirkung am grössten, wenn

$$b r^5 = \tfrac{3}{2} k$$

d. h. wenn das Trägheitsmoment der Nadel $\tfrac{3}{2}$ von dem Trägheitsmoment des Spiegels nebst Zubehör beträgt.

Diese Regel erleidet eine Abänderung, wenn die äussere Kraft von dem Multiplikator abhängt, dessen innerer Halbmesser der Grösse der Nadel proportional ist. In so fern die Einrichtung des Multiplikators ihrem Zwecke vollkommen entspricht, ist die davon abhängige äussere Kraft der Quadratwurzel der Lineardimensionen der Nadel umgekehrt proportional zu setzen, woraus sich folgende Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der vortheilhaftesten Lineardimensionen, welche der Nadel zu geben sind, ergiebt, nämlich

$$\frac{a r^{\frac{5}{2}}}{k + b r^5} = \text{Maximum},$$

und hieraus folgt

$$b r^5 = k$$

d. h. das Trägheitsmoment der Nadel gleich dem Trägheitsmoment des Spiegels nebst Zubehör.

Dieselben Betrachtungen, wie für die unifilar aufgehängte Nadel lassen sich auch auf die bifilar aufgehängte Nadel anwenden, weil weder das ablenkende Moment, noch das Trägheitsmoment dadurch abgeändert wird. Gleiches gilt von der Einrichtung *astatischer* Nadeln.

Zum Schluss mögen hier noch folgende zwei Bemerkungen über die Aufhängungsweise der Nadeln in den gewöhnlichen astatischen oder nicht astatischen Galvanometern und über die Anwendungen der astatischen Nadeln überhaupt Platz finden. Es ist bekannt, dass der Vortheil grösserer Empfindlichkeit, welchen die astatischen Nadeln gewähren, indem die Direktionskraft vermindert, bei unveränderter Ablenkungskraft, nicht ohne mancherlei Nachtheile, welche die Doppelnadeln mit sich führen, erlangt wird, und es dürfte daher wohl die Bemerkung Beachtung verdienen, dass man mit der einfachen Nadel dieselben Vortheile wie mit der Doppelnadel erreichen kann, ohne dass jene Nachtheile damit verbunden wären, und zwar auf sehr einfache Weise, nämlich durch bifilare Aufhängung, welche so regulirt wird, dass die aus der Aufhängung resultirende Direktionskraft die aus dem Erdmagnetismus resultirende Direktionskraft ein wenig übertrifft. Ist dies der Fall, so stellt man das Instrument so auf, dass die Nadel in verkehrter Lage (Nordpol nach Süd gekehrt) im Gleichgewicht ist, wo dann die aus der Aufhängung und aus dem Erdmagnetismus resultiren-

den Direktionskräfte einander aufheben und nur der Ueberschuss der ersteren wirksam bleibt. Die bifilare Aufhängung lässt sich übrigens auch bei den kleinsten Nadeln mit grosser Leichtigkeit und Feinheit bewerkstelligen mittelst eines Kokonfadens, welcher durch ein feines Oer der Nadel gezogen wird und dessen beide Enden nahe bei einander oben befestigt werden; geschieht diese Befestigung an einer Schraube mit entgegengesetztem Gewinde, so lässt sich durch Drehung dieser Schraube der obere Abstand der Fäden beliebig vergrössern oder verkleinern und dadurch die Empfindlichkeit des Instruments jeder Zeit und für jeden Zweck sehr bequem reguliren, eine Einrichtung, die offenbar sehr grosse Vorzüge vor den astatischen Nadeln besitzt, deren Anwendung unnöthige Kosten, Mühe und Noth verursacht.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf die Aufhängung der einfachen Nadeln oder die Verbindung der beiden Theile der astatischen Nadel. Damit jene Aufhängung oder diese Verbindung nicht mit dem Multiplikator in Kollision komme, theilt man den Multiplikator in zwei Theile, zwischen denen eine Lücke gelassen wird für den Durchgang des Suspensionsfadens oder des Verbindungsstückes der beiden Nadeln. Es ist leicht zu ersehen, wie unvortheilhaft diese Theilung des Multiplikators nicht allein für die Stärke seiner Wirkung, sondern auch dadurch ist, dass dann die Ablenkung einem sehr komplicirten Gesetze unterworfen ist, worauf schon Professor Poggendorff bei seinen Versuchen aufmerksam geworden ist. Alle diese Uebelstände lassen sich leicht dadurch vermeiden, dass man die Aufhängung oder die Verbindung beider Nadeln durch einen sehr dünnen und leichten Ring vermittelt, welcher den Multiplikator umgiebt wie ein Kettenglied das andere. Es versteht sich von selbst, dass dieser Ring sich leicht zum Oeffnen einrichten lässt, um den Multiplikator aus dem Instrument herausnehmen zu können. Ich habe diese Aufhängungsweise stets angewandt und von ihr auch bei dem Bifilargalvanometer Gebrauch gemacht, wie oben beschrieben worden ist.

Zusatz zu voriger Abhandlung.

Jede messbare Wirkung des galvanischen Stroms kann möglicherweise zur Messung seiner Stärke benutzt werden. Nun giebt es *chemische Wirkungen*, *Wärmewirkungen*, *elektromagnetische* und *elektrodynamische Wirkungen* des Stroms, welche sich messen lassen, und es lassen sich nach den verschiedenen dadurch gegebenen Principien *vier Klassen von Galvanometern* unterscheiden. Zur *ersten* Klasse gehören die *Volta-*

meter nach Faraday, zur *zweiten* die *elektrischen Luftthermometer* nach Riess, zur *dritten* alle Arten von *Sinus-* und *Tangenten-Boussolen,* zur *vierten* die *Elektrodynamometer,* für die, nach Analogie mit den Voltametern, auch der Name *Amperometer* vorgeschlagen worden ist.

Die mit diesen verschiedenen Galvanometern ausgeführten Messungen lassen sich in *relative* und *absolute* im weiteren Sinne eintheilen, je nachdem dadurch entweder nur das Intensitätsverhältniss je zweier Ströme gegen einander, oder die Intensitätsverhältnisse aller anderen Ströme zu einem einzigen genau definirten Strome, welcher das *Strommaass* oder die *Stromeinheit* heisst, bestimmt wird.

Dieses Strommaass kann aber kein *Grundmaass,* sondern nur ein abgeleitetes, *auf andere Grundmaasse zurückführbares* sein; denn ein wirklich vorhandener Strom kann zum Strommaass darum nicht dienen, weil er nicht für alle Zeiten und unter allen Verhältnissen, unter welchen er mit anderen Strömen verglichen werden soll, gleich bleibt. Ein Strommaass kann daher nur durch eine *Definition* festgestellt werden, durch die es *auf andere Grundmaasse zurückgeführt wird.* Durch solche Zurückführung lassen sich aber Strommaasse *nach allen vier Principien* feststellen, nach welchen die Galvanometer eingetheilt worden sind, welche man demgemäss das *elektrolytische, elektrothermische, elektromagnetische* und *elektrodynamische* Strommaass nennen kann.

Versteht man nun aber wie gewöhnlich im engeren Sinne unter *absoluten Messungen* nur solche, bei denen das Strommaass auf die drei bekannten Grundmaasse der Mechanik, nämlich der *Zeit,* der *Länge* und der *Maasse* zurückgeführt wird, so werden dadurch das *elektrolytische* und *elektrothermische* Strommaass ausgeschlossen, und dem entsprechend lassen sich solche absolute Messungen im engeren Sinne auch nur *mit Galvanometern der beiden letzten Klassen* direkt ausführen.

Denn es leuchtet ein, dass bei der Definition des *elektrolytischen Strommaasses,* nämlich desjenigen Stroms, welcher in der Zeiteinheit die Masseneinheit *Wasser* zersetzt, nicht blos auf die Grundmaasse der Mechanik, sondern auch auf eine specifische Eigenthümlichkeit des *Wassers* Beziehung genommen wird, nämlich auf seine Zersetzbarkeit durch den galvanischen Strom. Das elektrolytische Strommaass würde ohne eine solche Hinweisung auf einen *Körper von bestimmter Zersetzbarkeit* selbst ganz unbestimmt bleiben.

Ferner leuchtet ein, dass bei der Definition des *elektrothermischen Strommaasses,* nämlich desjenigen Stroms, welcher bei Durchgang durch einen Platindraht, dessen Querschnitt $= 1$, in der Zeiteinheit die Temperatur des Platins um einen Grad erhöht, *auf den specifischen Widerstand und auf die specifische Wärme des Platins* Beziehung genommen ist, und dass ohne Hinweisung auf einen Körper von diesen Eigen-

schaften auch das elektrothermische Strommaass ganz unbestimmt bleiben würde.

Der Grund dieser Nothwendigkeit, auf gegebene Körper hinzuweisen, liegt offenbar darin, dass es sich in diesen Fällen um Wirkungen handelt, welche der Strom nur auf Körper ausübt, durch welche er *hindurchgeht*. Es sind *Molekularwirkungen,* keine Fernwirkungen des Stroms. Molekularwirkungen entziehen sich aber, ebenso wie die Molekularverhältnisse, unter denen sie stattfinden, aller *absoluten Messung im engeren Sinne.*

Die elektromagnetischen und elektrodynamischen Wirkungen des Stroms dagegen sind *Fernwirkungen,* welche der Strom auch auf Körper, durch die er nicht hindurchgeht, ausübt, und die daher selbst sowohl, wie auch die räumlichen Verhältnisse, unter denen sie stattfinden, der näheren Bestimmung durch absolute Messung im engeren Sinne fähig sind. Hierdurch ist es möglich geworden, *das elektromagnetische und elektrodynamische Strommaass* nicht allein *auf die Grundmaasse der Mechanik zurückzuführen,* sondern auch zwischen diesen beiden Strommaassen eine *vollkommene Identität* herzustellen. Siehe darüber „Abhandlungen über elektrodynamische Maassbestimmungen. Zurückführung der Stromintensitätsmessungen auf mechanisches Maass.“ Art. 1. S. 223 Note.[1])

Die *Einrichtung* elektromagnetischer und elektrodynamischer Galvanometer zu solchen absoluten Strommessungen im engeren Sinne ist mehrfach betrachtet und erörtert worden, wie auch die Regeln zur Berechnung der Stromintensitäten aus den damit gemachten Beobachtungen; es hat sich dabei aber die Nothwendigkeit herausgestellt, *die Intensität des Erdmagnetismus T* zu der Zeit und am Orte jener Beobachtungen in Rechnung zu bringen, deren Kenntniss nach absolutem Maasse, also vorausgesetzt werden musste.

Diese Voraussetzung ist aber nicht immer erfüllt, oder sie ist nur mangelhaft erfüllt, so dass oft die Genauigkeit der Messung darunter leidet. Eine solche Abhängigkeit der absoluten Strommessungen von der Kenntniss der Intensität des Erdmagnetismus T nach absolutem Maasse, die in der Regel nur in magnetischen Observatorien genau zu erlangen ist, benimmt daher jenen Messungen oft viel von ihrem Werthe und ist der weiteren Verbreitung und Anwendung der Galvanometrie hinderlich gewesen.

Beachtet man nun dabei noch, dass dieselbe Abhängigkeit für alle anderen galvanischen Messungen, nämlich für die Messungen *elektromotorischer Kräfte* und der *Widerstände* ebenso gilt; so leuchtet das

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, pag. 613, Note 2.]

Interesse einer Einrichtung ein, welche gestattet, *aus galvanometrischen Beobachtungen allein,* ohne Zuziehung magnetometrischer Beobachtungen, *Stromintensitäten, elektromotorische Kräfte* und *Widerstände* vollständig und genau nach absoluten Maassen im engeren Sinne zu bestimmen.

Schon in den „Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840" S. 93[1]) habe ich zur Bestimmung des elektrochemischen Aequivalents des Wassers ein auf dem *elektromagnetischen Princip* beruhendes Galvanometer beschrieben, wobei gar keine *Boussole* gebraucht, sondern nur der galvanische Stromleiter selbst benutzt und beobachtet wird. Zur Unterscheidung von Sinus- und Tangenten-Boussole heisse es das *Bifilargalvanometer.*

Das elektromagnetische Princip, worauf beide Arten von Galvanometern, das Bifilargalvanometer, wie Sinus- und Tangentenboussole, beruhen, ist in dem bekannten Gesetz der *Wechselwirkung* eines Theilchens magnetischen Fluidums und eines Stromelements auf einander enthalten. Im Wesen dieser *Wechselwirkung* liegt es aber, dass von diesem Principe in doppelter Weise Anwendung auf Galvanometer gemacht werden kann, entweder indem die Wirkung des Stroms auf einen beweglichen Magnet, oder indem die Wirkung des Magnets auf einen beweglichen Strom beobachtet und zur Strommessung benutzt wird. Das *erstere* geschieht bei Sinus- und Tangentenboussolen, wo die *Boussole* der bewegliche Magnet ist, an welchem die Stromwirkungen beobachtet werden. Das *letztere* geschieht bei dem Bifilargalvanometer, wo der bifilar aufgehangene Stromleiter (Solenoid) den beweglichen Strom bildet, an welchem die Wirkungen des Magnets beobachtet werden.

Der letztere Fall gestattet nun aber die Vereinfachung, weil es keines *beweglichen Magnets* bedarf, für den kleinen Centralmagnet der *Boussole* den aus der Ferne wirkenden grossen *Erdmagnet* zu setzen, wonach also zur Konstruktion des Instruments weder eine Boussole noch überhaupt ein Magnet erfordert wird. Man hat alsdann nicht mit *zwei* unbekannten elektromagnetischen Direktionskräften zu thun, nämlich mit der vom Centralmagnete und der vom Erdmagnet herrührenden, die mit einander blos verglichen werden könnten, sondern nur mit *einer,* deren Werth daher, wenn durch die bifilare Suspension *Gleichgewicht des beweglichen Solenoids* hergestellt worden, aus der *statischen Direktionskraft* ganz genau und vollständig bestimmt werden kann.

Führt nämlich bei der Sinus- und Tangentenboussole die Bestimmung des Verhältnisses der vom Multiplikatorstrom i auf die Boussole und der vom Erdmagnetismus T auf die nämliche Boussole ausgeübten Direktionskräfte nur zu einer von der Stärke der Boussole

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, pag. 15.]

ganz unabhängigen Kenntniss des Verhältnisses der Stromstärke i zum Erdmagnetismus T; so leuchtet dagegen ein, dass bei dem Bifilargalvanometer die Bestimmung des Verhältnisses der vom Erdmagnetismus T auf den Solenoidstrom i ausgeübten Direktionskraft zu der genau bekannten (vom Solenoidstrome ganz unabhängigen) statischen Direktionskraft D, zur vollständigen Kenntniss der von T auf i ausgeübten Direktionskraft oder des damit proportionalen Produkts iT führt.

Hieraus folgt also, dass, indem i/T durch Beobachtung der Sinus- oder Tangentenboussole, iT durch Beobachtung des Bifilargalvanometers bestimmt wird, *durch Beobachtung beider Instrumente zugleich,* vorausgesetzt, dass *beide derselben Kette angehören* und folglich Multiplikatorstrom und Solenoidstrom gleich sind, eine absolute Werthbestimmung der Stromstärke i, ganz unabhängig von der Kenntniss des Erdmagnetismus T, gewonnen und dadurch die absoluten Maassbestimmung in der Galvanometrie in ihrer Ausführung von den rein magnetischen absoluten Maassbestimmungen ganz getrennt werden können.

Die Analogie der oben angegebenen Methode zur Messung der absoluten Stromintensität i mit der Gauss'schen Messungsmethode des Erdmagnetismus T liegt zwar am Tage; doch findet ein wesentlicher Unterschied darin statt, dass dort die Idendität des Multiplikatorstroms und Solenoidstroms i von selbst gegeben ist, weil Multiplikator und Solenoid derselben Kette angehören, und dass, weil beide Instrumente *gleichzeitig* beobachtet werden, auch derselbe Werth von T für die Beobachtungen an beiden Instrumenten gilt, während hier, bei der absoluten Intensitätsmessung des Erdmagnetismus, die Ablenkungsbeobachtungen zur Bestimmung von M/T und die Schwingungsbeobachtungen zur Bestimmung von MT *nicht gleichzeitig gemacht werden können,* und daher die zur Zeit der Ablenkungsbeobachtungen geltenden Werthe von M und T von den zur Zeit der Schwingungsbeobachtungen immer etwas verschieden sind, weshalb besondere Hülfsbeobachtungen erforderlich sind, um sie auf einander reduciren zu können. Dieser Unterschied ist praktisch aber von solcher Bedeutung für die Messung, dass die *erstere Methode* sich aus diesem Grunde selbst für rein magnetische Zwecke, zur Bestimmung des absoluten Werths des Erdmagnetismus T sehr empfiehlt. Denn dass sie dazu brauchbar ist, leuchtet ein, weil, wenn durch Beobachtung der Sinus- oder Tangentenboussole $i/T = a$, und durch Beobachtung des Bifilargalvanometers $iT = b$ erhalten worden ist, nicht blos $i = \sqrt{ab}$ unabhängig von T, sondern auch $T = \sqrt{b/a}$ unabhängig von i gefunden werden kann. Ohne Zweifel übertrifft diese *galvanometrische* Messung des Erdmagnetismus T die *magnetometrische* nach Gauss an Einfachheit; die Erfahrung wird zeigen, ob sie nicht auch an Genauigkeit den Vorzug verdient.

Gleichzeitige Messung des Erdmagnetismus und der Stromintensität nach absoluten Maassen durch korrespondirende Beobachtungen an der Tangentenboussole und am Bifilargalvanometer.

1. Einrichtung des Bifilargalvanometers.

Das Solenoid eines Bifilargalvanometers besteht aus einer Anzahl Umwindungen eines mit Seide umsponnenen Kupferdrahts, die von einem System gleicher und koncentrischer Kreise wenig verschieden sind. Es kommt dabei auf eine sorgfältige Aufwickelung besonders zu dem Zwecke an, dass *die umwundene Fläche,* d. i. die Summe der von den Projektionen der einzelnen Umwindungen auf die Solenoidebene umschlossenen Flächenräume, sich recht genau bestimmen lasse. — Ferner soll das Solenoid, ebenso wie der Multiplikator der Tangentenboussole, einen grossen Durchmesser haben, aber aus anderen Gründen. Bei der Tangentenboussole soll der Durchmesser des Multiplikators gross sein, damit die Länge der Boussole nur einen kleinen Theil davon einnehme, ungeachtet *die Empfindlichkeit* mit wachsendem Durchmesser abnimmt; beim Bifilargalvanometer *wächst dagegen die Empfindlichkeit* mit dem Durchmesser des Solenoids. Denn derselbe Draht, welcher bei einfachem Durchmesser $2n$ Umwindungen bildet, bildet bei doppeltem Durchmesser zwar nur n Umwindungen, aber die von diesen n Umwindungen umschlossene Fläche ist doppelt so gross, wie die von jenen $2n$ Umwindungen umschlossene, und die Empfindlichkeit wächst proportional der umwundenen Fläche. — Die bifilare Aufhängung des Solenoids geschieht endlich, wie beim Elektrodynamometer, an zwei Kupferdrähten, von denen der eine den Strom zum Solenoid zuleitet, der andere ihn wieder ableitet. Der Einfluss der Elasticität dieser Drähte auf die *statische Direktionskraft* des Solenoids darf nicht vernachlässigt werden; aber mehr noch ist der Einfluss der Erwärmung dieser Drähte durch den Strom auf ihre Elasticität zu beachten und möglichst zu verhüten. Dieser Umstand nöthigt, zumal wenn es sich um grössere Stromstärken handelt, die kupfernen Aufhängungsdrähte sehr zu verstärken; es muss dann aber, um keine *zu grosse statische Direktionskraft* zu erhalten, der Abstand der beiden Aufhängungsdrähte von einander sehr vermindert werden. Beides wird am besten mit zwei starken, aber sorgfältig gerade gestreckten Kupferdrähten erreicht, um welche ein starker Seidenfaden immer abwechselnd bald um den einen, bald um den anderen gewunden wird. Die beiden Kupferdrähte werden dadurch von einander vollkommen isolirt und doch mit einander so fest verbunden gehalten, wie wenn sie einen einzigen Draht bildeten.

Ein solches Solenoid ist nun zu den folgenden Beobachtungen aus einem 177608 Millimeter langen, 2 Millimeter dicken, sehr weichen

Kupferdrahte dargestellt worden, welcher 84 Umwindungen nebst zwei Enden zur Verbindung mit den Aufhängungsdrähten, jedes 145 Millimeter lang, bildete. Die *umwundene Fläche S* ergab sich nach genauer Abmessung

$$S = 29\,786\,300 \text{ Quadratmillimeter.}$$

Zur Aufwickelung hatte eine kreisförmige Rinne gedient, welche von zwei genau abgedrehten Holzscheiben gebildet wurde, die nach der Aufwickelung des Drahts wieder aus einander genommen werden konnten, während die Drahtumwindungen fest zusammen gehalten wurden. Das auf diese Weise blos aus Draht, ohne Rahmen gebildete Solenoid wurde sodann zu grösserer Festigkeit mit einem starken Seidenbande eng umwunden. Die Kreisform des Solenoids war auf diese Weise vollkommen erhalten worden.

Zur bifilaren Aufhängung wurden zwei hart gezogene und gerade gestreckte Kupferdrähte von 2500 Millimeter Länge und 1 Millimeter Dicke auf die oben beschriebene Weise mit Seide umsponnen und dadurch fest zusammengehalten. Die unteren Enden beider Drähte waren Fig. 1 bei a, a' rechtwinkelig gebogen und mit den bei b, b' ebenfalls rechtwinkelig gebogenen Enden des Solenoiddrahts zusammengebunden.[1]) Die oberen Enden beider Drähte waren an einem an der Zimmerdecke angebrachten Torsionskreise befestigt und konnten daselbst mit den zu einem Grove'schen Becher und zur Tangentenboussole führenden Leitungsdrähten verbunden werden. An den vertikalen Verbindungsdrähten, unter b, b', konnte ein kleiner Planspiegel befestigt werden, vor welchem in 1886,7 Millimeter Entfernung eine in Millimeter getheilte Skale aufgestellt wurde, deren Spiegelbild durch ein mit Fadenkreuz versehenes Fernrohr, wie bei einem Magnetometer, beobachtet wurde.

Das Solenoid war endlich zur Bestimmung seines Trägheitsmoments mit einer virga transversalis versehen, die den horizontalen Durchmesser bildete und woran zwei Halbkilogramme symmetrisch bald in $43^3/_8$ Millimeter, bald in $954^1/_2$ Millimeter Entfernung von einander aufgehangen werden konnten. Im *ersteren* Falle ergab sich die Schwingungsdauer t, im Mittel aus 246 Schwingungen,

$$t = 20{,}168'',$$

im *letzteren* Falle die Schwingungsdauer t', im Mittel aus 195 Schwingungen,

$$t' = 24{,}909''.$$

Das in Ruhe befindliche Solenoid war dadurch in Schwingung gesetzt worden, dass ein Grove'scher Becher in die Kette eingeschaltet und

[1]) [Die hier erwähnte Figur hat sich im Nachlass nicht vorgefunden.]

etwa 20 Sekunden lang geschlossen erhalten worden war. Während der Schwingungsbeobachtungen aber blieb die Kette offen. Hieraus ergiebt sich nun das Trägheitsmoment k des Solenoids mit Einschluss der virga transversalis und beider Halbkilogramme in $43^3/_8$ Millimeter Entfernung von einander,

$$k = \tfrac{1}{4}\,(954{,}5^2 - 43{,}375^2)\,.\,10^6 \cdot \frac{t^2}{t'^2 - t^2} = 432\,725\,.\,10^6.$$

Da das Solenoid mit seinen Aufhängungsdrähten an einem Torsionskreise befestigt ist, so lässt es sich leicht so orientiren, dass die Solenoidebene mit der magnetischen Meridianebene zusammenfällt. Die feinste Prüfung, ob diese Einstellung genau stattfinde, erhält man, wenn man den Torsionskreis um 90° verstellt und beobachtet, ob alsdann der Ruhestand des Solenoids durch Schliessung oder Oeffnung der Kette, in der ein Grove'scher Becher eingeschaltet ist, eine Aenderung erleidet. Tritt eine Aenderung ein, so lässt sich in der Stellung des Torsionskreises leicht eine Korrektion anbringen, wodurch sie verschwindet. Wird darauf der Torsionskreis wieder um 90° zurückgestellt, so ist nun das Solenoid zum galvanometrischen Gebrauche genau orientirt. Sollte der Mangel eines genauen Torsionskreises die Ausführung einer solchen genauen Orientirung nicht gestatten, so genügt auch eine genäherte Orientirung, wenn man alsdann nur bei jedem Strome, der gemessen werden soll, durch einen Verbindungswechsel sowohl die positive, als auch die negative Solenoidablenkung beobachtet und aus ihren absoluten Werthen das Mittel nimmt.

Nach dieser Orientirung des Solenoids wurde das Ende des einen Aufhängungsdrahts am Torsionskreise mit dem zur Tangentenboussole führenden Drahte, das Ende des anderen Aufhängungsdrahts mit dem zum Grove'schen Becher führenden Drahte verbunden; durch Verbindung des zweiten Drahts des Grove'schen Bechers mit dem zweiten Drahte der Tangentenboussole konnte dann die Kette so geschlossen werden, dass derselbe Strom durch beide Galvanometer hindurchging.

Es wird kaum der Bemerkung bedürfen, dass alle Verbindungsdrähte von einander gehörig isolirt, jedoch paarweise so zusammengelegt wurden, dass alle Stromwirkungen von ihnen aus auf beide Galvanometer sich vollkommen aufhoben.

Endlich war die Einrichtung getroffen, dass in Beziehung auf den Schluss der Kette ein doppelter Wechsel stattfinden konnte, *erstens* nämlich eine Vertauschung der beiden vom Grove'schen Becher kommenden Drähte mit einander, wodurch die Richtung des Stroms in beiden Galvanometern zugleich umgekehrt werden konnte, *zweitens* eine Vertauschung der beiden vom Bifilargalvanometer kommenden Drähte

mit einander, wodurch die Richtung des Stroms im Bifilargalvanometer umgekehrt werden konnte, während sie in der Tangentenboussole unverändert blieb.

Hiernach wurden nun die zur Messung der absoluten Stromintensität erforderlichen korrespondirenden Beobachtungen an beiden Galvanometern zugleich gemacht, die hier in vollständiger Uebersicht gegeben werden sollen.

2. Beobachtungen.

Der Strom von *einem* GROVE'schen Becher ging durch beide Galvanometer. — Von den beiden vorhergehends beschriebenen Verbindungsweisen, sowohl des GROVE'schen Bechers mit der übrigen Kette, als auch des Bifilargalvanometers mit der übrigen Kette, möge die eine die *parallele*, die andere die *kreuzweise* heissen, und die erstere mit $=$, die letztere mit $\times$ bezeichnet werden.

Göttingen 1864, Okt. 14, im magnetischen Pavillon des physik. Instituts.

No.	Verbindungen des Bechers	Verbindungen des Bifilargalv.	Korrespondirende Ruhestände des Bifilargalv.	Korrespondirende Ruhestände der Tangentenboussole
1.	$=$	$=$	490,00	890,33
2.	$\times$	$=$	979,50	137,60
3.	$=$	$=$	488,13	895,06
4.	$=$	$\times$	981,70	841,16
5.	$\times$	$\times$	488,06	171,91
6.	$=$	$\times$	981,73	841,76.

Man sieht, dass No. 3 die Wiederholung von No. 1, und No. 6 die Wiederholung von No. 4 ist; nach Abrechnung dieser Wiederholungen bleiben vier wirklich verschiedene Paare von korrespondirenden Beobachtungen.

Nun hätte ein einziges Paar zur absoluten Strommessung genügt, wenn die beiden Galvanometer genau orientirt und hinreichend weit von einander entfernt gewesen wären, damit der Solenoidstrom keine merkliche Wirkung auf die Boussole, und der Multiplikarstrom keine auf das Solenoid üben könnte. Es fehlte aber bei diesen Versuchen dem Bifilargalvanometer ein genauer Torsionskreis zur feineren Orientirung, und die beiden Galvanometer mussten in einem kleinen Zimmer ziemlich nahe bei einander aufgestellt werden, wo die Wirkung des Solenoidstroms auf die Boussole noch ziemlich merklich hervortrat. Es schien aber besonders lehrreich zu sein, an einem Beispiele zu zeigen, wie der Einfluss der erwähnten, durch vollkommenere Einrichtung leicht zu beseitigenden, Umstände durch die angeführte Kombination von Beob-

achtungen fast gänzlich eliminirt werden könne. Dazu kommt, dass jene Kombination stets mit Vortheil angewendet wird, auch dann, wenn jene störenden Umstände nahezu beseitigt sind.

Nachdem man in obiger Tafel für die Beobachtungen in No. 1 und 3, sowie in No. 4 und 6, ihre Mittelwerthe gesetzt hat, ergeben sich leicht die Ablenkungen, wie sie *bei genauer Orientirung* beider Galvanometer beobachtet worden sein würden, nämlich

bei der Verbindung des Bifilargalv.	Ablenkung des Bifilargalv.	Ablenkung der Tangentenb.
=	245,22	377,55
$\times$	246,825	334,775.

Diese in Skalentheilen ausgedrückten Ablenkungen x werden, bei einem Abstand des Spiegels von der Skale von R Skalentheilen, nach folgender Gleichung auf Bogenwerthe φ reducirt, nämlich $\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} (x/R)$. Nun war für das *Bifilargalvanometer* $R = 1886{,}7$ Skalentheile, für die *Tangentenboussole* $R = 1219{,}5$ Skalentheile, bezeichnet man also mit φ und ψ ihre korrespondirenden Ablenkungen in Bogenwerthen, so ergiebt sich folgende Tafel:

Bei der Verbindung des Bifilargalv.	log tang φ	log tang ψ
=	8,810 103	9,179 712
$\times$	8,812 892	9,129 580.

Uebt nun der Strom im Solenoide eine merkliche Wirkung auf die Boussole aus, so darf

$$\text{für die} = \text{Verbindung, } \operatorname{tang} \psi = (a + b) \operatorname{tang} \varphi,$$
$$\text{für die} \times \text{Verbindung, } \operatorname{tang} \psi = (a - b) \operatorname{tang} \varphi$$

gesetzt werden, wonach

$$\log (a + b) = 9{,}179\,712 - 8{,}810\,103$$
$$\log (a - b) = 9{,}129\,580 - 8{,}812\,892,$$

oder $a = 2{,}20777$, $b = 0{,}13435$ sich ergeben. Mit diesen Werthen von a und b werden nun die Werthe von tang ψ, wie sie bei grosser Entfernung beider Galvanometer von einander aus den Beobachtungen unmittelbar erhalten worden wären, gefunden, nämlich für

	log tang φ	log tang ψ
	8,810 103	9,154 059
	8,812 892	9,156 846
im Mittel	8,811 497	9,155 452.

Doch ist der Werth von tang ψ, wenn er von dem Einfluss der Torsionskraft des Fadens, an welchem die Boussole aufgehangen war, befreit werden soll, im Verhältniss von 80 : 81 zu vergrössern, also:

$$\log \operatorname{tang} \psi = 9{,}160\,847 \text{ für } \log \operatorname{tang} \varphi = 8{,}811497.$$

3. Berechnung der Beobachtungen.

Das Trägheitsmoment des Solenoids k (incl. virga transversalis und 2 Halbkilogramme in $43^3/_8$ Millimeter Entfernung von einander) ist oben gefunden worden:

$$k = 432\,725 \,.\, 10^6.$$

Dabei hatte sich die Schwingungsdauer

$$t = 20{,}168''$$

ergeben. Da aber diese Schwingungsdauer kleineren Aenderungen unterworfen ist, die hauptsächlich von dem Einfluss der Temperatur auf die Elasticität der Aufhängungsdrähte herrührt, so wurde sie unmittelbar vor den im vorigen Abschnitt beschriebenen Beobachtungen nochmals bestimmt und nun

$$t = 20{,}1589''$$

gefunden.

Hiernach ergiebt sich die *statische Direktionskraft des Solenoids*

$$D = \frac{\pi^2 k}{t^2} = 105094 \,.\, 10^5,$$

folglich, da die *umwundene Solenoidfläche* in Quadratmillimetern

$$S = 29\,786\,300$$

war,

$$\log \frac{D}{S} = 2{,}547\,561.$$

Nun ist aber das Produkt TSi die vom Erdmagnetismus T auf den Strom i im Solenoid S ausgeübte Direktionskraft, und die im vorigen Abschnitte bestimmte Tangente der Ablenkung φ ist dem Quotienten aus dieser Direktionskraft durch die statische Direktionskraft D gleich, woraus sich ergiebt:

$$\log \operatorname{tang} \varphi + \log \frac{D}{S} = 8{,}811\,497 + 2{,}547\,561 = 1{,}359\,058 = \log iT.$$

Ferner ist nach der Theorie der Tangentenboussole die Tangente der Ablenkung der Boussole ψ dem Quotienten aus der vom Strom i

im Multiplikator (πr^2) auf die Boussole m ausgeübten Direktionskraft, $= 2\pi r^2 i . m/r^3$, durch die vom Erdmagnetismus T auf die Boussole m ausgeübte Direktionskraft, $= mT$, gleich, wo r den Halbmesser des Multiplikator bezeichnet; also

$$\text{tang}\, \psi = \frac{2\pi i}{rT}.$$

Nun war bei unserer Tangentenboussole

$$r = 300{,}3 \text{ Millimeter};$$

folglich ist:

$$\log \text{tang}\, \psi + \log \frac{r}{2\pi} = 9{,}160\,847 + 1{,}679\,375 = 0{,}840\,222 = \log \frac{i}{T}.$$

Addirt man zu dieser Gleichung die vorige, nämlich

$$1{,}359\,058 = \log iT,$$

so ergiebt sich

$$\log i^2 = 2{,}199\,280,$$

woraus die gesuchte Stromintensität i nach absolutem Maasse erhalten wird, ohne dass man den Werth des Erdmagnetismus T zu kennen braucht, nämlich

$$i = 12{,}579.$$

Besitzt man aber eine genaue Kenntniss von dem Werthe des Erdmagnetismus T, so kann diese Kenntniss zur Prüfung der Genauigkeit der Beobachtungen dienen, auf denen diese Stromintensitätsmessung beruht. Subtrahirt man nämlich die Gleichung $0{,}840\,222 = \log (i/T)$ von der Gleichung $1{,}359\,058 = \log (iT)$, so erhält man $0{,}518\,836 = \log T^2$, findet also aus den nämlichen Beobachtungen, aus welchen die Stromintensität i bestimmt worden ist, auch den Werth des Erdmagnetismus T nach absolutem Maasse, nämlich

$$T = 1{,}81726,$$

und es kann die Uebereinstimmung des aus diesen Beobachtungen erhaltenen Werths mit dem schon bekannten, aus den genauesten magnetometrischen Messungen gefundenen, zum Beweis der Genauigkeit jener Beobachtungen dienen. Der oben angeführte Werth von T stimmt wirklich mit dem Mittel aus den für Göttingen im Monat *Oktober 1864*, wo jene Beobachtungen gemacht wurden, aus magnetometrischen Messungen bestimmten Werthen von T genauer überein, als die letzteren unter einander.

An einem anderen Tage sind dieselben korrespondirenden Beobachtungen an beiden Galvanometern nochmals wiederholt worden, jedoch mit dem Unterschiede, dass der Strom von *zwei* GROVE'schen Bechern, statt von einem, hervorgebracht und zugleich der Widerstand der Kette durch Einschaltung einer *Einheit der Siemens'schen Skale* vergrössert wurde. Aus den unter diesen Verhältnissen an beiden Galvanometern gemachten korrespondirenden Beobachtungen ergab sich der Werth der Stromintensität

$$i = 13{,}386,$$

der unter so verschiedenen Verhältnissen mit dem vorigen nicht verglichen werden kann; aus denselben korrespondirenden Beobachtungen wurde aber zugleich auch der Werth des Erdmagnetismus T erhalten, nämlich

$$T = 1{,}81688,$$

dessen Uebereinstimmung mit dem vorigen nichts zu wünschen übrig lässt.

Es wird dadurch bestätigt gefunden, was oben bemerkt worden ist, dass nämlich nicht blos zu *galvanischen* Zwecken, sondern auch zu *rein magnetischen*, zur Bestimmung des absoluten Werths des Erdmagnetismus T, die oben angewendete Methode korrespondirender Galvanometerbeobachtungen sich sehr empfiehlt, nicht blos durch ihre grössere Einfachheit, sondern auch, wie aus diesen ersten Proben hervorzugehen scheint, durch die noch grössere dabei erreichbare Präcision der Resultate.

Einrichtung eines vollständigen Messapparats für alle absoluten Maassbestimmungen in der Galvanometrie.

Die absoluten Maassbestimmungen in der Galvanometrie umfassen ausser den *Stromintensitätsmessungen* noch die *Messung elektomotorischer Kräfte* und die *Widerstandsmessungen.*

Geben nun die Kombination des *Bifilargalvanometers* mit der *Tangentenboussole* und die damit ausgeführten korrespondirenden Beobachtungen das Mittel zu absoluten Stromintensitätsmessungen, so liegt die Frage sehr nahe, ob ein solcher Apparat sich nicht zu einem vollständigen Messapparat für alle absoluten Maassbestimmungen in der Galvanometrie ergänzen lasse.

In der That ist das Solenoid des Bifilargalvanometers mit seiner grossen umwundenen Fläche $S = 29\,786\,300$ Quadratmillimeter, bei sehr geringem Widerstande, und bei seiner Drehbarkeit um seinen vertikalen Durchmesser, zum Induktor bei der absoluten Widerstandsmessung vorzüglich geeignet. Es bedarf nur der Fixirung der schon vorhandenen

vertikalen Drehungsaxe, um eine Drehung von 180° mit einer Kurbel schnell ausführen zu können, ohne Gefahr, dass die Drehungsaxe dabei geneigt würde.

Nachdem eine solche Einrichtung, zum Zweck eines Probeversuchs, am Bifilargalvanometer getroffen war, wurden die Enden des Solenoiddrahts mit den Enden des Multiplikatordrahts eines *empfindlichen* Galvanometers verbunden und sodann nach der Methode der Zurückwerfung folgende Beobachtungen gemacht, wobei der Abstand des Spiegels von der Skale $r = 1500$ Skalentheile war. Die aus dem Mittel aus je vier auf einander folgenden Beobachtungen sich ergebenden Ruhestände sind den beobachteten Werthen *A, B, C, D* beigefügt.

A	*B*	*C*	*D*
417,0	557,0	594,0 (509,1)	468,0 (509,2)
418,0 (509,5)	557,0 (509,9)	596,0 (510,0)	469,0 (510,0)
418,0 (509,9)	557,0 (509,6)	595,0 (509,4)	468,0 (509,3)
417,0 (509,2)	557,0 (509,4)	595,0 (509,5)	469,0 (509,7)
417,0 (510,1)	559,0 (510,4)	596,0	470,0

woraus folgende Tafel der Elongation (bei angemessener Ergänzung der für die ersten und letzten Beobachtungen fehlenden Ruhestände) sich ergiebt:

	A	*B*	*C*	*D*
	— 92,1	+ 47,9	+ 84,9	— 41,2
	— 91,5	+ 47,1	+ 86,0	— 41,0
	— 91,9	+ 47,4	+ 85,6	— 41,3
	— 92,2	+ 47,6	+ 85,5	— 40,7
	— 93,1	+ 48,6	+ 85,6	— 40,4
Mittel	— 92,16	+ 47,72	+ 85,52	— 40,92

Der Mangel der Symmetrie zwischen positiven und negativen Ausschlägen hatte seinen Grund darin, dass durch Missverständniss die Induktionsstösse in den Zeitmomenten erfolgten, wo die Nadel den Skalentheil 516 passirte, statt den der Ruhe entsprechenden Skalentheil 510. Doch können die Differenzen $2a' = (C - A)$ und $2b' = (B - D)$ davon als unabhängig betrachtet werden

$$2a' = 177{,}68,$$
$$2b' = 88{,}64.$$

Wird hiernach $a'/r = \text{tg}\,2\varphi$, $b'/r = \text{tg}\,2\varphi'$ und $2\sin\frac{1}{2}\varphi = a$, $2\sin\frac{1}{2}\varphi' = b$ gesetzt, so erhält man

$$a = 0{,}029\,620,$$
$$b = 0{,}014\,776,$$

folglich

$$\lambda_1 = \text{lg nat}\,\frac{a}{b} = 0{,}69549,$$

$$\gamma = \left(\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\right) e^{-\frac{\lambda_1}{\pi}\,\text{arc tg}\,\frac{\lambda_1}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi^2+\lambda_0^2}}{t_0} = 0{,}04991 \cdot \frac{\sqrt{\pi^2+\lambda_0^2}}{t_0}.$$

Aus beobachteten Schwingungen des empfindlichen Galvanometers hatte sich ergeben

$$t_0 = 32{,}9 \qquad \lambda_0 = 0{,}01023,$$

und ausserdem konnte das Trägheitsmoment der Nadel des empfindlichen Galvanometers

$$k = 1132 \,.\, 10^6$$

und der Erdmagnetismus

$$T = 1{,}82,$$

nebst dem Werthe von

$$S^0 - S_0 = 2S = 59\,572\,600$$

als gegeben vorausgesetzt werden, woraus

$$\left.\begin{aligned} \lg \frac{(S^0-S_0)^2 T^2}{k} &= 7{,}01639 \\ \lg \frac{\pi^2+\lambda_0^2}{t_0^{\,2}\gamma^2} &= 2{,}60365 \\ \lg \frac{2(\lambda_1-\lambda_0)}{\sqrt{\pi^2+\lambda_1^2}} &= 9{,}62934 \\ \lg \frac{t_0}{\sqrt{\pi^2+\lambda_0^2}} &= 1{,}02005 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 10{,}26943 &= \log w, \\ 18596 \,.\, 10^6 &= w. \end{aligned}$$

gefunden wird, während sich die Formel für w auf folgende Weise ergiebt.

Nach den Ohm'schen Gesetzen erhält man in absoluten Maassen

$$w = \frac{e}{i}.$$

Dies gilt nicht blos bei konstanten Säulen und beharrlichen Strömen, sondern auch für alle einzelnen Augenblicke dt', dt''... eines Induktionsstosses, für welche $e = e'$, e''..., $i = i'$, i''..., folglich

$$w = \frac{e'}{i'} = \frac{e''}{i''} = \ldots = \frac{e'dt'}{i'dt'} = \frac{e''dt''}{i''dt''} = \ldots,$$

oder, wenn die Zeitelemente $dt', dt''\ldots$ so gewählt werden, dass $i'dt' = i''dt'' = \ldots$, wobei die Zahl dieser Zeitelemente $= n$ sei,

$$w = \frac{1}{n}\left(\frac{e'dt' + e''dt'' + \ldots}{i'dt}\right) = \frac{\int e dt}{\int i dt}.$$

Nun ist nach dem Gesetz der magnetischen Induktion in absolutem Maasse

$$e = T\frac{dS}{dt} \quad \text{folglich} \quad \int e dt = T(S^0 - S_0).$$

Statt nun aber, nach der Theorie der Tangentenboussole i aus $\operatorname{tang}\varphi$ durch Multiplikation mit $[r/2\pi].T$ und $\int i dt$ aus γ durch Multiplikation mit $[r/2\pi].[k/m]$ erhalten wird; so wird nach der Theorie des empfindlichen Galvanometers i aus $\operatorname{tang}\varphi$ durch Multiplikation mit

$$\pi\sqrt{\frac{k\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{2w\lambda t^3}}$$

und $\int i dt$ aus γ durch Multiplikation mit

$$\sqrt{\frac{k\tau}{2w\lambda}} = \sqrt{\frac{kt_0\sqrt{\frac{\pi^2+\lambda_1^2}{\pi^2+\lambda_0^2}}}{2w(\lambda_1-\lambda_0)}}$$

erhalten; folglich

$$w = \frac{T(S^0-S_0)}{\gamma}\cdot\sqrt{\frac{2w(\lambda_1-\lambda_0)}{kt_0\sqrt{\frac{\pi^2+\lambda_1^2}{\pi^2+\lambda_0^2}}}} = \frac{T^2(S^0-S_0)^2}{\gamma^2}\cdot\frac{2(\lambda_1-\lambda_0)}{kt_0}\cdot\sqrt{\frac{\pi^2+\lambda_0^2}{\pi^2+\lambda_1^2}}.$$

Abschluss.

A. Formeln.

1. Aus der Theorie der Tangentenboussole hat sich ergeben

$$i = \frac{rT}{2\pi}\cdot\operatorname{tang}\varphi.$$

Aus der Theorie der magnetischen Induktion hat sich ergeben

$$e = T\cdot\frac{dS}{dt}.$$

Nach den OHM'schen Gesetzen war

$$w = \frac{e}{i} = \frac{2\pi}{r} \operatorname{cotg} \varphi \cdot \frac{dS}{dt}.$$

2. dS/dt ist veränderlich und keiner genauen Bestimmung durch Messung fähig; da folglich auch e veränderlich ist, so unterscheidet man in dem Zeitelement dt', dt'', $dt'''\ldots$ die Werthe von e e', e'', $e'''\ldots$ und auf gleiche Weise von i i', i'', $i'''\ldots$

Nach dem OHM'schen Gesetze ist dann

$$w = \frac{e'}{i'} = \frac{e''}{i''} = \frac{e'''}{i'''} \cdots$$

oder

$$w = \frac{e' dt'}{i' dt'} = \frac{e'' dt''}{i'' dt''} = \frac{e''' dt'''}{i''' dt'''} \cdots$$

Die Zeitelemente dt', dt'', $dt'''\ldots$ können nun so gewählt werden, dass

$$i' dt' = i'' dt'' = i''' dt''' = \ldots$$

Man erhält dann, die Zahl der Zeitelemente $= n$ gesetzt,

$$w = \frac{1}{n} \left(\frac{e' dt'' + e'' dt'' + e''' dt''' + \ldots}{i' dt'} \right) = \frac{\int e dt}{\int i dt},$$

worin $\int e dt = T \int [dS/dt]\, dt = T(S^0 - S_0)$ messbar ist. Dazu giebt die Theorie der Tangentenboussole

$$\int i dt = \frac{r}{2\pi} \cdot \frac{k}{m} \cdot \gamma, \text{ also } w = \frac{2\pi}{r\gamma} \cdot \frac{mT}{k} \cdot (S^0 - S_0).$$

3. Bei einer Tangentenboussole sind die nach der Zurückwerfungsmethode zu beobachtenden Elongationen a und b zu klein, um eine genaue Bestimmung von γ zu gestatten; daher muss die Tangentenboussole mit einem empfindlichen Galvanometer vertauscht werden, wo die Elongationen a und b so gross sind, dass sie eine genaue Bestimmung von γ gestatten.

Aus der Theorie empfindlicher Galvanometer hat sich aber ergeben

$$\int i dt = \gamma \cdot \sqrt{\frac{k\tau}{2w\lambda}}; \text{ folglich}$$

$$w = \frac{T(S^0 - S_0)}{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{2w\lambda}{k\tau}}; \text{ folglich}$$

$$w = \frac{T^2(S^0 - S_0)^2}{\gamma^2} \cdot \frac{2\lambda}{k\tau}.$$

B. Beobachtungen.

1. Aus Beobachtungen der Schwingungsdauer

$$t_0 = 32{,}9$$
$$\lambda_0 = 0{,}01023.$$

2. Aus Beobachtungen nach der Zurückwerfungsmethode die beiden Elongationen

$$a = 0{,}029\,620$$
$$b = 0{,}014\,776$$

woraus

$$\lambda_1 = \log\text{ nat }\frac{a}{b} = 0{,}69549,$$

$$\gamma = \left(\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\right) e^{-\frac{\lambda_1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda_1}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi^2+\lambda_0^2}}{t_0},$$
$$= 0{,}04991 \cdot \frac{\sqrt{\pi^2+\lambda_0^2}}{t^0}.$$

3. Gegebene bekannte Werthe

des Trägheitsmoments der Galvanometernadel . . k,
des Erdmagnetismus T,
der vom Induktordraht umwundenen Fläche . . S,

nämlich

$$k = 1132 \,.\, 10^6,$$
$$T = 1{,}82,$$
$$S^0 - S_0 = 2S = 59\,572\,600.$$

C. Berechnung.

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_0,$$

$$\left.\begin{aligned} \tau &= t\sqrt{1+\frac{\lambda_1^2}{\pi^2}},\\ t_0 &= t\sqrt{1+\frac{\lambda_0^2}{\pi^2}}, \end{aligned}\right\}\ \text{folglich}$$

$$\tau = t_0 \cdot \sqrt{\frac{\pi^2+\lambda_1^2}{\pi^2+\lambda_0^2}}. \quad \text{Hieraus}$$

$$w = \frac{T^2 . (S^0 - S_0)^2}{\gamma^2} \cdot \frac{2(\lambda_1 - \lambda_0)}{k t_0} \cdot \sqrt{\frac{\pi^2+\lambda_0^2}{\pi^2+\lambda_1^2}},$$

$$w = \frac{T^2 . (S^0 - S_0)^2}{k} \cdot \frac{2(\lambda_1-\lambda_0)}{\sqrt{\pi^2+\lambda_1^2}} \cdot \frac{\pi^2+\lambda_0^2}{\gamma^2 . t_0^2} \cdot \frac{t_0}{\sqrt{\pi^2+\lambda_0^2}}.$$

Aus 1. $\log \frac{t_0}{\sqrt{\pi^2 + \lambda_0^2}} = 1,02005.$

Aus 1. und 2. $\log \frac{2(\lambda_1 - \lambda_0)}{\sqrt{\pi^2 + \lambda_1^2}} = 9,62934.$

Aus 2. $\log \frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\gamma^2 . t_0^2} = 2,60365.$

Aus 3. $\log \frac{T^2 (S^0 - S_0)^2}{k} = 7,01639.$

$$\log w = 10,26943.$$

$$w = 18596,10^6.$$

Elektroskopische und elektrodynamische Wirkungen der freien Elektricität geschlossener Ketten.

Approximative Berechnung derjenigen Elektricitätsmenge, welche in einer geschlossenen Kette vertheilt sein muss, wenn eine dem Widerstande der Kette gleiche elektromotorische Kraft an einer Stelle der Kette wirkt, damit die Stromintensität in allen Theilen der Kette = 1 werde.

In einer geschlossenen Kette kann ein gleichförmiger Strom ohne Ladung nur dann bestehen, wenn die elektromotorischen Kräfte in allen Elementen der Kette dem Widerstande der Elemente proportional sind. Wenn diese Proportionalität nicht stattfindet, so ist die Stromintensität in den verschiedenen Elementen verschieden und in Folge dieser Ungleichheiten wird an einigen Stellen der Kette (wo die Stromintensität abnimmt) positive Elektricität an anderen Stellen (wo die Stromintensität zunimmt) negative Elektricität ausgeschieden, oder die Kette wird geladen. Aus dieser Ladung der Kette ergeben sich neue elektromotorische Kräfte, durch welche die grösseren Stromintensitäten vermindert, die kleineren vergrössert werden. Die übrig bleibenden Ungleichheiten bringen neue Ladungen und dadurch wieder neue elektromotorische Kräfte hervor, wodurch die übrig gebliebenen Ungleichheiten der Stromintensitäten eine neue Ausgleichung erfährt, und dies geht fort, bis sich eine bestimmte Ladung der Kette hergestellt hat, bei welcher diese in allen Elementen gleiche Stromintensität bestehen kann.

Diese Ladung der Kette hat grosse Wichtigkeit für die Lehre von der Bildung des Stroms, ist aber bisher für den praktischen Gebrauch von geringer Bedeutung gewesen, weil sie sich stets augenblicklich und von selbst herstellte, und ihre eigenthümlichen, vom Strome unabhängigen Wirkungen so gering sind, dass sie mit den feinsten Beobachtungsmitteln kaum wahrgenommen werden können. Man bezeichnete diese kaum wahrnehmbaren Wirkungen der Ladung einer geschlossenen Kette als ihre elektroskopischen Wirkungen, zu deren Erforschung bisher nur wenige und unvollkommene Versuche gemacht worden sind.

Diese elektroskopischen Wirkungen haben nun aber neuerlich eine grössere praktische Bedeutung gewonnen, z. B. für die Rhumkorff'schen *Maschinen,* wo die Forderungen an die Isolirung der Drahtwindungen, um das Ueberspringen der Funken zu vermeiden, von dieser Ladung abhängt, so wie auch die Schlagweite der Funken von einem Ende des inducirten Drahts zum anderen, ferner für die *elektrische Telegraphie,* wo die Schnelligkeit der Zeichengebung wesentlich von der Schnelligkeit der Strombildung abhängt. Diese Strombildung wird aber sehr verzögert, wenn die für einen gleichförmigen Strom erforderliche Ladung der Kette sich z. B. unter dem Einflusse eines Kondensators bilden soll, wie es bei submarinen Telegraphen der Fall ist, wo die den isolirten Draht umschliessende Metallröhre nebst dem umgebenden Wasser einen solchen Konduktor bildet.

Um diese Verzögerung der Ladung und die davon abhängige Verzögerung der Signale zu vermeiden, wird es nothwendig werden, den Strom statt durch die Erde oder durch das Meer, ihn durch einen zweiten Leitungsdraht zurückzuführen, der isolirt von dem ersten mit ihm in demselben Kabel eingeschlossen ist. Die entgegengesetzt gleichen Ladungen, welche alsdann diese beiden Drähte an jeder Stelle bei Bildung eines Stroms erhalten müssen, kompensiren sich alsdann in ihrer Wirkung auf die umschliessende Metallröhre, am vollkommensten, wenn der Abstand der beiden Drähte von einander gegen ihren Abstand von der Metallröhre sehr klein ist. Die Metallröhre wird alsdann keine merkliche Ladung annehmen und folglich auch auf die Bildung der Ladung in den eingeschlossenen Drähten keine merkliche Rückwirkung ausüben. — Zugleich wird dadurch die Induktion von Strömen in der Kette durch die Variationen des Erdmagnetismus vermieden.

Dadurch hat die Erforschung der elektroskopischen Wirkungen einer geschlossenen Kette und der Gesetze der Ladung, von denen sie abhängen, ein praktisches Interesse gewonnen. Zu diesem Zwecke können nun die Versuche nicht mehr genügen, auf welche diese Untersuchung bisher beschränkt geblieben ist, nämlich diese Ladung der geschlossenen Kette zur Ladung feiner Kondensatoren und empfindlicher Elektrometer oder Elektroskope zu gebrauchen, woher der Name der *elektroskopischen Wirkungen* der Kette rührt.

Sehr wichtig sind für diese Untersuchungen die Angaben, welche man mit Hülfe der submarinen Telegraphen selbst über die Dauer der Bildung gleichförmiger Ströme erhalten wird; jedoch ist leicht zu übersehen, dass auch die genauesten Beobachtungen solcher Telegraphen keine genauen Bestimmungen von dieser Bildungsdauer geben werden wegen der mannigfaltigen anderen Einflüsse, welche dabei mitwirken,

von denen die Zeit zwischen Zeichengeben und Zeichenbeobachtung ebenfalls abhängt. Dazu kommt, dass bei solchen Telegraphen die bei der Strombildung einflussreichsten Verhältnisse unveränderlich sind und daher nur isolirte Data geben, auf welche sich keine Gesetze begründen lassen, wenn dieselben nicht schon auf anderem Wege gefunden worden sind.

Einen anderen Weg bieten nun die elektrischen Schwingungen dar, wo sich gleichförmige Ströme in geschlossenen Ketten bilden, aber nur von sehr kurzer Dauer und wechselnder Richtung. Es bilden sich dabei auch jene elektrischen Ladungen, aber abwechselnd ganz verschiedene Ladungen. Der Uebergang von einer Ladung zur andern oder diese Bildung einer anderen Vertheilung ist nun aber mit einer von dem in der ganzen Kette gleichen Strome zu unterscheidenden Bewegung verbunden, welche in den einzelnen Theilen der Kette verschieden ist.

Es leuchtet hieraus ein, dass eine in allen Theilen der Kette gleiche synchronische Schwingung streng genommen nicht allein stattfinden kann, wenn die Erregung von einer Stelle der Kette aus geschieht, sondern sie ist dann nothwendig mit einer anderen zwar ebenfalls näherungsweise als synchronisch zu betrachtenden, aber in den verschiedenen Theilen der Kette sehr ungleichen Schwingung verbunden. Aus dieser letzteren Schwingung ergeben sich unmittelbar nach den Ampère'schen Gesetzen *elektrodynamische Kräfte*, welche die beobachtete Ablenkung des Dynamometers modificiren; ferner aber ergeben sich nach den Gesetzen der Elektrostatik und Induktion neue elektromotorische Kräfte, welche die Stromintensität modificiren und daher auch mittelbar auf das Dynamometer wirken und durch genaue Dynamometerbeobachtungen müssen wahrgenommen und erforscht werden können.

Das Element der geschlossenen Kette, in welchem die elektromotorische Kraft ω wirkt, sei zwischen den Querschnitten aa und bb (Fig. 1) eingeschlossen. Die elektromotorische Kraft sei dabei so vertheilt, dass sie von beiden Grenzflächen nach der Mitte zu proportional dem Abstande von der Grenzfläche wachse. aa und bb seien auf beiden Seiten mit positiver Elektricität so belegt, dass das Potential in den (unendlich kleinen) Räumen zwischen beiden Belegungen von aa und bb konstant sei. Die mittlere Dicke dieser Belegung sei $= + e$. Da also $[dV/dx]_{-\varepsilon} = 0$ zwischen den beiden Belegungen ist, so ergiebt sich jenseits der Belegung

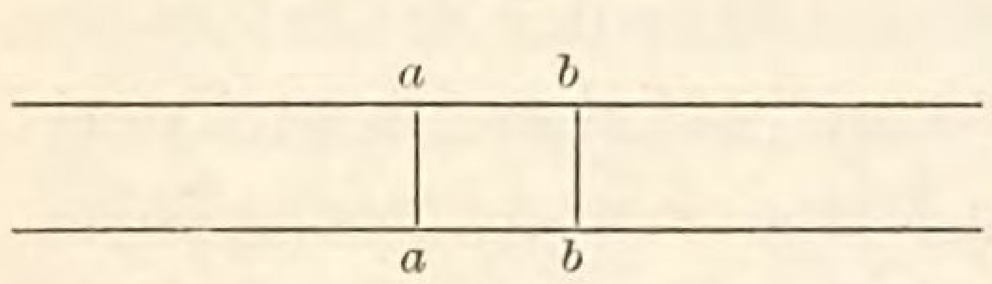


Fig. 1.

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{+\varepsilon} - \left(\frac{dV}{dx}\right)_{-\varepsilon} = \left(\frac{dV}{dx}\right)_{+\varepsilon} = 4\pi e,$$

wenn Abstossungskräfte positiv genommen werden.

Nun denke man sich die nach bb zu gerichtete Belegung gleichförmig bis zur Mitte zwischen aa und bb vertheilt und nenne die Dichtigkeit der in dem halben Raume des betrachteten Elements gleichförmig vertheilten positiven Elektricität k und den halben Abstand bb von aa nenne man a, so ist

$$ka = e.$$

In diesem Raume ist dann

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 4\pi k,$$

wenn $d^2V/dy^2 = d^2V/dz^2 = 0$ angenommen wird, und Abstossungskräfte positiv genommen werden.

Hieraus folgt

$$\frac{dV}{dx} = 4\pi kx,$$

wenn x von aa an gerechnet wird, wo $dV/dx = 0$ ist. Folglich der Integralwerth der elektromotorischen Kraft

$$\int_0^a \frac{dV}{dx} = dx = \int_0^a 4\pi kx\,dx = 2\pi ka^2 = 2\pi ea,$$

bb sei ferner auf beiden Seiten mit negativer Elektricität so belegt, dass das Potential in dem (unendlich kleinen) Raume zwischen beiden Belegungen konstant sei. Die mittlere Dicke dieser Belegung sei $= -e$. Da also $[dV/dx)_{+\varepsilon} = 0$ (wo $+\varepsilon$ im Zwischenraume liegt), so ergiebt sich

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{-\varepsilon} - \left(\frac{dV}{dx}\right)_{+\varepsilon} = \left(\frac{dV}{dx}\right)_{-\varepsilon} = 4\pi e.$$

Denkt man sich nun die nach aa zu gerichtete Belegung gleichförmig bis zur Mitte zwischen bb und aa vertheilt und nennt die Dichtigkeit der in dem halben Raume des betrachteten Elements gleichförmig vertheilten negativen Elektricität $-k$ und den halben Abstand aa von bb a, so ist

$$ka = e.$$

In diesem Raume ist dann

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -4\pi k,$$

wenn $d^2V/dy^2 = d^2V/dz^2 = 0$ angenommen wird und Abstossungskräfte als positiv angenommen werden.

Hieraus folgt

$$\frac{dV}{dx} = 4\pi k(a - x),$$

wenn x von der Mitte an gerechnet wird, so dass, für $x = a$, $dV/dx = 0$ ist. Folglich der Integralwerth der elektromotorischen Kraft

$$\int_0^a \frac{dV}{dx}\,dx = \int_0^a 4\pi k\,(a - x)\,dx = 2\pi k a^2 = 2\pi e a.$$

Hieraus ergiebt sich die elektromotorische Kraft für das ganze betrachtete Element

$$= 4\pi e a.$$

Man setze diese elektromotorische Kraft der gegebenen $(-E)$ entgegengesetzt gleich, folglich

$$4\pi e a = E.$$

Hierauf setze man nun statt der äusseren Belegung von aa eine Belegung der Oberfläche des Drahts von aa bis zu dem Punkte, welcher die ganze Drahtlänge halbirt und bezeichne diese halbe Drahtlänge mit L. Die Dicke ε dieser Belegung wachse von dem Halbirungspunkte bis aa von o bis $[8a/\pi r]\,.\,e$[1]) proportional mit der Drahtlänge vom Halbirungspunkte bis zu dem betrachteten Punkte, so wird, wenn der Draht sehr lang ist im Vergleich zu seiner Dicke, in der Drahtlänge L die elektromotorische Kraft $(-\frac{1}{2}E)$ vertheilt wirken, und es wird ihre Vertheilung approximativ als gleichförmig betrachtet werden können.

[1]) Nach CLAUSIUS (POGGENDORFF's Annalen 1852, Bd. 86, S. 203) wird bei einem Kondensator, wenn a den Halbmesser, c den Abstand der Platten bezeichnet, die Ladung der einen Platte ausgedrückt durch

$$M = -\frac{a^2}{4c}\cdot F\left[1 + \frac{c}{a\pi}\left(\lg\frac{17{,}68\,a}{c} + 2\right)\right].$$

Die der anderen Platte durch

$$N = \frac{a^2}{4c}\cdot F\left[1 + \frac{c}{a\pi}\left(\lg\frac{17{,}68\,a}{c} - 2\right)\right].$$

Fügt man zu der gebundenen Elektricität N so viel freie Elektricität N', dass $N + N' = -M$ ist, so giebt $N'/(N + N')$ die freie Elektricität in Theilen der ganzen Ladung a. Es ist aber

$$\frac{N'}{N + N'} = \frac{4c}{a\pi\left[1 + \frac{c}{a\pi}\left(\lg\frac{17{,}68\,a}{c} + 2\right)\right]},$$

oder für sehr kleine c/a, $N'/(N + N') = 4c/a\pi$. Setzt man in unserem Falle $2a$ für c und r für a, so ist $N'/(N + N') = 8a/r\pi$ der Bruchtheil der freien Elektricität von der ganzen Ladung. Entspricht also der ganzen Ladung die Dichtigkeit e, so entspricht der freien Ladung die Dichtigkeit $[8a/r\pi]\,.\,e$.

Es ergiebt sich aber alsdann die Ladung der Drahtlänge L, durch welche diese gleichförmige Vertheilung der halben gegebenen elektromotorischen Kraft $(-\frac{1}{2}E)$ bewirkt wird, wenn r den Halbmesser des Drahtes bezeichnet

$$=\int_0^L 2\pi r\varepsilon\, dx,$$

worin

$$\varepsilon=\frac{8ae}{r\pi L}\cdot x$$

ist, folglich

$$=\int_0^L \frac{2\pi re}{L}\cdot\frac{8a}{r\pi}x\,dx=\pi r\cdot\frac{8a}{r\pi}eL=\frac{2LE}{\pi}\cdot$$

Dieselbe Menge negativer Elektricität findet man auf der anderen Drahthälfte vertheilt. Bezeichnet man also die ganze Drahtlänge $l=2L$, so ist

$$\pm\frac{lE}{\pi}$$

die Menge der in der geschlossenen Kette vertheilten positiven oder negativen Elektricität; folglich, wenn

$$E=w$$

ist, wo w den Widerstand der Kette bezeichnet, so ist

$$\pm\frac{lw}{\pi}$$

diejenige positive oder negative Elektricitätsmenge, welche in einer geschlossenen Kette, durch welche der Strom $=1$ geht, vertheilt sein muss, wenn der Strom von einem Punkte der Kette aus erregt wird.

Ueber Elektrothermismus.

Ueber Elektricität und Wärme.

Nachdem die erste Fundamentalerscheinung des *Elektromagnetismus* von Oersted entdeckt worden war, sind sehr bald auch andere Fundamentalerscheinungen entdeckt und Hand in Hand mit diesen Entdeckungen ist die Theorie des Elektromagnetismus entwickelt worden, so dass durch die Theorie oft vorgegriffen und der Leitfaden zur Entdeckung jener Fundamentalerscheinungen gegeben wurde.

Ganz anders hat es sich mit den Fundamentalerscheinungen und mit der Lehre vom *Elektrothermismus* verhalten. Ungeachtet die meisten elektrothermischen Fundamentalerscheinungen früher entdeckt worden sind wie die elektromagnetischen, so ist die Theorie des Elektrothermismus doch bis jetzt noch ganz unentwickelt geblieben.

Die bisher entdeckten elektrothermischen Fundamentalerscheinungen sind folgende:

1. Ein Turmalin, während er abkühlt, ist an einem Ende positiv, am anderen negativ geladen. Umgekehrt, während er erwärmt wird. Hankel, Elektrische Untersuchungen. 9. Abhandlung. (Abh. d. Königl. Sächs. G. d. W. math.-phys. Klasse, Bd. X, No. IV, 1872.)

2. Durch einen Strom i in einem geschlossenen Leiter wird in einem Stücke des letzteren, welches den Widerstand w besitzt, im Zeitelement dt *Wärme* erzeugt, deren mechanisches Aequivalent $= w i^2 dt$ ist, dabei w und i in absolutem Maasse ausgedrückt.

3. In einem aus zwei verschiedenen Metallen bestehenden geschlossenen Leiter findet ein Strom statt, wenn der Leiter an den beiden Stellen, wo die verschiedenen Metalle einander berühren, ungleiche Temperatur besitzt. (Seebeck's Fundamentalerscheinung.)

4. Wenn ein Strom durch einen aus zwei verschiedenen Metallen zusammengesetzten Leiter, der überall gleiche Temperatur besitzt, hindurch geht, so findet (abgesehen von der in den einzelnen Leiterstücken nach Proportion ihrer Widerstände vom Strome erzeugten Wärme) in der einen Berührungsfläche der Metalle Erzeugung, in der anderen Verschwinden von Wärme statt. (Peltier's Fundamentalerscheinung.)

Es ist nun eine Grundlage für eine Theorie des Elektrothermismus (10. Band der Abhandlungen der Königl. Ges. d. Wissenschaften zu Göt-

tingen 1862 „Zur Galvanometrie“ Art. 33,[1]) und 10. Bd. der Abhandlungen der math.-phys. Klasse der Königl. Ges. der Wissenschaften, Leipzig 1871. „Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie“, Art. 19 u. 20[2]) in der Annahme der AMPÈRE'schen Hypothese von Molekularströmen und in einer weiteren Entwickelung dieser Hypothese gesucht worden.

Die Annahme von Molekularströmen in allen magnetischen und diamagnetischen Körpern führt nämlich, wie man leicht sieht, konsequenter Weise zu einer ganz neuen Ansicht von dem Verhalten der elektrischen Fluida in Konduktoren bei den sogenannten elektrostatischen Gleichgewichtszuständen. Man wird dahin geführt, niemals Ruhe der elektrischen Fluida, sondern stete Bewegung derselben in Kreisbahnen um die einzelnen Moleküle anzusehen, wonach die ganze von POISSON entwickelte Elektrostatik umzugestalten ist.

Ferner wird man aber auch zu einer neuen Ansicht von den galvanischen Strömen geführt, nämlich dass die gesammten elektrischen Fluida im Stromleiter, bei sogenannten konstanten Strömen, keineswegs mit konstanter Geschwindigkeit sich bewegen, sondern dass nur einzelne Theilchen der elektrischen Fluida von den Molekularströmen, denen sie angehören, losgerissen, ruckweise zu den nächsten Molekularströmen übergehen, denen sie dann angehören, bis sie wieder losgerissen werden u. s. w.

Die elektromotorische Kraft, die das Losreissen bewerkstelligt, beschleunigt die Bewegung der losgerissenen Theilchen bis zu ihrem Eintritt in den folgenden Molekularstrom. Es ergiebt sich daraus eine Zunahme von lebendiger Kraft, welche der durch das Produkt der elektromotorischen Kraft in den Abstand der beiden Molekularströmen bestimmten mechanischen Arbeit äquivalent ist.

Nun hat sich aber ergeben, dass die so bestimmte mechanische Arbeit das mechanische Arbeitsäquivalent der vom Strome im Leiter erzeugten Wärme ist, woraus gefolgert werden kann, dass *Wärme und lebendige Kraft der in den Molekularströmen bewegten elektrischen Fluida identisch sind.* Hierin besteht im Wesentlichen die auf die AMPÈRE'schen Molekularströme begründete Theorie der zweiten Fundamentalerscheinung des Elektrothermismus.

Ist nun aber nach dieser Theorie der zweiten Fundamentalerscheinung des Elektrothermismus *Wärme* die lebendige Kraft der in den Molekularströmen bewegten elektrischen Flüssigkeiten, so ergiebt sich, dass die verschiedenen Temperaturgrade *bei einem und demselben Körper*

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. IV, p. 91.]

[2]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. IV, p. 291 und 294.]

ihren Grund haben müssen in verschiedenen *Geschwindigkeiten* der in den Molekularströmen bewegten elektrischen Flüssigkeiten, während die *Massen* der in den Molekularströmen bewegten elektrischen Flüssigkeit nicht verschieden sind. Denn die Masse der bewegten elektrischen Flüssigkeit ist, durch die immer gleiche Masse der mit dem Kern des Molekularstroms fest verbundenen Flüssigkeiten gegeben.

Verschiedene Körper werden sich aber von einander durch Verschiedenheit der mit den Kernen der Molekularströme fest verbundenen Flüssigkeit unterscheiden und daher, wenn *keine Ladung* vorhanden, auch durch verschieden grosse *Massen* der bewegten elektrischen Flüssigkeit.

Kommen dann verschiedene solche Körper bei gleicher Temperatur in Berührung, und bezeichnet man die in ihnen bewegten grossen Massen der elektrischen Flüssigkeiten mit e und e' und deren Geschwindigkeiten mit u und u', so ist nach der Definition der Temperaturgleichheit verschiedener Körper

$$\varepsilon u^2 = \varepsilon' u'^2,$$

wo ε die aus dem ersten Molekülarstrom gerissene und zum anderen übergegangene elektrische Masse bezeichnet, ε' die aus dem anderen gerissene und zum ersten übergegangene. Sind also die bei einer gleichen Temperatur zwei verschiedenen Körpern angehörigen Geschwindigkeiten u und u' verschieden, so sind auch die Massen ε und ε' verschieden. Es findet also eine Ladung der Moleküle statt und zwar eine *positive* des einen und eine *negative* des anderen, d. h. es wirkt eine Scheidungskraft an der Berührungsfläche, welche das *Princip des Galvanismus* ist.

Bezeichnet man jene Temperatur mit t, ferner mit a und a' die specifischen Wärmen der beiden Körper und mit b und b' die Zahl der Temperaturgrade unter Null, für welche die lebendige Kraft der Molekülarströme in diesen beiden Körpern nach Proportion sich auf Null reduciren würde, so hat man

$$t = \frac{e}{a} u^2 - b = \frac{e'}{a'} u'^2 - b' \tag{1}$$

für eine Temperatur t' erhält man auf gleiche Weise:

$$t' = \frac{e}{a} w^2 - b = \frac{e'}{a'} w'^2 - b'$$

oder

$$w^2 = u^2 + v^2, \quad w'^2 = u'^2 + v'^2$$

gesetzt

$$t' = \frac{e}{a}(u^2 + v^2) - b = \frac{e'}{a'}(u'^2 + v'^2) - b \qquad (2)$$

Gleichung (1) von (2) abgezogen giebt

$$\frac{e}{a} v^2 = \frac{e'}{a'} v'^2$$

oder

$$v'^2 = \frac{e\,a'}{e'\,a} v^2. \qquad (3)$$

Aus den Gleichungen (1) folgt

$$u'^2 = \frac{a'}{e'}\left(\frac{e}{a} u^2 + b' - b\right) \qquad (4)$$

also wenn man (3) und (4) addirt, wird

$$u'^2 + v'^2 = \frac{a'}{e'}\left[\frac{e}{a}(u^2 + v^2) + b' - b\right]$$

oder

$$w'^2 = \frac{a'}{e'}\left(\frac{e}{a} w^2 + b' - b\right).$$

Aus der Temperaturgleichheit beider Körper, nämlich $= t'$, ergiebt sich aber

$$\eta\, w^2 = \eta'\, w'^2$$

wo η die aus dem ersten Molekularstrom gerissene und zum anderen übergegangene elektrische Masse bezeichnet, η' die aus dem anderen gerissene und zum ersten übergegangene. Hieraus folgt

$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{a'}{e'}\left(\frac{e}{a} + \frac{b' - b}{w^2}\right)$$

oder, da $w^2 = [a/e](t' + b)$ ist,

$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{e\,a'}{e'\,a}\left(1 + \frac{b' - b}{t' + b}\right).$$

Es ist also der Wahl des Verhältnisses η/η' (d. h. die Grösse der Scheidungskraft an der Kontaktfläche beider Körper) verschieden, nach Verschiedenheit der Temperatur t', falls der Werth $b' - b$ für die beiden Körper von Null verschieden ist, d. h. falls die Zahl der Temperaturgrade unter Null, für welche nach Proportion die lebendige Kraft der Molekularströme verschwinden würde, für den einen Körper eine andere ist als für den anderen Körper.

Es leuchtet ein, dass für alle Körper, für welche die Werthe der specifischen Wärme mit der Temperatur sich mehr oder weniger ändert, der Werth von $b' - b$ von Null verschieden sein müsse. Wahrscheinlich findet dies für Wismuth und Antimon in besonders hohem Maasse statt.

In dieser Abhängigkeit der Grösse der Scheidungskraft an der Kontaktfläche von der Temperatur ist aber das Princip der Seebeck'schen Fundamentalerscheinung enthalten, oder der dritten elektrothermischen Fundamentalerscheinung.

Das Princip für die Peltier'sche Fundamentalerscheinung oder für die vierte elektrothermische Fundamentalerscheinung ergiebt sich ebendaraus von selbst.

Es sei E die Elektricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des kreisförmigen Leiters geht, und es sei u und u' die Geschwindigkeiten, mit welchen die elektrischen Flüssigkeiten in den Molekularströmen der beiden Körper (metallische Konduktoren), aus denen der kreisförmige Leiter zusammengesetzt ist, sich bewegen. Es strömt dann E mit der Geschwindigkeit u aus dem ersten Leiter in den zweiten Leiter ein, und es strömt E mit der Geschwindigkeit u' von der Grenzschicht des zweiten Leiters in die folgende Schicht weiter fort. Die lebendige Kraft der Molekularströme des zweiten Leiters an der Grenzschicht wird also in der Zeiteinheit um $E\,(u^2 - u'^2)$ vergrössert, oder es wird in dieser Grenzschicht Wärme entwickelt, deren mechanisches Aequivalent $= E(u^2 - u'^2)$ ist.

Ferner strömt E mit der Geschwindigkeit u' aus dem zweiten Leiter in den ersten Leiter ein, und es strömt E mit der Geschwindigkeit u von der Grenzschicht in den ersten Leiter weiter fort. Die lebendige Kraft der Molekülarströme des ersten Leiters an dieser Grenzschicht wird also in der Zeiteinheit um $E(u^2 - u'^2)$ vermindert, oder es verschwindet an dieser Grenzschicht Wärme, deren mechanisches Aequivalent $= E(u^2 - u'^2)$ ist. Dies ist das Princip der Peltier'schen Fundamentalerscheinung.

Geht man nun nach dieser theoretischen Betrachtung von der zweiten, dritten und vierten elektrothermischen Fundamentalerscheinung

zu der ersten über, so hat man zunächst zu beachten, dass der Turmalin ein Isolator ist. Die Molekularströme in einem Isolator sind so beschaffen, dass selbst unter Einwirkung einer Scheidungskraft von der in Molekularströmung befindlichen Flüssigkeit kein Theilchen abgerissen und zum folgenden Molekularstrom hinübergetrieben wird. Auch findet in einem solchen Isolator sehr schwache Wärmeleitung statt, aber es fehlt doch nicht ganz an Wärmeleitung, da die verschiedenen Temperaturen der verschiedenen Theile eines Turmalins sich von selbst in mässig langer Zeit ausgleichen. Diese Wärmeleitung muss also auf einem anderen Princip beruhen, als auf dem Abreissen einzelner Theilchen der in Molekularströmung befindlichen Flüssigkeiten und deren Uebergang zu benachbarten Molekularströmen.

Ohne eine solche Wanderung elektrischer Theilchen ε mit der ihnen in den Molekularströmen zukommenden Geschwindigkeit u (also mit der Wärme, deren mechanisches Aequivalent $= \varepsilon u^2$ ist), kann Wärmeübertragung von einem Molekularstrom zum anderen nur durch Induktion erfolgen. Diese Induktion ergiebt sich, wenn man beachtet, dass der Halbmesser der Molekularströme bald wächst, bald abnimmt, immer also in Aenderung begriffen ist. Sollte aber auf diese Weise der Abkühlungszustand des Turmalins erklärt werden, so würde doch die damit verbundene positive und negative Ladung an den entgegengesetzten Endflächen des Turmalins noch keine Erklärung finden. Auch leuchtet ein, weil diese elektrische Ladung in Folge von Abkühlung nur beim Turmalin und ähnlichen Krystallen stattfindet, dass deren Erklärung in näherer Beziehung mit dem krystallinischen Gefüge, d. i. mit den Lageverhältnissen der Molekularströme in diesen Krystallen stehen müssen.

Die Krystallographie giebt nun zwar Bestimmungen über diese Lageverhältnisse, sie giebt aber keine Bestimmungen über die Kräfte, wodurch sie zu Stande gekommen sind und erhalten werden. Bezeichnet man auch den Grund der Erhaltung dieser Lagenverhältnisse mit dem Namen der Festigkeit (oder Elasticität) des Aggregatzustandes, so hat man doch keine Kenntniss von den Gesetzen der Wechselwirkung der Molekularströme (Moleküle) unter einander, aus denen ein solcher fester Aggregatzustand resultire.

Im Allgemeinen würde man dabei drei Arten von Wechselwirkungen zu beachten haben, nämlich 1. die elektrischen Wechselwirkungen, deren Gesetze gegeben sind, 2. Wechselwirkungen der Elektricität mit dem ponderabelen Kernen der Molekularströme. Hält man daran fest, dass derartige Wechselwirkung in der Ferne nicht stattfindet, so bleibt hiervon nur diejenige Wechselwirkung übrig, vermöge deren die ponderabelen Kerne der Molekularströme mit einer bestimmten Menge der

40*

einen elektrischen Flüssigkeit fest verbunden bleiben. Ausserdem sind zu beachten 3. die Wechselwirkungen der ponderabelen Kerne der Molekularströme, die sie aus der Ferne auf einander ausüben. Diese letzteren würden, so weit sie aus dem Gravitationsgesetz sich ergeben, wegen ihrer Kleinheit kaum in Betracht kommen. Nun kennt man zwar noch gar keine solche Wechselwirkungen näher, die vom Gravitationsgesetze unabhängig wären, man hat aber Grund zu vermuthen, dass solche vorhanden sind, und dass sie so gross sind, um für das Zustandekommen fester krystallinischer Aggregatzustände von grosser Bedeutung zu sein.

Bei völliger Unkenntniss dieser Art von Wechselwirkungen liegt es aber doch am nächsten, um von dem Zustandekommen fester krystallinischer Aggregatzustände Rechenschaft zu geben, Alles genauer zu erforschen, was dabei von den *elektrischen Wechselwirkungen der Molekularströme* herrühren könne.

Lehrsatz. Zwei Ampère'sche Molekularströme, deren gleichgerichte Achsen in gerader Linie liegen, ziehen bei grösserer Entfernung einander an, stossen bei kleinerer Entfernung einander ab.

Lehrsatz. Jede relative Bewegung zweier solcher Ampère'schen Molekularströme wird durch Wechselwirkung gedämpft, d. h. die mechanische Bewegung, welche in Verschiebungen der Molekularströme gegeneinander besteht, wird in Molekularströmung (Wärmeenergie) verwandelt.

Das Gesetz der elektrischen Wechselwirkung lehrt hiernach, *wie* die Umwandlung mechanischer Bewegungsenergie in Warmeenergie bewerkstelligt wird. Wenn solche Ampère'sche Molekularströme die Moleküle fester Körper bilden, so erklärt sich nach dem zuerst angeführten Lehrsatze die *Festigkeit* dieser Körper aus der Wechselwirkung jener Molekularströme bei bestimmten Lagen und Entfernungen derselben.

Briot, théorie de la chaleur, Introduction p. 2 führt die Erklärung zurück auf eine Anziehungskraft der ponderabelen Theilchen $= mm'.a/r^n$ und auf eine Abstossungskraft ihrer beiden Aether-Atmosphären $= mm'.b/r^{n+p}$, wodurch aber nur der Abstand der im Gleichgewicht befindlichen Theilchen bestimmt wird, nicht aber die Lage der sie verbindenden Geraden. Nach der ersteren Erklärung ist diese Lage durch die Achse des ersten Molekularstroms gegeben, und ausserdem ist die Lage des zweiten Molekularstroms noch dadurch bestimmt, dass seine Achse mit der des ersten parallel sein soll.

Eine Reihe solcher Molekularströme, alle in einer geraden Linie und in gleichen Abständen, bilden eine Säule. Eine zweite ganz gleiche Säule von Molekularströmen wird von der ersten in einer bestimmten Entfernung festgehalten, so dass entgegengesetzt gerichtete Ströme neben einander in den beiden Säulen zu liegen kommen. Eine Reihe von solchen Säulen, alle in gleichen Abständen von einander und alle in

einer Ebene, bilden eine Schicht, die wieder eine gleiche Schicht in bestimmter Entfernung festhält u. s. w.

Auf diese Weise erhält man ein über den ganzen Raum ausgedehntes festes System von Molekularströmen, nicht blos mit bestimmten *Entfernungen* der Moleküle von einander, sondern auch mit bestimmter Richtung und Lage der Moleküle gegen einander. Dieses feste System wäre ein Krystallsystem mit drei gegen einander senkrechten Elasticitäts-Achsen, von denen zwei gleiche Elasticitätsmoduli besässen. Es scheint aber nicht, dass auf diesem Wege die Erklärung der anderen Krystallsysteme gefunden werden könnte.

Aphorismen.

Von den Kategorien Zahl, Raum und Zeit gehört die *Zahl* allein der reinen Logik oder Wissenschaft an, Raum enthält schon etwas Hypothetisches oder aus der Anschauung Entnommenes (z. B. die Euklidische Hypothese der Parallelentheorie, ferner die Vorstellung von links und rechts, die keine logisch definirbare Begriffe sind). Ebenso wie mit dem Raum dürfte es sich auch mit der *Zeit* verhalten. Die Verhältnisse von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft nach unserer für die physische Welt gebildeten Vorstellung von der Zeit dürften also ebenfalls etwas Hypothetisches enthalten, was für die geistige Welt (für die Gedankenwelt, noch mehr aber für das Denken selbst) keine unbedingte Gültigkeit besässe.

Wir fassen unsere Gedankenwelt in den Rahmen von Zahl, Raum, Zeit, Bewegung u. s. w., wobei Stetigkeit und Einfachheit der Bewegung (dass kein Ding zweierlei Bewegung zugleich machen könne) für den Zusammenhang wesentlich ist.

Dieser Rahmen genügt nicht mehr, wenn diese unsere Gedankenwelt auch auf geistiges Leben und auf die Gottheit ausgedehnt und erstreckt werden soll.

Die geistige Bewegung des Denkens kann nicht in der Art beschränkt werden, dass sie ebenso wie die physische Bewegung dem Princip der Stetigkeit und Einfachheit (wonach kein denkendes Wesen zwei Gedanken zugleich haben könnte) unterworfen würde. Die Möglichkeit eines Schlusses, fordert drei Sätze zusammen im Bewusstsein gegenwärtig zu haben.

Nach jenem ersteren, für die physische Welt gebildeten Rahmen, ist die Gegenwart gar *nichts,* nämlich blosse Grenze zwischen Vergangenheit und Zukunft ohne eigenen Inhalt.

Im geistigen Leben gehört das Bewusstsein der Gegenwart an, was einen wesentlichen Inhalt hat (dem auch alle Erinnerung angehört). Im geistigen Leben ist also die Gegenwart etwas Wirkliches und nicht blos Grenze zwischen Vergangenheit und Zukunft, sie hat einen wirklichen Inhalt.

Ohne Bewusstsein als Inhalt der Gegenwart giebt es gar kein geistiges Leben, und für die Gottheit muss sogar der im Bewusstsein gegebene Inhalt der Gegenwart unendlich ausgedehnt werden.

Ein solcher Inhalt fordert aber Zeit; im geistigen Leben ist daher die mit Bewusstsein erfüllte Gegenwart keine blosse Grenze zwischen Vergangenheit und Zukunft, sondern sie ist eine *Grenzschicht* zwischen Vergangenheit und Zukunft, sie ist ein wirkliches Zeitelement.

In der Gottheit muss diese mit Bewusstsein erfüllte Gegenwart unendlich ausgedehnt sein.

Die Gottheit, die blos in der Gegenwart, in dem für die physische Welt angenommenen Sinne (wo sie nämlich die blosse Grenze von Vergangenheit und Zukunft ist), existirte, in der Vergangenheit existirt hätte und in der Zukunft erst noch zur Existenz gelangen müsste, würde geistig Null oder nur ein Scheinwesen sein.

Unser Denkvermögen, Empfindungsvermögen und Erinnerungsvermögen sind das uns verliehene Pfund, mit dem wir wirthschaften sollen. Wir bilden uns eine Gedankenwelt in wunderbarem Zusammenhange mit unseren Empfindungen. Wir lernen dadurch das uns verliehene Pfund schätzen und den Geber verehren und ihm vertrauen, der es verliehen. Diese im Zusammenhange mit unseren Empfindungen gebildete Gedankenwelt umfasst auch eine Vorstellung von uns selbst, die aber durch die Vorstellung von unserer Geburt und unserem Tode auf den Zeitabschnitt zwischen beiden beschränkt ist. Jene Gedankenwelt enthält zwar viele Vorstellungen, auch von der Zeit vor unserer Geburt und nach unserem Tode, aber unter diesen Vorstellungen ist keine von uns selbst. So lange wir leben wirthschaften wir mit dem uns verliehenen Pfunde und suchen unsere Gedankenwelt fortwährend zu berichtigen und zu vervollständigen; was wir aber schon erreicht haben, genügt, um uns die höchste Schätzung des verliehenen Pfundes und das höchste Vertrauen in den Verleiher einzuflössen, insbesondere das Vertrauen, dass, wer dieses Pfund verliehen, auch weiter sorgen werde. Auf dieses Vertrauen gründet sich die Ueberzeugung, dass die wahre Weltordnung die Ordnung unserer Gedankenwelt noch weit übertreffe.

Wenn materielle Wesen, die räumlich und zeitlich von einander getrennt sind, in Wechselwirkung stehen, so liegt der Grund dieser Wechselwirkung in dem Wesen beider *als einem Ganzen.* Die von einander abhängigen Theile dieses *Ganzen* existiren in verschiedenen Raum- und Zeitpunkten. Giebt es *materielle* Wesen, die als *Ganzes* nicht auf

einen Raumpunkt und Zeitpunkt beschränkt werden können, so gilt dies noch weit mehr von *geistigen* Wesen.

Verliehen ist uns das Empfindungs-, Denk- und Erinnerungsvermögen. Wir erwerben damit überhaupt eine Gedankenwelt, insbesondere eine gedachte Welt, materielle und geistige in kausalem Zusammenhange. Der kausale Zusammenhang führt auf eine letzte Ursache — Gott. Die Möglichkeit einer tieferen Einsicht in das Woher und Wozu scheint uns durch das Empfindungs- und Denkvermögen nicht verliehen zu sein. Eine gedachte Welt in kausalem Zusammenhange, welche nicht auf eine letzte Ursache führt, sondern auf viele letzte Ursachen, Eigenschaften aller im Raume vorhandener Dinge, ist auf eine gedachte Körperwelt beschränkt; alles Denkende ist davon ausgeschlossen, folglich ist davon auch ausgeschlossen jede *Erklärung* der gedachten Körperwelt. Denn eine Körperwelt könnte existiren, ohne dass sie gedacht wird.

In der beschreibenden Naturlehre (inkl. Chemie), wird der durch eine Regel gegebene Zusammenhang für eine *Erklärung* genommen, ohne dass der *Grund* der Regel in der Natur der gedachten Körper nachgewiesen sei, geschweige der Grund alles Empfindens und Denkens.

ANHANG.

Bemerkungen über Herrn Lamont's Beurtheilung magnetischer Instrumente.[1]

[Schuhmacher's Astronomische Nachrichten, No. 464, Bd. 20, Kolonne 121—124 (1842, December 29).]

In den Astronomischen Nachrichten No. 444 berichtet Herr Dr. Lamont über das von ihm neben der Münchener Sternwarte errichtete magnetische Observatorium und über eine Untersuchung magnetischer Instrumente, deren Konstruktion und Aufstellung, welche er unternommen habe. Ausführlicher findet man diese Untersuchung in folgender seitdem erschienenen Schrift dargestellt: „Ueber das magnetische Observatorium der Königlichen Sternwarte bei München. Von Dr. J. Lamont. München 1841." Das Resultat davon ist, dass Herr Dr. Lamont, der mit ähnlichen Instrumenten, wie in Göttingen gebraucht werden, zu beobachten anfing, bald viele wesentliche Veränderungen derselben nöthig fand, auch von den bisher befolgten Vorschriften der Beobachtung mehrfach abwich und in kurzer Zeit zu manchen Resultaten gelangt ist, welche mit den seit 1836 bekannt gemachten Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins nicht übereinstimmen. Es ist hier also nicht von einer einzelnen abweichenden Ansicht oder Erfahrung die Rede, über die man sich zu verständigen versuchen könnte, sondern von einer gänzlichen Divergenz fast in allen Beziehungen, welche auszugleichen ein vergebliches Bemühen sein würde, zumal da die Gründe und Erfahrungen, auf welche sich Herr Dr. Lamont stützt, noch nicht vollständig vorliegen. Das Folgende wird dazu dienen, das Gesagte in's Licht zu setzen.

1. Herr Dr. Lamont gründet seine Einwendungen gegen die bisherigen Instrumente, wonach sie bei grosser Schärfe der Ablesung doch keine Sicherheit und Richtigkeit der Bestimmungen gewährten, auf seine eigenen damit gemachten Beobachtungen. Da nun jene Instrumente, so wohl was ihre Feinheit, als auch was ihre Genauigkeit betrifft, anderweits

[1] [Dieser Aufsatz wurde erst aufgefunden, nachdem bereits Bd. II, in welchen derselbe seinem Inhalte nach hätte aufgenommen werden müssen, so wie auch Bd. III im Drucke erschienen waren. Um die Aufnahme in die Gesammtwerke Wilhelm Weber's zu ermöglichen, blieb daher nur diese Stelle übrig.]

vielfach bewährt gefunden worden sind, so könnte man vermuthen, dass bei Herrn Lamont in ihrer Behandlung etwas versehen worden sei, was jedoch aus dem Mitgetheilten sich nicht erkennen lässt. Herr Dr. Lamont hat selbst dem Grunde nicht weiter nachgeforscht, sondern setzte, wie er sagt, die Untersuchung mit diesen Instrumenten nicht weiter fort, weil ihre Aufstellung zu mühsam und ihre Regulirung zu umständlich war.

2. Herr Dr. Lamont richtete andere Instrumente mit kleinen Nadeln ein, die bei 1 bis 2 Grammen Gewicht gleichfalls einen Spiegel zu tragen erhielten. Wenn nun gleich diese Belastung kleiner Nadeln mit einem Spiegel dem Verhältniss der Direktionskraft zum Trägheitsmoment nicht vortheilhaft ist, so gab doch Herr Dr. Lamont diesen kleineren Nadeln aus anderen Gründen den Vorzug, und, was besonders scheinen kann, gerade aus denselben, aus denen bisher die grösseren Nadeln den kleineren vorgezogen worden waren. Diese Gründe waren *erstens,* dass in der kleineren Schwingungsabnahme, welche sich bei grösseren, gut magnetisirten Nadeln zeigte, ein geringerer Einfluss der umgebenden Luft erkannt wurde, ein Umstand, der bisher als ein Vorzug der grösseren galt. Herr Dr. Lamont tadelt deshalb die grösseren Nadeln und rühmt von den kleineren, dass sie (auch ohne Anwendung eines Dämpfers) *gar nicht* schwingen, was ein hyperbolischer Ausdruck für eine grosse von dem Widerstande der Luft auf die Spiegelfläche herrührenden Schwingungsabnahme zu sein scheint. *Zweitens* wurden bisher grössere Nadeln vorgezogen, weil ihre grössere Schwingungsdauer eine bequeme Anordnung der Beobachtungen zur Ermittelung des wahren Standes gestattete. Da aber die kleinen Nadeln *gar nicht* schwingen und den wahren Stand stets *unmittelbar zeigen,* so verwandelt sich das, was man bisher als Vorzug betrachtete, nach Herrn Dr. Lamont in einen offenbaren Nachtheil.

3. Die bisher gebrauchte Methode zur leichteren und genaueren Beobachtung der Variationen, eine grössere Schwingungsabnahme der Nadeln, statt durch *Berührung* mit der Luft oder mit anderen Körpern, durch einen *aus der Ferne* wirkenden Dämpfer hervorzubringen, findet Herr Dr. Lamont so verwerflich, dass es ihm genügt, ohne weiteren Grund nur auszusprechen, dass ein solcher Dämpfer bei genauen Beobachtungen nie gebraucht werden sollte.

4. Auch das Bifilarmagnetometer wird von Herrn Dr. Lamont verworfen, weil es ihm, wie er sagt, zu wenig Sicherheit zu gewähren *scheint.* Ich gebrauchte, fährt er fort, als Torsionskraft anstatt zweier Fäden eine stählerne Spiralfeder (eine englische Chronometerfeder). Es würde vergeblich sein, jene vermeinte Unsicherheit errathen zu wollen; denn der Einfluss der Temperatur auf die bifilare Suspension kann nicht

gemeint sein, weil *erstens* Herr Hofrath Gauss denselben zu benutzen gelehrt hat, um dadurch den unvermeidlichen Einfluss der Temperatur auf das Trägheitsmoment der Nadel zu kompensiren, *zweitens* weil dieser Einfluss bei der Spiralfeder des Herrn Dr. Lamont auch stattfindet und weit gefährlicher wird, indem er die Elasticität der Feder, von der dabei alles abhängt, afficirt. Herr Dr. Lamont äussert deshalb gar keine Unsicherheit, was nach seiner Meinung wahrscheinlich von Sir John Herschel bei einer ähnlichen Gelegenheit mit Unrecht geschehen ist, welcher im Treatise on Astronomy London 1833, pag. 125 sagt: Whether the process above described could ever be so far perfected and refined as to become a substitute for the use of the pendulum must depend on the degree of permanence and uniformity of action of springs, on the constancy or variability of the effect of temperature, on their elastic force etc.

5. Besonders aber, was die absolute Intensitätsmessung betrifft, hat Herr Dr. Lamont von der Tauglichkeit der von Herrn Hofrath Gauss angewandten Mittel keine günstige Vorstellung gefasst. Seine Vorstellung von der nach der Gaussischen Methode *erreichbaren Schärfe* gründet er auf die in der Intensitas vis magneticae angeführten Messungen. Der *blosse Anblick* der Zahlen, sagt er, gewähre ihm die Ueberzeugung, dass die gebrauchten Hülfsmittel noch viel zu wünschen übrig liessen. In der That, scheint Herr Dr. Lamont sich beim Studium der Intensitas auf den *blossen Anblick* der Zahlen beschränkt und, was zum Verständniss ausserdem nöthig war, selbst hinzugedacht zu haben. Wirklich kann man, wenn man den dazu gehörigen Text übersieht und das Gegentheil von dem, was darin gesagt ist, hinzudenkt, (wenn man z. B. hinzudenkt, jene Messungen wären in einem eisenfreien Gebäude angestellt worden, wie es in Göttingen später dazu erbaut wurde, oder wenn man sich denkt, dass das Gebäude, wo jene Messungen gemacht wurden, zwar bedeutende Eisenmassen enthalten habe, dass aber der Einfluss dieser Eisenmassen, sowie der Beobachtungsort selbst unverändert geblieben sei, wovon der Text das Gegentheil sagt), zu der Vorstellung des Herrn Dr. Lamont über die nach der Gaussischen Methode *erreichbare Schärfe* gelangen und mit ihm in obigen Zahlen die Uebereinstimmung in den drei ersten Zifferstellen vermissen.

6. Auch führt Herr Dr. Lamont die klassische Versuchsreihe aus der Intensitas, durch welche Herr Hofrath Gauss das Grundgesetz des Magnetismus zuerst streng bewiesen hat, als ein warnendes Beispiel der Ungenauigkeit an, zu welcher die ungeeigneten, von Herrn Hofrath Gauss angewandten und empfohlenen Instrumente führen könnten.

7. Herr Dr. Lamont ist endlich mit seinen Instrumenten und seiner Beobachtungsweise zu mehreren neuen Resultaten gelangt, z. B. dass

die magnetischen Variationen von *Wolken und Windrichtung* abhängen, woraus hervorgeht, dass alle Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins irrig sein müssen, welche eine so grosse Harmonie der gleichzeitigen Beobachtungen an vielen und entfernten Orten in ganz Europa gezeigt haben, da wohl nicht anzunehmen ist, dass überall Windrichtung und Bewölkung dieselbe gewesen sei. Herr Dr. Lamont stützt sich dabei zwar blos auf seine in München angestellten Beobachtungen; doch giebt er auch ein Beispiel von gleichzeitigen Beobachtungen in München und auf dem hohen Peissenberge, welche direkt beweisen sollen, dass bei dem Gebrauche seiner Instrumente jene Harmonie auch an nahen Orten keineswegs stattfinde.

Man sieht aus dem hier Angeführten, dass eine Diskussion über die Vorzüge der einen oder anderen Instrumente nicht wohl möglich ist, weil Herr Dr. Lamont fast alle Gründe, die *für* ein Instrument angeführt werden können, *gegen* dasselbe geltend zu machen sucht.

Weber.

Bayerische Staatsbibliothek München

sieben Schriften von Wilhelm Weber über die *Elektrodynamischen Maassbestimmungen,* sowie denjenigen der in ihren Berichten erschienenen kleineren Aufsätze genehmigt. Die Erben von Rudolph Kohlrausch haben der Aufnahme der mit jenem gemeinsam verfassten Arbeiten gern zugestimmt.

Nach dem im Juni 1891 erfolgten Tode Wilhelm Weber's sind dessen Papiere durchgesehen worden und es hat sich literarischer Nachlass vorgefunden, welcher die *Elektrodynamik* betrifft. Derselbe ist bei den zugehörigen Untersuchungen in den gesammelten Werken veröffentlicht worden.

Wilhelm Weber's gesammelte Werke sind in 6 Bänden erschienen:

Band I: **Akustik, Mechanik, Optik und Wärmelehre.** Besorgt durch Woldemar Voigt (Göttingen).

Band II: **Magnetismus.** Besorgt durch Eduard Riecke (Göttingen).

Band III und IV: **Galvanismus und Elektrodynamik.** Besorgt durch Heinrich Weber (Braunschweig).

Band V: **Wellenlehre auf Experimente gegründet.** Besorgt durch Eduard Riecke (Göttingen).

Band VI: **Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge.** Besorgt durch Friedrich Merkel (Göttingen) und Otto Fischer (Leipzig).

Die Kommission
für die Herausgabe der Werke Wilhelm Weber's.
E. Schering, Vorsitzender.

Verlag von Julius Springer in Berlin N.

Michael Faraday:

Experimental-Untersuchungen über Elektricität. Deutsche Uebersetzung von Dr. S. Kalischer, Privatdocenten an der Technischen Hochschule zu Berlin. In 3 Bänden. Mit in den Text gedruckten Abbildungen und Tafeln.
I. Band. Preis M. 12,—; geb. M. 13,20. II. Band. Preis M. 8,—; geb M. 9,20. III. Band. Preis M. 16,—; geb. M. 17,20.

M. Fourier:

Analytische Theorie der Wärme. Deutsche Ausgabe von Dr. B. Weinstein. Mit 21 in den Text gedruckten Holzschnitten. Preis M. 12,—; geb. M. 13,20.

Carl Friedrich Gauss:

Untersuchungen über höhere Arithmetik. (Disquisitiones arithmeticae. Theorematis arithmetici demonstratio nova. Summatio quarumdam serierum singularium. Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae. Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio prima et secunda. Etc.) Deutsch herausgegeben von H. Maser. Preis M. 14,—; geb. M. 15,40.

Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \text{u. s. w.}$$

Mit Einschluss der nachgelassenen Fortsetzung aus dem Lateinischen übersetzt von Dr. Heinrich Simon. Preis M. 3,—.

J. L. Lagrange:

Analytische Mechanik. Deutsch herausgegeben von Dr. H. Servus. Preis M. 16,—; geb. M. 17,20.

E. Mascart und J. Joubert:

Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Autorisirte deutsche Uebersetzung von Dr. Leopold Levy. In 2 Bänden. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Abbildungen. Preis M. 30,—; geb. M. 32,40.

Émile Mathieu:

Theorie des Potentials und ihre Anwendungen auf Elektrostatik und Magnetismus. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. Mit 18 in den Text gedruckten Figuren. Preis M. 10,—

James Clerk Maxwell:

Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Autorisirte deutsche Uebersetzung von Dr. B. Weinstein. In 2 Bänden. Mit zahlreichen Holzschnitten und 21 Tafeln. Preis M. 26,—; geb. M. 28,40.

H. Poincaré:

Elektricität und Optik. Vorlesungen. Autorisirte deutsche Ausgabe von Dr. W. Jaeger und Dr. E. Gumlich. In 2 Bänden. Band I: Die Maxwell'schen Theorien und die elektromagnetische Lichttheorie. Mit 39 in den Text gedruckten Figuren. Preis M. 8,—.
Band II: Die Theorien von Ampère und Weber. Die Theorie von Helmholtz und die Versuche von Hertz. Mit 15 in den Text gedruckten Figuren. Preis M. 7,—.

H. A. Schwarz:

Gesammelte mathematische Abhandlungen. In zwei Bänden. Mit zahlreichen Textfiguren und 4 Tafeln. Preis M. 25,—; geb. M. 28,—.

Werner Siemens:

Wissenschaftliche und technische Arbeiten. I. Band: Wissenschaftliche Abhandlungen und Vorträge. Mit in den Text gedruckten Abbildungen und dem Bildniss des Verfassers. Zweite Auflage. Preis M. 5,—; geb. M. 6,20.
II. Band: Technische Arbeiten. Mit 204 in den Text gedruckten Abbildungen. Zweite Auflage. Preis M. 7,—; geb. M. 8,20.

William Thomson:

Gesammelte Abhandlungen zur Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus. (Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism.) Autorisirte deutsche Ausgabe von Dr. L. Levy und Dr. B. Weinstein. Mit 59 in den Text gedruckten Abbildungen und 3 Tafeln. Preis M. 14,—; geb. M. 15,20

J. Violle:

Lehrbuch der Physik. Deutsche Ausgabe von Dr. E. Gumlich, Dr. L. Holborn, Dr. W. Jaeger, Dr. St. Lindeck. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren.
I. Theil: Mechanik. Erster Band: Allgemeine Mechanik und Mechanik der festen Körper. Preis M. 10,—; geb. M. 11,20.
Zweiter Band: Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Preis M. 10.—; geb. M. 11,20.
II. Theil: Akustik und Optik. Erster Band: Akustik. Preis M. 8,—; geb. M. 9,20.
Zweiter Band: Optik. (In Vorbereitung.)
III. Theil: Wärme und IV. Theil: Elektricität und Magnetismus werden nach Ausgabe des französischen Originals erscheinen.

— *Zu beziehen durch jede Buchhandlung.* —

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Werke

Bd.: 4.

1894

4 Phys.g. 178 s-4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11826539-6